NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H.-G. ZEUTHEN

Sur la détermination des caractéristiques de surfaces du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 385-403

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__385_0>

SUR LA DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES DE SURFACES DU SECOND ORDRE;

PAR M. H.-G. ZEUTHEN (DE COPENHAGUE).

Tandis que deux nombres suffisent pour caractériser un système de courbes planes assujetties au nombre des conditions nécessaires pour les déterminer, moins une, il faut trois nombres pour caractériser un système de surfaces (*). Ces trois nombres sont :

1° Celui des surfaces du système qui passent par un point;

2° Celui des surfaces qui touchent une droite;

3° Celui des surfaces qui touchent un plan.

Ces trois nombres sont nommés les *caractéristiques* du système, et on les désigne respectivement par les lettres μ, ν et ρ.

Nous ne nous occuperons ici que des systèmes de surfaces du second ordre qui satisfont à huit conditions. Nous désignerons, avec le géomètre anglais, une surface du second ordre par le mot *quadrique*.

Pour déterminer les caractéristiques d'un système de quadriques, on peut très-souvent faire usage des équations suivantes, où φ désigne le nombre des cônes dans le système, χ le nombre des coniques, et ψ celui des surfaces composées de deux plans dont la ligne d'intersection est limitée à deux points (*sommets*) :

$$\varphi = 2\rho - \nu, \tag{1}$$

$$\chi = 2\mu - \nu, \tag{2}$$

$$\psi = 2\nu - \mu - \rho. \tag{3}$$

(*) *Voir* les Mémoires de MM. de Jonquières et Chasles (*Comptes rendus*, t. LVIII, p. 567; et t. LXII, p. 405).

Les deux premières de ces équations sont bien connues, la troisième s'établit en même temps que les deux premières, de deux manières analogues.

1. Les coniques qui résultent de l'intersection des quadriques d'un système (μ, ν, ρ), par un même plan, forment un système (μ, ν). Celui-ci contient $2\mu - \nu$ (*) coniques infiniment aplaties qui correspondent aux χ coniques dans le système des quadriques, et $2\nu - \mu$ coniques composées de deux droites. Celles-ci résultent : 1° de l'intersection du plan avec les ρ quadriques qui le touchent; 2° de son intersection avec une des ψ quadriques composées. Donc

$$2\nu - \mu = \rho + \psi.$$

2. Les cônes circonscrits aux quadriques d'un système (μ, ν, ρ), et qui ont leurs sommets à un même point, forment un système (ν, ρ), qui contient $(2\rho - \nu)$ cônes composés de deux plans correspondants aux cônes dans le système de quadriques, et $(2\nu - \rho)$ cônes infiniment aplatis. Ceux-ci sont : 1° les cônes circonscrits aux μ quadriques qui passent par le point; et 2° les cônes circonscrits aux ψ quadriques composées. Par conséquent

$$2\nu - \rho = \mu + \psi.$$

Les nombres φ, χ et ψ sont, comme les nombres $2\mu - \nu$, $2\nu - \mu$ dans la théorie des systèmes de coniques (**) des nombres théoriques qui peuvent indiquer plusieurs fois une même quadrique singulière. Il ne suffit donc pas de compter simplement ces quadriques singulières, on doit prendre le nombre de chaque espèce de cônes, coniques ou quadriques composées, avec un certain coefficient. J'ai

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V, p. 195.

(**) *Voir* les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V, p. 242.

déterminé (*) les coefficients relatifs aux systèmes de quadriques qui satisfont à des conditions simples et élémentaires (**), d'une manière analogue à celle dont j'ai fait usage pour les coniques (***). Les résultats que j'ai trouvés sont renfermés dans les exposés suivants.

Un cône appartenant à un système simple et élémentaire compte dans le nombre φ pour *deux* si son sommet est sur un plan donné; pour *quatre* lorsqu'il est sur deux plans, et pour *huit* s'il se trouve sur trois plans.

Une conique plane appartenant à un système simple et élémentaire compte dans le nombre χ pour *deux* si son plan passe par un point donné; pour *quatre* s'il passe par deux points, et pour *huit* s'il passe par quatre points.

Une quadrique composée de deux plans dont la droite d'intersection est limitée à deux sommets compte pour *deux* si la droite d'intersection rencontre une droite donnée; pour *quatre* lorsqu'elle rencontre deux droites données; pour *huit* si elle en rencontre trois, et pour *seize* si elle en rencontre quatre (****).

Ces règles donnent lieu aux suivantes, qui sont relatives aux systèmes de quadriques touchant des surfaces données.

