NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. PAGE

Mouvements relatifs à la surface de la terre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 337-352

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__337_0>

MOUVEMENTS RELATIFS A LA SURFACE DE LA TERRE

(voir 2^e série, t. VI, p. 481);

Par M. E. PAGE,
Professeur à l'École d'Artillerie de Vincennes.

Pendule conique (suite).

Prenons pour origine le point de suspension;

Pour axe des x, une horizontale dirigée de l'ouest à l'est;

Pour axe des y, la trace horizontale du plan méridien dirigée du sud au nord;

Enfin, pour axe des z, une verticale dirigée en sens contraire de la pesanteur.

En tenant compte de la force centrifuge composée et représentant par R la résistance du fil, nous aurons les équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt} - 2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt} - \frac{\mathrm{R}x}{l}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} - \frac{\mathrm{R}y}{l}, \tag{2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2\omega\cos\lambda\frac{dx}{dt} - g - \frac{\mathrm{R}z}{l}. \tag{3}$$

Multipliant ces équations respectivement par dx, dy, dz et ajoutant en remarquant qu'on a

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \quad \text{à cause de} \quad x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

il vient

$$\frac{dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z}{dt^2} = -g\,dz;$$

intégrant et représentant par V la vitesse initiale, par z_1

la valeur initiale de z, on a

$$(a)\qquad \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=2g(z_1-z)+V^2.$$

C'est l'équation des forces vives.

Multipliant l'équation (1) par y et l'équation (2) par x, puis retranchant la première de la seconde, on a

$$\frac{x\,d^2y-y\,d^2x}{dt^2}=2\omega\cos\lambda\, y\,\frac{dz}{dt}-2\omega\sin\lambda\,\frac{(x\,dx+y\,dy)}{dt},$$

ou, à cause de $x\,dx+y\,dy=-z\,dz$,

$$(b)\qquad \frac{x\,d^2y-y\,d^2x}{dt^2}=2\omega(\cos\lambda.y+\sin\lambda.z)\frac{dz}{dt}.$$

Soit s la surface engendrée par le rayon ρ tournant autour du point o, nous aurons

$$2\,ds=x\,dy-y\,dx,\quad \text{d'où}\quad 2\,d^2s=y\,d^2x-x\,d^2y,$$

par suite,

$$\frac{d^2s}{dt^2}=\omega(\cos\lambda.y+\sin\lambda.z)\frac{dz}{dt}.$$

Nous avons représenté par θ l'angle d'écart, c'est-à-dire l'angle que le pendule fait avec le prolongement de l'axe des z.

Appelons ψ l'angle que la trace horizontale du plan d'oscillation fait avec l'axe des x, cet angle étant compté comme positif en tournant de droite à gauche. Posons

$$\frac{d\theta}{dt}=-\beta,\quad \frac{d\psi}{dt}=\gamma,$$

nous aurons

$$\rho=l\sin\theta,\quad z=-l\cos\theta,\quad z_1=-l\cos\alpha,$$
$$x=l\sin\theta\cos\psi,\quad y=l\sin\theta\sin\psi,$$

$$\frac{dz}{dt} = -l \sin\theta . \beta,$$

$$\frac{dy}{dt} = -l \cos\theta \sin\psi . \beta + l \cos\psi \sin\theta . \gamma,$$

$$\frac{dx}{dt} = -l \cos\theta \cos\psi . \beta - l \sin\theta \sin\psi . \gamma,$$

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = l^2\beta^2 + l^2 \sin^2\theta . \gamma^2,$$

$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = 2\,\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{l^2 d(\sin^2\theta . \gamma)}{dt};$$

mettant ces valeurs dans les équations (a) et (b), représentant par α, β_1 et c les valeurs initiales de θ, β et γ, il vient

$$\text{(A)} \quad \beta^2 + \sin^2\theta . \gamma^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) + \beta_1^2 + \sin^2\alpha . c^2,$$

$$\text{(B)} \quad \frac{d(\sin^2\theta . \gamma)}{dt} = (\sin\lambda \cos\theta - \cos\lambda \sin\theta \sin\psi)\, 2\omega \sin\theta . \beta.$$

Ces deux équations doivent servir à la discussion du problème.

