NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P.-A.-G. COLOMBIER

Mémoire sur les symptômes d'imaginarité des racines des équations algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 308-318

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__308_1>

MÉMOIRE

Sur les symptômes d'imaginarité des racines des équations algébriques ;

PAR M. P.-A-G. COLOMBIER,
Licencié ès Sciences, Professeur à Paris.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORÈME I. — *Soient :* $f(x) = 0$ *une équation algébrique rationnelle et entière ;* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_q$ *des nom-*

bres positifs; $2k_1$ *le nombre des variations perdues, lorsqu'on passe de* $f(x)$ *au produit* $(x+a_1)f(x)$; $2k_2$ *le nombre analogue lorsqu'on passe de* $(x+a_1)f(x)$ *à* $(x+a_1)(x+a_2)f(x)$;.... *Cela posé, je dis que l'équation donnée a au moins* $2(k_1+k_2+\ldots+k_q)$ *racines imaginaires (ce nombre peut être nul).*

Démonstration. — L'équation donnée est du degré m. Les nombres des racines positives, négatives et imaginaires sont respectivement p, n et i. Les nombres des variations de l'équation donnée et de la transformée en $-x$ sont respectivement ν et ν'. Enfin, désignons par $\varphi(x)$ le produit des q facteurs binômes

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_q),$$

et par V le nombre des variations du produit $\varphi(x)f(x)$. Cela étant, on a

$$i = m - (p+n). \tag{1}$$

Les deux polynômes $f(x)$ et $\varphi(x)f(x)$ ont le même nombre de racines positives. Cette remarque et quelques théorèmes connus donnent

$$p = \text{ ou } < \mathrm{V},$$
$$n = \text{ ou } < \nu',$$
$$\nu+\nu' = \text{ ou } < m,$$
$$\mathrm{V} = \nu - 2(k_1+k_2+\ldots+k_q).$$

Ajoutons ces relations membre à membre, puis en ayant égard à (1), on trouve que

$$i = \text{ ou } > 2(k_1+k_2+\ldots+k_q).$$

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Soient :* $f(x)=0$ *une équation algébrique rationnelle et entière;* $a_1, a_2, \ldots, a_q$ *des nom-*

bres positifs; $2k_1+1$ *le nombre des variations gagnées lorsqu'on passe de* $f(x)$ *à* $(x-a_1)f(x)$; $2k_2+1$ *le nombre analogue lorsqu'on passe de* $(x-a_1)f(x)$ *à* $(x-a_1)(x-a_2)f(x)$;.... *Cela posé, l'équation donnée a au moins* $2(k_1+k_2+\ldots+k_q)$ *racines imaginaires (ce nombre peut être nul).*

Démonstration. — Soient : $\psi(x)$ le produit des q facteurs binômes

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_q);$$

V_1 et V_2 les nombres des variations des produits

$$\psi(x)f(x),\quad \psi(-x)f(-x).$$

Si l'on remarque que

$$f(x) \quad \text{et} \quad \psi(x)f(x)$$

ont le même nombre de racines négatives, et si l'on a égard à certaines propositions connues, on pourra écrire

$$\begin{gathered} n = \text{ ou } < V_2, \\ p = \text{ ou } < v, \\ V_1 + V_2 = \text{ ou } < m + q, \\ v + 2(k_1 + k_2 + \ldots + k_q) + q = V_1. \end{gathered}$$

Ajoutant ces relations membre à membre, et comparant ensuite le résultat trouvé à (1), il vient

$$i = \text{ ou } > 2(k_1 + k_2 + \ldots + k_q).$$

C. Q. F. D.

Corollaire. — Si dans ce dernier théorème on fait $q = 1$, on trouve que

$$i = \text{ ou } > 2k_1.$$

Cette relation traduite en langage ordinaire donne lieu à un théorème découvert par M. Sturm, et dont M. Terquem a donné une autre démonstration dans les *Nouvelles Annales*, t. V, p. 115.

Scolies. — 1° Les nombres k_1, $k_2, \ldots, k_q$ ne sont pas généralement les mêmes pour les deux théorèmes précédents. De plus, pour l'un quelconque de ces théorèmes, ces nombres peuvent avoir des valeurs différentes; par conséquent, dans la pratique, il faudra prendre pour k_1, $k_2, \ldots, k_q$ les plus grandes valeurs qu'on pourra leur attribuer.