Un cône appartenant à l'un de ces systèmes compte, dans le nombre φ, pour *deux*, ou *quatre*, ou *huit*, suivant

(*) *Voir* les *Comptes rendus de l'Académie danoise des Sciences*, p. 91; 1866.

(**) Les systèmes de la XVIII[e] classe dans le Mémoire de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 409).

(***) *Nouvelles Annales*, 2[e] série, t. V, p. 242.

(****) Je saisis l'occasion de corriger une erreur qui s'est glissée au lieu cité des *Comptes rendus de l'Academie de Copenhague*. Dans la cinquième série de la première colonne, on doit remplacer

$$2\nu - \mu - \rho = 12y + 18z \quad \text{par} \quad 2\nu - \mu - \rho = 12y + 12y' + 18z,$$

ce qui donne

$$y' = 1, \quad \text{au lieu de} \quad y = 2.$$

que son sommet est sur une, ou deux, ou trois surfaces données.

Une conique plane appartenant à l'un de ces systèmes compte, dans le nombre χ, pour *deux*, ou *quatre*, ou *huit*, suivant que son plan est tangent à une, ou deux, ou trois surfaces données.

Une quadrique composée appartenant à l'un de ces systèmes compte, dans le nombre ψ, pour *deux*, *quatre*, *huit* ou *seize*, selon que la droite d'intersection des plans composants est tangente à une, deux, trois ou quatre surfaces données.

Une surface donnée peut être remplacée par une courbe; alors, la condition que le plan d'une conique du système touche cette courbe compte comme celle de toucher une surface, et la condition que la droite d'intersection de deux plans, formant une quadrique composée, rencontre la courbe, compte comme celle de toucher une surface.

On pourrait aussi tirer ces règles pour la multiplicité des quadriques singulières des principes établis dans une Note que j'ai insérée dans les *Nouvelles Annales*.

Le nombre des quadriques dans un système (μ, ν, ρ), qui satisfont à une neuvième condition donnée, se détermine ordinairement (*) par une expression de la forme

$$\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho, \tag{4}$$

où α, β, γ dépendent de la condition donnée, et servent à la caractériser; et lorsque l'on connaît les nombres α, β, γ qui correspondent à neuf conditions, on peut déterminer le nombre des quadriques qui y satisfont, et en particulier les caractéristiques des systèmes de quadriques qui satisfont à huit. Il s'agit donc de déterminer ces nombres pour toute condition simple.

(*) *Voir* le Mémoire de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 412).

Désignons par Z la condition simple, dont on cherche les nombres correspondants α, β, γ.

A cet effet, on y ajoute sept autres conditions $Z_1, \ldots, Z_7$, dont on connaît les nombres correspondants $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \alpha_7, \beta_7, \gamma_7$. Les caractéristiques de ce système seront, selon (4), des fonctions linéaires de α, β, γ. En les substituant dans les formules (1), (2), (3), et en exprimant par $\varphi(Z_1, \ldots, Z_8), \ldots$ les nombres φ, χ, $\psi \ldots$ qui correspondent au système $(Z_1, \ldots, Z_8)$, on trouve :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(Z_1, \ldots, Z_7, Z) &= A'\alpha + B'\beta + C'\gamma, \\ \chi(Z_1, \ldots, Z_7, Z) &= A''\alpha + B''\beta + C''\gamma, \\ \psi(Z_1, \ldots, Z_7, Z) &= A'''\alpha + B'''\beta + C'''\gamma, \end{aligned} \right.$$

où A', B', C', A'', B'', C'', A''', B''', C''' dépendent seulement des conditions $Z_1, \ldots, Z_7$, ou des nombres α_1, β_1, $\gamma_1, \ldots, \alpha_7, \beta_7, \gamma_7$. La manière la plus facile de les déterminer, c'est de remplacer successivement Z par les trois conditions *élémentaires* et simples : de passer par un point p, de toucher une droite l, et de toucher un plan P, ce qui donne respectivement

$$\alpha = 1, \ \beta = \gamma = 0; \quad \beta = 1, \ \alpha = \gamma = 0; \quad \gamma = 1, \ \alpha = \beta = 0.$$

On trouve donc

$$A' = \varphi(Z_1, \ldots, Z_7, p), \quad B' = \varphi(Z_1, \ldots, Z_7, l), \ldots.$$

On peut donc trouver A', B', ..., *ou*, en exprimant par les formules (1), (2) et (3) les nombres φ, χ et ψ qui correspondent aux systèmes $(Z_1, \ldots, Z_7, p), \ldots$, au moyen des caractéristiques connues de ces systèmes, *ou*, en comptant directement les quadriques singulières qui y sont comprises. Si l'on sait déterminer les trois nombres $\varphi(Z_1, \ldots, Z_7, Z)$, $\chi(Z_1, \ldots, Z_7, Z)$, $\psi(Z_1, \ldots, Z_7, Z)$, les trois équations (5) serviront à déterminer α, β, γ, si ces équations ne dépendent pas les unes des autres.