Dans l'hypothèse de l'immobilité de la terre, nous avons $\omega = 0$. L'équation (B) se réduit à

$$d(\sin^2\theta . \gamma) = 0, \quad \text{d'où} \quad \sin^2\theta . \gamma = \sin^2\alpha . c,$$

$$ds = \frac{l^2 \sin^2\alpha . c}{2}\,dt, \quad s = \frac{l^2 \sin^2\alpha . c\, t}{2};$$

ce qui fait voir que la surface engendrée par le rayon ρ varie proportionnellement au temps.

Dans l'équation (A) remplaçons γ par sa valeur, il vient

$$\text{(A}_1\text{)} \quad \beta^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) + \frac{c^2 \sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\theta - \sin^2\alpha).$$

Différentiant cette équation, on a

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{g}{l}\sin\theta - \frac{c^2 \sin^4\alpha \cos\theta}{\sin^3\theta}.$$

Si à l'origine pour $\theta = \alpha$ on pose $\frac{d\beta}{dt} = 0$, on en tire

$$c = \sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}};$$

la valeur de β étant nulle à l'origine, reste toujours nulle, l'angle d'écart reste constant; par conséquent, le pendule décrit un cône droit avec la vitesse angulaire constante c, et la courbe engendrée par la projection du pendule sur le plan horizontal est une circonférence.

Lorsque c est moindre que cette valeur, l'angle θ reste toujours moindre que l'angle initial α; en effet, la valeur de β peut se mettre sous la forme

$$\beta = \sqrt{(\cos\theta - \cos\alpha)\left(\frac{2g}{l} - \frac{c^2\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}\right)(\cos\theta + \cos\alpha)};$$

toute valeur de θ plus grande que α rendrait cette expression imaginaire.

L'équation (A_1) peut s'écrire

$$\beta^2 = \frac{2g}{l}\left(\sqrt{1-\sin^2\theta} - \sqrt{1-\sin^2\alpha}\right) - \frac{c^2\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta).$$

L'angle α et, par suite, l'angle θ étant très-petits, nous pouvons développer les radicaux et nous borner aux deux premiers termes, il vient

$$\beta = -\frac{d\theta}{dt} = \pm\frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\theta}}{\sin\theta}\sqrt{\frac{g}{l}\sin^2\theta - c^2\sin^2\alpha}.$$

Nous avons déjà

$$\gamma = \frac{d\psi}{dt} = \frac{c\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}.$$

Divisant membre à membre pour éliminer dt, on a

$$d\psi = \frac{c \sin^2\alpha \, d\theta}{\sin\theta \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\theta} \sqrt{\frac{g}{l}\sin^2\theta - c^2\sin^2\alpha}}.$$

Concevons un système mobile tournant autour de la verticale oz, avec une vitesse variable représentée par γ_2. Appelons γ_1 la vitesse angulaire relative avec laquelle le plan d'oscillation tourne par rapport à ce système mobile, nous aurons

$$\gamma_1 = \gamma - \gamma_2;$$

posons $\gamma_2 = \gamma(1 - \cos\theta)$, nous aurons $\gamma_1 = \gamma\cos\theta$.

En représentant par ψ_1 l'angle compris entre le plan d'oscillation et le plan mobile animé de la vitesse angulaire γ_2, nous aurons

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \gamma_1 = \gamma\cos\theta = \frac{c\sin^2\alpha\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

d'où

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \frac{c\sin^2\alpha\cos\theta\, d\theta}{\sin\theta\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\theta}\sqrt{\frac{g}{l}\sin^2\theta - c^2\sin^2\alpha}}.$$

Cette expression peut s'intégrer. En déterminant la constante par la condition qu'on ait $\psi_1 = 0$ pour $\theta = \alpha$, on en tire l'équation

$$\left(\sin^2\psi_1 + \frac{c^2 l}{g}\cos^2\psi_1\right)\sin^2\theta = \sin^2\alpha . c^2\frac{l}{g}.$$

Représentons par x_1 et y_1 les coordonnées de la courbe décrite par la projection du pendule sur le plan horizontal tournant autour du point avec la vitesse angulaire γ_2, nous aurons

$$x_1 = l\sin\theta\cos\psi_1 \quad \text{et} \quad y_1 = l\sin\theta\sin\psi_1,$$

d'où

$$y_1^2 + c^2 \frac{l}{g} x_1^2 = l^2 \sin^2\alpha . c^2 \frac{l}{g}.$$

C'est l'équation d'une ellipse dont le demi-grand axe

$$a_1 = l \sin\alpha,$$

et dont le demi-petit axe

$$b_1 = l \sin\alpha . c \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

On voit donc que la projection horizontale du pendule décrit une ellipse, tandis que cette ellipse elle-même tourne autour de son centre avec la vitesse angulaire

$$\gamma_2 = \gamma\,(1 - \cos\theta).$$

L'angle θ restant toujours très-petit, le facteur $(1 - \cos\theta)$ reste aussi très-petit; il s'ensuit que pendant une oscillation, ou pendant un petit nombre d'oscillations, on peut faire abstraction du déplacement de l'ellipse.