2° Si les valeurs trouvées pour $k_1, k_2, \ldots, k_q$ satisfont à la relation

$$2(k_1 + k_2 + \ldots + k_q) = m,$$

l'équation donnée n'aura que des racines imaginaires.

3° Enfin, si par l'un des théorèmes précédents, on a reconnu que l'équation donnée a au moins μ racines imaginaires; et si par d'autres considérations on sait que cette équation a $m - \mu$ racines réelles, l'équation donnée n'aura que μ racines imaginaires.

Corollaire. — La deuxième de ces remarques peut servir à démontrer très-simplement les propositions suivantes, dont nous supprimons les démonstrations, comptant en cela sur l'intelligence du lecteur.

Une équation algébrique complète, de degré m, n'ayant que des permanences, ou n'ayant que des variations,

$$f(x) = 0,$$

a *toutes* ses racines imaginaires :

1° Si le carré d'un coefficient quelconque est égal au produit des valeurs absolues des coefficients du terme précédent et du terme suivant;

2° Si l'on peut trouver un nombre positif a, tel que l'équation

$$(x \mp a) f(x) = 0$$

n'ait respectivement que des variations, ou que des permanences;

3° Si la valeur absolue du coefficient d'un terme quelconque de rang pair est moindre que la valeur absolue de chacun des coefficients des deux termes qui le comprennent immédiatement.

Application. — On trouve dans le Mémoire de M. Le Verrier, sur la planète Uranus (*Connaissance des temps*, 1849; Additions, p. 174), l'équation du quatrième degré

$$5797 x^4 + 4951 x^3 + 5892 x^2 + 2876 x + 6942 = 0.$$

La seule inspection de cette équation montre que ses coefficients satisfont à l'hypothèse du 3° du corollaire précédent; donc cette équation a *toutes* ses racines imaginaires.

M. Le Verrier a démontré l'imaginarité des racines de cette équation, en faisant usage du célèbre théorème de M. Sturm sur le nombre de racines réelles d'une équation algébrique comprises entre deux nombres donnés. M. E. Prouhet a suivi une voie plus simple que celle prise par M. Le Verrier. Enfin, M. Koralek a calculé les racines de cette équation (*voir* les *Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 36).

THÉORÈME III. — *Soit*

$$A_0 x^{2m} + A_1 x^{2m-1} + A_2 x^{2m-2} + \ldots + A_{2m-1} x + A_{2m} = 0$$

une équation algébrique de degré pair complète, et n'ayant que des permanences. Si le plus petit coefficient des termes de rang impair A_i *est égal ou supérieur au plus grand coefficient des termes de rang pair* A_p, *cette équation a toutes ses racines imaginaires.*

Démonstration. — De ce que l'équation donnée n'a que des permanences, il s'ensuit qu'elle n'a pas de racines positives. Il reste à faire voir que la transformée en $-x$, savoir

$$A_0 x^{2m} - A_1 x^{2m-1} + A_2 x^{2m-2} - \ldots - A_{2m-1} x + A_{2m} = 0$$

n'a pas non plus de racines positives, ou, plus généralement, qu'elle n'a pas de racines réelles. En effet, d'après le 1° du corollaire précédent, on a, quelle que soit la valeur réelle, positive ou négative, attribuée à x,

$$x^{2m} - x^{2m-1} + x^{2m-2} - \ldots - x + 1 > 0$$

ou

$$(x^{2m} + x^{2m-2} + \ldots + 1) - (x^{2m-1} + x^{2m-3} + \ldots + x) > 0,$$

et, à cause de l'hypothèse

$$A_i = \text{ ou } > A_p,$$

il s'ensuit que

$$A_i(x^{2m} + x^{2m-2} + \ldots + 1) - A_p(x^{2m-1} + \ldots + x) > 0$$

et *à fortiori*

$$(A_0 x^{2m} + A_2 x^{2m-2} + \ldots + A_{2m}) - (A_1 x^{2m-1} + \ldots A_{2m-1} x) > 0,$$

ou en ordonnant par rapport à x, on a

$$A_0 x^{2m} - A_1 x^{2m-1} + \ldots - A_{2m-1} x + A x_{2m} > 0,$$

quelle que soit la valeur réelle, positive ou négative, attribuée à x; donc il est vrai de dire que l'équation donnée a *toutes* ses racines imaginaires. C. Q. F. D.