En prenant pour les conditions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_7$ les différentes conditions élémentaires et simples, on formera un grand nombre d'équations, dont trois indépendantes les unes des autres pourront servir à déterminer α, β et γ. Puis, les autres peuvent donner une confirmation aux résultats trouvés. Nous ferons, dans nos exemples, usage des équations suivantes :

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \psi(6p,\ \mathrm{P},\ \mathrm{Z}) = 10\gamma, \\ \psi(p,\ 6\mathrm{P},\ \mathrm{Z}) = 10\alpha, \\ \varphi(4p,\ 3\mathrm{P},\ \mathrm{Z}) = 8\alpha + 16\beta, \\ \chi(3p,\ 4\mathrm{P},\ \mathrm{Z}) = 16\beta + 8\alpha. \end{array}\right.$$

EXEMPLES. — 1° *Soit* Z *la condition* ρ_m *de toucher une surface donnée de l'ordre m.*

Alors, on trouve (*)

$$\psi(6p,\ \mathrm{P},\ \rho_m) = 10m,$$
$$\psi(p,\ 6\mathrm{P},\ \rho_m) = 10m(m-1)^2,$$
$$\varphi(4p,\ 3\mathrm{P},\ \rho_m) = 8[2m(m-1) + m(m-1)^2],$$
$$\chi(3p,\ 4\mathrm{P},\ \rho_m) = 8[m + 2m(m-1)].$$

Les deux derniers nombres se trouvent au moyen de la formule (3) (*Nouvelles Annales,* 2e série, t. V). La substitution de ces nombres dans les formules (6)

(*) Une section plane dans une surface de l'ordre m est en général une courbe de l'ordre m et de la classe $m(m-1)$. Un cône circonscrit à la surface est de l'ordre $m(m-1)$ et de la classe $m(m-1)^2$. Ce dernier nombre indique la classe de la surface. Par un point quelconque, on peut mener à la surface $4m(m-1)(m-2)$ plans tangents stationnaires (c'est-à-dire des plans dont la courbe d'intersection avec la surface a un point de rebroussement) et

$$\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m^3 - m^2 + m - 12)$$

plans tangents doubles. (*Voir*, par exemple, SALMON, *Geometry of three dimensions*, p. 201 à 218).

donne (*)

$$\alpha = m(m-1)^2, \quad \beta = m(m-1), \quad \gamma = m.$$

Dans le système (1, 1, 1) de quadriques qui se touchent suivant une conique, ou en particulier, de sphères concentriques, il y en aura, par conséquent,

$$\alpha + \beta + \gamma = m(m^2 - m + 1),$$

qui touchent une surface donnée de l'ordre m. Tel est donc le *nombre des normales* qu'on y peut mener par un point donné.

2° *Soit* Z *la condition* C *de toucher une courbe gauche donnée.* Nous désignerons son ordre par m, la classe de la surface développable qui y correspond par n, le nombre des plans tangents qu'on peut, par une droite, mener à la courbe (ou l'ordre de la surface développable) par r, le nombre des plans stationnaires (**) par a, et celui des points stationnaires (***) par b; l'ordre de la courbe double de la surface développable par x, et la classe de la surface enveloppe des plans doublement tangents à la courbe par y; le nombre des droites dans un plan quelconque qui sont sur deux plans tangents à la surface développable par g, et celui des droites par un point qui deux fois rencontrent la courbe par h (****). Alors

$$\begin{aligned}
\psi(6p,\ \mathrm{P},\ \mathrm{C}) &= 0,\\
\psi(p,\ 6\mathrm{P},\ \mathrm{C}) &= 10r,\\
\varphi(4p,\ 3\mathrm{P},\ \mathrm{C}) &= 8(2m + r),\\
\chi(3p,\ 4\mathrm{P},\ \mathrm{C}) &= 8.2m.
\end{aligned}$$

(*) Les mêmes résultats ont éte trouvés, d'une autre manière, par M. de Jonquières (*Comptes rendus*).

(**) Des plans qui contiennent quatre points consécutifs de la courbe.

(***) Des points de la courbe situés sur quatre plans consécutifs tangents à la surface développable.

(****) Trois des nombres $m, n, r, a, b, x, y, g, h$ suffisent pour déterminer les six autres, selon les équations de M. Cayley (Liouville, *Journal de*

Les formules (6) donnent donc

$$\alpha = r, \quad 6 = m', \quad \gamma = o.$$

Par un point donné, on peut faire passer $m + r$ normales à la courbe.