En tenant compte du mouvement de la terre, l'équation (B) peut se mettre sous cette forme :

$$d\,(\sin^2\theta . \gamma) = -(\sin\lambda \cos\theta - \cos\lambda \sin\psi \sin\theta)\ 2\omega \sin\theta\, d\theta;$$

nous ne pouvons pas intégrer le dernier terme, parce que nous ne connaissons pas l'expression de $\sin\psi$ en fonction de θ.

Mais si nous supposons $\cos\lambda$ moindre que $\sin\lambda$, si à l'origine, pour $\theta = \alpha$, nous faisons $\sin\psi = 0$, c'est-à-dire si nous prenons l'écart initial perpendiculaire au plan méridien, l'intégrale de ce dernier terme sera négligeable.

En effet, la valeur absolue de $\sin\psi$ augmente pendant le mouvement et peut devenir égale à $+1$ ou à -1; mais $\sin\theta$ diminue à mesure que $\sin\psi$ augmente; de sorte que le produit $\sin\psi \sin\theta$ reste toujours très-petit relativement à $\cos\theta$; en outre, si les deux facteurs $\sin\psi$ et $d\theta$ sont de même signe pendant la première moitié de l'oscillation, ce qui a lieu quand l'écart est du côté de l'est, ils sont nécessairement de signes contraires pendant la seconde moitié, et réciproquement; par conséquent, la valeur absolue de l'intégrale commence par croître jusqu'à une certaine limite qui s'écarte à peine de zéro, puis décroît ensuite à très-peu près de la même quantité.

Nous en concluons que, pour une latitude moyenne telle que celle de Paris, ou pour une latitude plus élevée, et en prenant l'écart initial perpendiculaire au plan méridien, nous aurons une solution très-approchée en faisant le dernier terme nul. L'équation (B) se réduit à

$$d(\sin^2\theta \,.\, \gamma) = -2\omega \sin\lambda \sin\theta \cos\theta \, d\theta.$$

En intégrant et faisant $\gamma = 0$ pour $\theta = \alpha$, c'est-à-dire en supposant le pendule abandonné à l'action de la pesanteur et de la force centrifuge composée sans aucune vitesse initiale relative, il vient

$$\gamma = \omega \sin\lambda \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta} - \omega \sin\lambda.$$

Mettant cette valeur de γ dans l'équation (A), et remarquant qu'à l'origine on a $\beta_1 = 0$ et $c = 0$, elle devient

$$\beta^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha)$$
$$+ \omega^2 \sin^2\lambda \left[(\sin^2\alpha - \sin^2\theta) - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta)\right];$$

les deux termes

$$(\sin^2\alpha - \sin^2\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta)$$

sont nuls en même temps pour $\theta = \alpha$, puis ils vont en croissant à mesure que $\sin\theta$ diminue; mais ils croissent très-inégalement, car le premier a pour limite $\sin^2\alpha$, quantité excessivement petite, tandis que le second a pour limite l'infini. Il en résulte que, sans altérer sensiblement la valeur de β, on peut négliger le premier terme en présence du second, l'équation se réduit à

$$(A_1)\quad \beta^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) - \omega^2\sin^2\lambda\,\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta).$$

Si nous imaginons un système mobile tournant autour de la verticale avec la vitesse angulaire $-\omega\sin\lambda$, c'est-à-dire avec une vitesse égale et contraire à la composante de la vitesse angulaire de la terre autour de la verticale; si nous représentons par γ_1 la vitesse angulaire relative avec laquelle le plan d'oscillation tourne autour de la verticale par rapport à ce système mobile, nous aurons

$$\gamma_1 = \gamma + \omega\sin\lambda,\quad \text{d'où}\quad \gamma_1 = \omega\sin\lambda\,\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}.$$