Pour caractériser la condition de toucher la surface développable qui a la courbe C pour arête de rebroussement, on trouve les valeurs $\alpha = o$, $6 = n$, $\gamma = r$.

Le nombre des quadriques qui satisfont aux sept conditions $Z_1, \ldots Z_7$, et aux deux conditions Z et Z', peut, en général, être déterminé par une expression de la forme (*)

$$(7) \qquad A\alpha\alpha' + B66' + C\gamma\gamma' + D\Sigma 6\gamma' + E\Sigma\gamma\alpha' + F\Sigma\alpha 6',$$

où A, B, C, D, E et F dépendent des sept conditions $Z_1, \ldots, Z_7$, et $\alpha\alpha'$, $66'$, $\gamma\gamma'$, $\Sigma 6\gamma'$, $\Sigma\gamma\alpha'$, $\Sigma\alpha 6'$ des deux conditions Z et Z'. Dans le cas où Z et Z' sont des conditions indépendantes l'une de l'autre, les nombres α, 6, γ, α', $6'$, γ' se déterminent distinctement de la manière que nous venons d'indiquer; mais Z et Z' forment *un couple inséparable de conditions* (ZZ') (par exemple celle de toucher deux fois une même surface ou courbe), on aura à déterminer les nombres composés $\alpha\alpha'$, $66'$, $\gamma\gamma'$, $\Sigma\beta\gamma'$,

---

Mathématiques, t. X, p. 245; 1845), dont six indépendantes les unes des autres peuvent s'écrire:

$$n = r(r-1) - 2x - 3m,$$
$$r = n(n-1) - 2g - 3a,$$
$$m - a = 3(r-n),$$
$$r = m(m-1) - 2h - 3b,$$
$$m = r(r-1) - 2y - 3n,$$
$$n - b = 3(r-m).$$

(*) *Voir* le Mémoire de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 413).

$\Sigma\gamma\alpha'$, $\Sigma\alpha\beta'$ (*). Ceux-ci serviront à caractériser la condition double.

Considérons, pour déterminer ces nombres, un système $[Z_1 \ldots Z_6, (ZZ')]$. Les caractéristiques de ce système ayant des expressions de la forme (7), il en sera de même, d'après les formules (1), (2) et (3), pour les nombres φ, χ, ψ qui y correspondent, de sorte qu'on aura

$$(8)\left\{\begin{aligned}\varphi[Z_1\ldots Z_6, (ZZ')] &= A'\alpha\alpha' + B'\beta\beta' + C'\gamma\gamma' \\ &\quad + D'\Sigma\beta\gamma' + E'\Sigma\gamma\alpha' + F'\Sigma\alpha\beta', \\ \chi[Z_1\ldots Z_6, (ZZ')] &= A''\alpha\alpha' + B''\beta\beta' + C''\gamma\gamma' \\ &\quad + D''\Sigma\beta\gamma' + E''\Sigma\gamma\alpha' + F''\Sigma\alpha\beta', \\ \psi[Z_1\ldots Z_6, (ZZ')] &= A'''\alpha\alpha' + B'''\beta\beta' + C'''\gamma\gamma' \\ &\quad + D'''\Sigma\beta\gamma' + E'''\Sigma\gamma\alpha' + F'''\Sigma\alpha\beta'.\end{aligned}\right.$$

Pour déterminer les coefficients A', B', A'', etc, on remplace successivement les conditions (ZZ') par les conditions simples et élémentaires : $2p$, de passer par deux points ; p, l, de passer par un point et de toucher une droite, etc. Alors, on trouve

$$A' = \varphi(Z_1\ldots Z_6,\ 2p),\quad B' = \varphi(Z_1\ldots Z_6,\ 2l);$$
$$A'' = \chi(Z_1\ldots Z_6,\ 2p),\ldots.$$

D'après ce que nous avons dit précédemment, on peut déterminer ces coefficients si $Z_1\ldots Z_6$ représentent des conditions simples et élémentaires. En prenant les différentes combinaisons possibles de celles-ci, on pourra former un grand nombre d'équations de la forme (8), dont six, indépendantes les unes des autres, suffiront pour dé-

(*) Comparer aux méthodes analogues pour les coniques planes, dues à MM. Chasles et Cremona (*Comptes rendus*, t. LIX, 22 août et 7 novembre 1864).

terminer les nombres cherchés $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, etc. Les autres donneront un moyen de vérifier les résultats obtenus. Nous ferons usage, dans nos exemples, des équations suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} \psi[6p, (ZZ')] = 10\gamma\gamma', \\ \psi[6p, (ZZ')] = 10\alpha\alpha', \\ \psi[p, 4l, P, (ZZ')] = 32\Sigma\alpha\gamma', \\ \varphi[3p, 3P, (ZZ')] = 8\alpha\alpha' + 16\Sigma\alpha\beta' + 32\beta\beta', \\ \chi[3p, 3P, (ZZ')] = 32\beta\beta' + 16\Sigma\beta\gamma' + 8\gamma\gamma', \\ \varphi[2p, l, 3P, (ZZ')] = 16\alpha\alpha' + 32\Sigma\alpha\beta' + 32\beta\beta', \\ \chi[3p, l, 2P, (ZZ')] = 32\beta\beta' + 32\Sigma\beta\gamma' + 16\gamma\gamma'. \end{cases}$$

Le nombre de ces équations étant sept, l'une d'elles est superflue.

Exemples. — 1° Déterminer les nombres $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, etc., qui *correspondent à la condition d'un contact double avec une surface* ρ_m. Nous désignerons cette condition double par $(2\rho_m)$.

On trouve, dans ce cas, en ayant égard aux règles que nous avons données pour la multiplicité des quadriques singulières,

$$\psi[6p, (2\rho_m)] = 10\,\frac{m(m-1)}{2},$$

$$\psi[6P\,(2\rho_m)] = 10\,\frac{m(m-1)^2[m(m-1)^2-1]}{2}.$$

$$\psi[p, 4l, P, (2\rho_m)] = 16.2m.m(m-1)^2,$$

$$\begin{aligned} \varphi[3p, 3P, (2\rho_m)] &= 8\{2m(m-1)[m(m-1)+m(m-1)^2-3]\} \\ &+ \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m^3-m^2+m-12) \\ &= 4m(m-1)(m^4+m^3-m^2-14m+12), \end{aligned}$$

$$\chi[3p,\ 3P,\ (2\rho_m)] = 8.2m(m-1)(m^2-3),$$

$$\varphi[2p,\ l,\ 3P,\ (2\rho_m)]$$
$$= 8\{2m(m-1)[m(m-1)+2m(m-1)^2-5]\}$$
$$+ m(m-1)(m-2)(m^3-m^2+m-12)$$
$$= 8m(m-1)(m^4+m^3-3m^2-12m+14),$$

$$\chi[3p,\ l,\ 2P,\ (2\rho_m)] = 8.2m(m-1)(m^2+m-5).$$

Les quatre dernières expressions se trouvent au moyen des formules (4), dans les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V, p. 255 et 256; les expressions des nombres φ, au moyen des formules (4a), et celles des nombres χ au moyen des formules (4c).

En substituant ces valeurs dans les formules (9), on trouve

$$\alpha\alpha' = \frac{1}{2} m(m-1)^2(m^3-2m^2+m-1),$$

$$\beta\beta' = \frac{1}{2} m(m-1)(m^2-m-1),$$

$$\gamma\gamma' = \frac{1}{2} m(m-1),$$

$$\Sigma\beta\gamma' = \frac{1}{4} m(m-1)(4m-9),$$

$$\Sigma\gamma\alpha' = \frac{1}{4} m^2(m-1)^2,$$

$$\Sigma\alpha\beta' = \frac{1}{4} m(m-1)(4m^3-8m^2-8m+15).$$

2° Déterminer les nombres $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, ... *qui correspondent à la condition d'un contact stationnaire avec une surface* ρ_m, c'est-à-dire à la condition que les courbes d'intersection des quadriques avec ρ_m aient des points de rebroussement. Nous désignerons cette condition par $(\rho_m)^2$.

On trouve, dans ce cas,

$$\psi[6p, (\rho_m)^2] = 0,$$
$$\psi[6P, (\rho_m)^2] = 0,$$
$$\psi[p, 4l, P, (\rho_m)^2] = 0,$$
$$\varphi[3p, 3P, (\rho_m)^2] = 8[3m(m-1) + 4m(m-1)(m-2)]$$
$$= 8m(m-1)(4m-5),$$
$$\chi[3p, 3P, (\rho_m)^2] = 8.3m(m-1),$$
$$\varphi[2p, l, 3P, (\rho_m)^2] = 8.2[3m(m-1) + 4m(m-1)(m-2)]$$
$$= 16m(m-1)(4m-5),$$
$$\chi[3p, l, 2P, (\rho_m)^2] = 8.6m(m-1).$$

Pour la détermination des quatre derniers nombres, nous avons fait usage des formules (11) dans les *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. V, p. 391 et 392.