Cette dernière équation et l'équation (A_1) sont justement celles auxquelles nous sommes parvenus en supposant la terre immobile et donnant au pendule la vitesse angulaire initiale

$$c = +\omega\sin\lambda.$$

Nous en tirons cette conclusion : sous une latitude moyenne ou une latitude élevée, et quand l'écart initial est perpendiculaire au plan méridien, nous pouvons nous représenter très-exactement le mouvement du pendule conique en concevant un système mobile tournant autour de la verticale avec la vitesse angulaire $-\omega\sin\lambda$, et supposant que, par rapport à ce système, le mouvement soit le même que si, la terre étant immobile, on imprimait au pendule la vitesse angulaire initiale $+\omega\sin\lambda$.

Quel que soit l'azimut de l'écart initial, cette solution est d'autant plus approchée que la latitude est plus élevée. Au pôle elle est rigoureusement exacte comme on peut s'en convaincre *à priori*. Il semble d'après cela qu'en faisant $\sin\lambda = 1$, $\cos\lambda = 0$ dans les équations (A) et (B) on devrait en déduire immédiatement l'équation (A_1) sans qu'il soit nécessaire de négliger aucun terme. Afin de ne laisser subsister aucun nuage sur cette question, nous allons résoudre le problème directement en nous supposant placés au pôle.

Nous commencerons par rappeler une observation que nous avons faite précédemment : les équations différentielles sont établies dans l'hypothèse d'une assez grande distance à l'axe de la terre, pour que les variations de la perpendiculaire abaissée du pendule sur cet axe soient complétement négligeables. Cette hypothèse ne peut être admise quand le point de suspension est situé sur l'axe même ; dans ce cas, la valeur de g dépend uniquement de la force d'attraction et ne contient pas la composante de la force centrifuge résultant de la rotation de la terre ; il faut donc tenir compte de cette force centrifuge ; alors, les équations différentielles rigoureuses sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega\frac{dy}{dt} - \frac{Rx}{l} + x\omega^2,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\frac{dx}{dt} - \frac{Ry}{l} + y\omega^2,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{Rz}{l}.$$

En représentant par x_1, y_1, z_1 les valeurs initiales des coordonnées, et supposant le pendule abandonné à l'action de la pesanteur et de la force centrifuge composée sans aucune vitesse initiale relative, on a

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 2g(z_1 - z) + \omega^2(x^2 + y^2 - x_1^2 - y_1^2),$$

l'équation (A) devient

$$\beta^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) - \sin^2\theta.\gamma^2 - \omega^2(\sin^2\alpha - \sin^2\theta).$$

Remplaçant γ par sa valeur

$$\gamma = \omega\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta),$$

on obtient immédiatement l'équation

$$(A_1)\quad \beta^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha) - \omega^2\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta).$$

Sous l'équateur, il faut faire $\sin\lambda = 0$, $\cos\lambda = 1$; les équations différentielles deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dz}{dt} - \frac{Rx}{l},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ry}{l},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 2\omega\frac{dx}{dt} - g - \frac{Rz}{l}.$$

L'équation (B) se réduit à

$$d(\sin^2\theta.\gamma) = 2\omega\sin\psi\sin^2\theta d\theta.$$

La force centrifuge composée est toujours parallèle au plan de l'équateur, perpendiculaire à la composante de la vitesse parallèle à ce plan et dirigée de gauche à droite pour un observateur placé suivant l'axe des y et regardant dans le sens de la vitesse composante perpendiculaire à cet axe. Il est facile d'en conclure que quand le pendule se meut dans le plan de l'équateur, la force centrifuge composée est dirigée suivant le fil de suspension, et tend à augmenter la tension de ce fil quand le mouvement a lieu de l'est à l'ouest, et à la diminuer quand le mouvement a lieu de l'ouest à l'est.

Dans tous les cas, que le pendule se meuve ou non dans le plan de l'équateur, la vitesse verticale $\frac{dz}{dt}$ est négative quand il descend, et positive quand il remonte; par conséquent, la composante de la force centrifuge suivant l'axe des x, $-2\omega\frac{dz}{dt}$, est positive et le pousse vers l'est dans le premier cas; dans le second cas, elle est négative et le pousse vers l'ouest.