En substituant ces valeurs dans les formules (9), on trouve

$$\alpha\alpha' = 66' = \gamma\gamma' = \Sigma\alpha\gamma' = 0,$$
$$\Sigma 6\gamma' = \frac{3}{2} m(m-1),$$
$$\Sigma\alpha 6' = \frac{1}{2} m(m-1)(4m-5).$$

Nous ferons une application de ces nombres : le lieu des pôles d'un plan donné, par rapport aux quadriques qui satisfont aux conditions $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_7$, est en général une surface de l'ordre $\frac{1}{2} N(Z_1, \ldots, Z_7, l, P)$; et, si les conditions $Z_1, \ldots, Z_7$ comprennent la condition composée de passer par une conique située sur un plan donné : une surface de l'ordre $\frac{1}{2} N(Z_1, \ldots, Z_7, l, P)$.

Or, si l'on désigne, avec M. Chasles, par Σ la condition de passer par une conique donnée, on trouve, au moyen des caractéristiques de la quatorzième classe de M. Chasles, et d'une manière analogue à celle que nous avons employée pour trouver les coefficients dans les formules (5):

$$\begin{aligned} &N[\Sigma, l, P, (ZZ')] \\ &\quad = 4\alpha\alpha' + 8\beta\beta' + 8\gamma\gamma' + 8\Sigma\beta\gamma' + 8\Sigma\gamma\alpha' + 8\Sigma\alpha\beta'. \end{aligned}$$

Par conséquent, le lieu des pôles d'un plan, par rapport aux quadriques qui passent par une conique donnée, située dans ce plan, et qui ont des contacts stationnaires avec ρ_m, est une surface de l'ordre

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} N[\Sigma, l, P, (\rho_m)^2] &= 3m(m-1) + m(m-1)(4m-5) \\ &= 2m(m-1)(2m-1). \end{aligned}$$

La conditon Σ peut être celle d'être une sphère, et alors le lieu trouvé est celui des centres des sphères qui ont des contacts stationnaires avec ρ_m. Ces *centres sont les centres de courbure des sections principales dans tous les points de* ρ_m. Par conséquent, *la surface des centres de courbure de la surface* ρ_m *est de l'ordre*

$$2m(m-1)(2m-1).$$

Pour $m = 2$, cet ordre est égal à 12 (*).

3° Déterminer les nombres $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$,..., qui correspondent à *la condition d'un contact double avec la courbe* C de l'ordre m, correspondant à une surface développable de la classe n,....

Comme dans un exemple précédent. Nous désignerons

(*) *Voir* SALMON, *Geometry of three dimensions*, p. 157, où se trouve toute l'équation de la surface des centres d'une quadrique.

cette condition double par (2C), alors, on trouve :

$$\psi[6p, (2C)] = 0,$$

$$\psi[6P, (2C)] = 10\,\frac{r(r-1)}{2},$$

$$\psi[p, 4l, P, (2C)] = 0,$$

$$\varphi[3p, 3P, (2C)] = 8[2m(m+r-3)+y],$$

$$\chi[3p, 3P, (2C)] = 8.4\,\frac{m(m-1)}{2},$$

$$\varphi[2p, l, 3P, (2C)] = 8[2m(m+2r-5)+2y],$$

$$\chi[3p, l, 2P, (2C)] = 8.4\,\frac{m(m-1)}{2}.$$

On trouve donc, en réduisant au moyen des formules de la quatrième note (p. 391)

$$\gamma\gamma' = \Sigma\beta\gamma' = \Sigma\alpha\gamma' = 0,$$

$$\alpha\alpha' = \frac{1}{2}\,r(r-1),$$

$$\beta\beta' = \frac{1}{2}\,m(m-1),$$

$$\Sigma\alpha\beta' = mr - \frac{1}{4}(3n+9m).$$

Pour caractériser la condition d'un contact double avec la surface développable qui a C pour arête de rebroussement, on aurait trouvé

$$\alpha\alpha' = \Sigma\alpha\beta' = \Sigma\alpha\gamma' = 0, \quad \gamma\gamma' = \frac{1}{2}\,r(r-1),$$

$$\beta\beta' = \frac{1}{2}\,n(n-1), \quad \Sigma\beta\gamma' = nr - \frac{1}{4}(3m+9n).$$

4° Déterminer les nombres $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$,... qui correspondent à la condition d'un contact du second ordre avec la courbe C. Nous désignerons cette condition par $(C)^2$.