Nous ne pouvons pas intégrer le produit

$$\sin\psi \sin^2\theta\, d\theta,$$

parce que nous ne connaissons pas l'expression de $\sin\psi$ en fonction de θ. Par suite, nous ne pouvons pas discuter le problème d'une manière générale. Nous nous bornerons à étudier les cas particuliers correspondant aux positions extrêmes de l'écart initial.

Cet écart étant dirigé dans le plan méridien du côté du sud, nous avons à l'origine $\sin\psi = -1$. L'angle θ allant en diminuant, la différentielle $d\theta$ est négative; donc le produit $\sin\psi \sin^2\theta\, d\theta$ est positif. La vitesse angulaire γ va en croissant positivement. Le plan d'oscillation tourne de droite à gauche.

L'angle θ diminue depuis α jusqu'à une certaine limite inférieure. Pendant le même temps l'angle ψ varie d'environ 90 degrés; de sorte que $\sin\psi = 0$ correspond à très-peu près à la limite inférieure de θ. Il en résulte que l'intégrale prise depuis $\theta = \alpha$ jusqu'à la limite inférieure de θ est positive. La valeur absolue de cette intégrale est évidemment moindre que

$$\int_0^\alpha \sin^2\theta\, d\theta = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4}.$$

L'angle θ va en croissant depuis la limite inférieure jusqu'à une certaine limite supérieure α' toujours moindre que α. La différentielle $d\theta$ devient positive; mais l'angle ψ continuant à croître, $\sin\psi$ devient positif, les deux facteurs $d\theta$ et $\sin\psi$ changent de signes à très-peu près en même temps; donc leur produit reste encore positif pendant la seconde moitié de l'oscillation. L'intégrale prise depuis la limite inférieure jusqu'à la limite supérieure est encore positive et moindre que la valeur indiquée plus haut.

La somme de ces deux intégrales forme l'intégrale totale prise entre les deux limites de l'oscillation; donc cette intégrale est positive et moindre que

$$\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2}.$$

Nous en conclurons que la valeur de $\sin^2\theta.\gamma^2$ reste positive pendant toute la première oscillation. A la fin de cette oscillation, pour $\beta = 0$, la vitesse angulaire γ n'est pas nulle, mais conserve une valeur positive.

Il s'ensuit :

1° Que la seconde oscillation ne peut pas être indépendante de la première;

2° Que le pendule ne s'élève pas à une hauteur égale à celle d'où il est parti; car l'équation (A) fait voir que tant que l'on n'a pas $\gamma = 0$ pour $\beta = 0$, on ne peut pas avoir $\theta = \alpha$.

De ce que le pendule ne s'élève pas tout à fait à la hauteur d'où il est descendu, il ne faut pas conclure que la durée de la seconde moitié de l'oscillation soit moindre que celle de la première. D'après l'équation (A), pour une même valeur de l'angle d'écart θ, la vitesse angulaire γ diminue quand le terme $\sin^2\theta.\gamma^2$ augmente; or, pour la même valeur de θ, la vitesse angulaire γ est plus grande pendant la seconde moitié que pendant la première. Par conséquent, si d'une part le pendule décrit un peu moins de chemin, de l'autre il va un peu moins vite. Ces deux causes influent en sens contraires sur la durée de la demi-oscillation. L'effet produit par chacune d'elles séparément est assez petit pour être négligé; donc à plus forte raison l'ensemble de ces deux effets contraires doit être complétement négligé, et nous pouvons admettre que les deux demi-oscillations ont la même durée.

Il nous reste à faire voir que, pendant l'oscillation totale, l'angle ψ varie d'un peu plus que deux angles droits; c'est-à-dire que le pendule, après s'être écarté vers l'est pendant la première partie de l'oscillation, revient vers l'ouest pendant la seconde partie et dépasse le plan méridien avant d'atteindre le point le plus élevé.

Prenons l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dz}{dt} - \frac{Rx}{l}.$$

Quand le pendule descend, les deux composantes qui agissent suivant l'axe des x sont de signes contraires; la première, qui est positive et pousse vers l'est, commence par l'emporter sur la seconde; mais la seconde finit par l'emporter sur la première.

Quand le pendule remonte, tant que la valeur de x est positive, c'est-à-dire tant que l'écart est du côté de l'est, les deux composantes sont négatives et poussent vers l'ouest. En outre, la valeur de R est plus grande pendant que le pendule marche de l'est à l'ouest que pendant qu'il marche de l'ouest à l'est. Il est facile d'en conclure que le chemin parcouru vers l'est pendant la première partie de l'oscillation est moindre que le chemin parcouru vers l'ouest pendant la seconde partie.

Pendant la seconde oscillation, les deux facteurs $\sin\psi$ et $d\theta$ sont de signes contraires; par conséquent, le couple dont le moment est $2\omega\sin\psi\sin^2\theta\,d\theta$ tend à imprimer au plan d'oscillation un mouvement de rotation de gauche à droite et détruit en partie la vitesse angulaire positive acquise pendant la première oscillation. Le pendule passe très-près de la verticale et s'écarte vers l'est à la fin de l'oscillation. La courbe décrite par la projection horizontale présente une très-légère convexité vers l'ouest.

En supposant l'écart initial dirigé dans le plan méridien du côté du nord, la discussion est exactement la même, et le mouvement est parfaitement symétrique par rapport au plan de l'équateur.

Sous une latitude et pour un azîmut quelconques, il faudrait discuter l'équation générale

$$d(\sin^2\theta.\gamma) = -2\omega\sin\lambda\cos\theta\sin\theta\,\gamma.\dot{\theta} + 2\omega\cos\lambda\sin\psi\sin^2\theta\,d\theta.$$

Représentons par χ l'intégrale du produit $\sin\psi\sin^2\theta\,d\theta$. Cette intégrale doit être prise avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant la valeur initiale de $\sin\psi$. Nous aurons

$$\gamma = \frac{\omega\sin\lambda}{\sin^2\theta}(\sin^2\alpha - \sin^2\theta) \pm \frac{2\omega\cos\lambda}{\sin^2\theta}\chi.$$

Nous savons que la valeur absolue de l'intégrale χ prise entre deux limites d'une oscillation est moindre que

$$\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{2};$$

tant que $\sin\psi$ conserve le même signe, la valeur absolue de l'intégrale χ va en croissant avec l'angle θ. Quand cette intégrale a le signe $-$, il doit arriver un instant où γ devient nul avant la fin de l'oscillation; car si l'on avait $\beta = 0$ en même temps que $\gamma = 0$, on aurait forcément $\theta = \alpha$.

L'angle θ continue donc à croître, la valeur absolue de l'intégrale χ continue à croître aussi, tandis que la différence $\sin^2\alpha - \sin^2\theta$ continue à décroître jusqu'à la fin de l'oscillation, sans cependant devenir complétement nulle. Il s'ensuit qu'à la fin de l'oscillation la vitesse angulaire γ doit être négative; par suite, la courbe décrite par la projection horizontale du pendule doit former une boucle comme nous l'avons indiqué.

En appelant γ_1 la vitesse angulaire relative du plan d'oscillation par rapport au système mobile tournant autour de la verticale avec la vitesse angulaire constante $-\omega\sin\lambda$, on a

$$\gamma_1 = \frac{\omega \sin\lambda \sin^2\alpha}{\sin^2\theta} \pm \frac{2\omega\cos\lambda}{\sin^2\theta}\chi.$$

Quand la valeur de χ est nulle, le plan d'oscillation décrit deux angles droits par rapport au système mobile pendant une oscillation; par suite, la rétrogradation des points culminants s'effectue avec la vitesse angulaire $-\omega\sin\lambda$.

Quand l'intégrale χ doit être prise avec le signe $+$, le plan d'oscillation décrit un peu plus de deux angles droits par rapport au système mobile pendant une oscillation; par conséquent la rétrogradation est un peu diminuée.

Si, au contraire, χ doit être prise avec le signe $-$, le plan d'oscillation décrit un peu moins de deux angles droits, et la rétrogradation se trouve un peu augmentée.

Nous voyons donc que la vitesse angulaire avec laquelle s'effectue la rétrogradation des points culminants n'est pas la même dans tous les azimuts. Comme la différence est très-faible, elle ne peut être constatée qu'au moyen d'observations très-précises faites sur un assez grand nombre d'oscillations. Cette différence a été signalée par M. le Général Dufour (séance de l'Académie du

7 juillet 1851) et par M. Morren (séance du 21 juillet).

Suivant que l'écart initial est dirigé dans le plan méridien, vers le sud ou vers le nord, l'intégrale χ doit être prise avec le signe $+$ ou avec le signe $-$. Dans le premier cas, la vitesse angulaire avec laquelle s'effectue la rétrogradation des points culminants est un peu diminuée; dans le second cas, elle est un peu augmentée.