Alors

$$\begin{aligned}
&\psi[6p, (C)^2] = o,\\
&\psi[6P, (C)^2] = o,\\
&\psi[p, 4l, P, (C)^2] = o,\\
&\varphi[3p, 3P, (C)^2] = 8(3m+n),\\
&\chi[3p, 3P, (C)^2] = o,\\
&\varphi[2p, l, 3P, (C)^2] = 8.2(3m+n),\\
&\chi[3p, l, 2P, (C)^2] = o,
\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = \Sigma\beta\gamma' = \Sigma\gamma\alpha' = o, \quad \Sigma\alpha\beta' = \frac{1}{2}(3m+n).$$

Le lieu des centres des sphères qui ont un contact du second ordre avec une courbe gauche C, c'est-à-dire *la surface développable, enveloppe des plans normaux de* C, *est de l'ordre* $3m+n$.

Pour caractériser la condition d'un contact stationnaire avec la surface développable qui a C pour arête de rebroussement, on aurait trouvé

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma' = \Sigma\alpha\gamma' = \Sigma\alpha\beta' = o, \quad \Sigma\beta\gamma' = \frac{1}{2}(3n+m).$$

On peut aussi appliquer la méthode dont nous venons de faire usage à la discussion des systèmes de quadriques qui satisfont à des conditions triples. Le nombre de quadriques qui satisfont à une condition triple (Z, Z', Z'') et aux six conditions $Z_1, \ldots, Z_6$ se détermine par une expression de la forme

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}
&A\alpha\alpha'\alpha'' + B\beta\beta'\beta'' + C\gamma\gamma'\gamma'' + D\Sigma\alpha\alpha'\beta'' + E\Sigma\alpha\alpha'\gamma''\\
&\quad + F\Sigma\alpha\beta'\beta'' + G\Sigma\beta\beta'\gamma'' + H\Sigma\alpha\gamma'\gamma'' + I\Sigma\beta\gamma'\gamma'' + K\Sigma\alpha\beta'\gamma'',
\end{aligned}\right.$$

où A, B, ... dépendent des conditions $Z_1, \ldots, Z_6$, tandis que les nombres $\alpha\alpha'\alpha''$, $\beta\beta'\beta''$, ... dépendent de la condition triple (Z, Z', Z''), et servent à la caractériser. Pour déterminer ces nombres, on peut faire usage des équations suivantes, qu'on trouve d'une manière analogue à celle qui nous a donné les équations (9) :

$$
(11)\left\{\begin{aligned}
&\psi[5p, (ZZ'Z'')] = 30\gamma\gamma'\gamma'' + 10\Sigma\alpha\gamma'\gamma'' + 20\Sigma 6\gamma'\gamma'',\\
&\psi[5P, (ZZ'Z'')] = 30\alpha\alpha'\alpha'' + 20\Sigma\alpha\alpha'6'' + 10\Sigma\alpha\alpha'\gamma'',\\
&\psi[p\ 4l, (ZZ'Z'')] = 32\Sigma\alpha\gamma'\gamma'',\\
&\psi[4l, P, (ZZ'Z'')] = 32\Sigma\alpha\alpha'\gamma'',\\
&\psi[p, P, 3l, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 48\Sigma\alpha\alpha'\gamma'' + 48\Sigma\alpha\gamma'\gamma'' + 32\Sigma\alpha 6'\gamma'',\\
&\psi[3p, l, P, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 60\gamma\gamma'\gamma'' + 20\Sigma\alpha\alpha'\gamma'' + 48\Sigma 66'\gamma'' + 60\Sigma\alpha\gamma'\gamma''\\
&\quad + 72\Sigma 6\gamma'\gamma'' + 40\Sigma\alpha 6'\gamma'',\\
&\psi[p, l, 3P, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 60\alpha\alpha'\alpha'' + 72\Sigma\alpha\alpha'6'' + 60\Sigma\alpha\alpha'\gamma'' + 48\Sigma\alpha 6'6''\\
&\quad + 20\Sigma\alpha\gamma'\gamma'' + 40\Sigma\alpha 6'\gamma'',\\
&\varphi[2p, 3P, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 8\alpha\alpha'\alpha'' + 32\, 66'6'' + 16\Sigma\alpha\alpha'6'' + 32\Sigma\alpha 6'6'',\\
&\chi[3p, 2P, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 32\, 66'6'' + 8\gamma\gamma'\gamma'' + 32\Sigma 66'\gamma'' + 16\Sigma 6\gamma'\gamma'',\\
&\varphi[p, l, 3P, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 16\alpha\alpha'\alpha'' + 16\, 66'6'' + 32\Sigma\alpha\alpha'6'' + 32\Sigma\alpha 6'6'',\\
&\chi[3p, l, P, (ZZ'Z'')]\\
&\quad = 16\, 66'6'' + 16\gamma\gamma'\gamma'' + 32\Sigma 66'\gamma'' + 32\Sigma 6\gamma'\gamma''.
\end{aligned}\right.
$$

Le nombre des inconnues n'étant que dix, l'une de ces onze équations sera superflue. Nous ne ferons application de ces équations qu'à un seul exemple.

Déterminer les nombres $\alpha\alpha'\alpha''$, $66'6''$,... qui correspondent à la *condition d'un contact triple avec une courbe* *gauche donnée* de l'ordre m,.... Nous désignerons cette condition par (3C). Alors

$$\psi[5p, (3C)] = 0,$$

$$\psi[5P, (3C)] = 10y(r-2) + 2.10m\frac{(r-2)(r-3)}{2}$$
$$= 5(r-2)(2mr + r^2 - 7m - r - 3n),$$

$$\psi[p, 4l, (3C)] = 0,$$

$$\psi[4l, P, (3C)] = 0,$$

$$\psi[p, 3l, P, (3C)] = 0,$$

$$\psi[3p, l, P, (3C)] = 0,$$

$$\varphi[2p, 3P, (3C)]$$
$$= 8\frac{1}{3}[2m^3 + 6m^2r - r^3 - 30m^2 - 18mr + 13r^2 + 84m - 42r + (6m + 3r - 26)y]$$
$$= \frac{4}{3}[4m^3 + 12m^2r + 6mr^2 + r^3 - 66m^2 - 45mr - 3r^2 + 194m - 58r - 3n(6m + 3r - 26)],$$

$$\chi[3p, 2P, (3C)] = 8.4\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},$$

$$\varphi[p, l, 3P, (3C)]$$
$$= 8\frac{1}{6}[(m+r)[-(m+r^2) - 7(m+r) + 48] + 4mr[3(m+r) - 13] + 2(h+y)(3m + 3r - 20)\}$$
$$= \frac{8}{3}[m^3 + 6m^2r + 6mr^2 + r^3 - 30m^2 - 39mr - 3r^2 + 134m - 46r - 3n(3m + 3r - 20)],$$

$$\chi[3p, l, P, (3C)] = 8.2\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.$$

Pour déterminer les deux nombres φ, nous avons fait usage des formules (6a) dans les *Nouvelles Annales*, 2^e série, t. V, p. 260. Les réductions, qui ont consisté à remplacer y et h par n, sont faites au moyen des formules de la quatrième note de la page 391. En substituant ces valeurs dans les formules (11), on trouve

$$\gamma\gamma'\gamma'' = \Sigma\alpha\alpha'\gamma'' = \Sigma 66'\gamma'' = \Sigma\alpha\gamma'\gamma'' = \Sigma 6\gamma'\gamma'' = \Sigma\alpha 6'\gamma'' = 0,$$

$$\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{1}{6} r(r^2 - 3r - 20) - 3m - 2n,$$

$$66'6'' = \frac{1}{6} m(m-1)(m-2),$$

$$\Sigma\alpha\alpha'6'' = \frac{1}{4}[2mr^2 - 11mr + 32m - 18r - 3n(r-6)],$$

$$\Sigma\alpha 6'6'' = \frac{1}{4}[2m^2r - 9m^2 - 2mr + 18m - 4r - 3n(m - 2)].$$

Dans ce cas-ci, on n'aura pas une vérification des résultats trouvés en cherchant une expression du nombre $\psi[p, l, 3P, (3C)]$, car cette expression contiendra le nombre inconnu des plans tangents triples de la courbe; mais comme $\alpha\alpha'\alpha''$, $66'6''$,... sont déjà connus, cette expression nous donnera le moyen de déterminer le nombre de ces plans singuliers. En désignant ce nombre par z, on trouve, après réductions :

$$\begin{aligned}\psi[p, l, 3P, (3C)]\\ &= 6z + 3[8m^2r + 12mr^2 + 3r^2 - 36m^2 - 73mr - 9r^2\\ &+ 150m - 38r - 3n(5r + 4m - 22)],\end{aligned}$$

ce qui donne, POUR LE NOMBRE DES PLANS TANGENTS TRIPLES DE LA COURBE C, l'expression

$$z = \frac{1}{6}[r^3 - 3mr - 3r^2 + 42m - 58r - 3n(3r - 26)].$$

Ce résultat est conforme aux formules que donne M. Salmon, *Geometry of three dimensions*, 2e édition, p. 460, et que ce savant géomètre obtient par des procédés très-différents.

Nous avons ainsi un exemple de l'usage qu'on peut faire de la théorie des caractéristiques des quadriques, dans la recherche des singularités des courbes à double courbure ; j'espère en donner plusieurs dans un autre article.