Observation. — La démonstration précédente montre que le théorème III subsiste : si l'on change les permanences en variations; si l'équation donnée est incomplète, et si cette circonstance ne tient qu'à l'absence de termes de rang pair.

Application à l'équation du quatrième degré de M. Le Verrier. — La seule inspection de cette équation montre que l'on a

$$A_i = 5797 \quad \text{et} \quad A_p = 4951.$$

Si l'on compare ces deux nombres, on voit que

$$A_i > A_p,$$

donc cette équation du quatrième degré a *toutes* ses racines imaginaires.

THÉORÈME IV. — *Désignons par*

$$f(x) = 0$$

une équation algébrique d'un degré quelconque m, et par

$$\Sigma_{4p}, \quad \Sigma_{4p+1}, \quad \Sigma_{4p+2}, \quad \Sigma_{4p+3}$$

les sommes algébriques des coefficients des termes de $f(x)$ dont les nombres des termes qui les précèdent sont donnés respectivement par les quatre types

$$4p, \quad 4p+1, \quad 4p+2, \quad 4p+3.$$

Cela étant, si l'équation donnée n'a que des racines réelles, on aura

$$(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2})^2 + (\Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3})^2 > A_0^2 + A_m^2,$$

A_0 *et* A_m *sont les coefficients des deux termes extrêmes dans* $f(x)$.

Démonstration. — Quel que soit le degré de parité de l'équation donnée, l'équation aux carrés des racines aura toutes ses racines positives; elle sera complète, et elle n'aura que des variations de signes. Supposons que l'on ait formé un tableau contenant l'expression analytique de toutes ces conditions. On peut toujours s'arranger de manière que toutes les inégalités qui forment ce tableau soient de la forme $M > 0$. Cela fait, si l'on ajoute ces inégalités membre à membre, et si l'on groupe les termes convenablement, on trouve alors la relation qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — Si une équation algébrique de degré m est telle que ses coefficients donnent

$$(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2})^2 + (\Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3})^2 = \text{ ou } < A_0^2 + A_m^2,$$

cette équation a nécessairement des racines imaginaires.

Observation. — Si la relation exprimée par le théorème IV est satisfaite par les coefficients d'une équation, il ne s'ensuit pas, nécessairement, que toutes les racines de cette équation soient réelles. C'est ce que montre l'exemple suivant

$$x^5 - 4x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 5x - 4 = 0,$$

que nous avons extrait de l'*Arithmétique universelle* de Newton, t. II, p. 12.

Le théorème précédent comporte plusieurs cas particuliers. Nous ne parlerons que de quelques-uns :

Premier cas. — Supposons que l'équation donnée ait toutes ses racines réelles, qu'elle soit réciproque et de degré pair.

1° Si le terme indépendant est positif. On sait que les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux et de même signe.

Dans le cas actuel, le terme du milieu existe nécessairement, afin qu'il n'y ait pas dans l'équation donnée une lacune, commençant et finissant par le même signe, ce qui est un symptôme connu de racines imaginaires.

On trouve aisément que

$$\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2} = 0;$$

par suite, la formule du théorème précédent devient

$$\pm(\Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3}) > A_0\sqrt{2},$$

A_0 représentant toujours un nombre positif, on prendra du double signe $\pm$ celui qui rendra le premier membre positif. Cette observation devant se présenter plusieurs fois dans ce qui va suivre, nous prévenons que nous la faisons ici, une fois pour toutes.

Exemple :

$$24x^6 - 242x^5 + 867x^4 - 1334x^3 + 867x^2 - 242x + 24 = 0.$$

2° Si le terme indépendant est négatif. On sait que le terme du milieu doit manquer, et que les coefficients des termes équidistants des termes extrêmes doivent être égaux et de signe contraire. On trouve que

$$\Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3} = 0;$$

par suite, la formule du théorème ci-dessus devient

$$\pm(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2}) > A_0\sqrt{2}.$$

Exemple :

$$6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0.$$

Deuxième cas. — L'équation donnée a toutes ses racines réelles, elle est réciproque et de degré impair.

1° Si les coefficients des termes équidistants des termes extrêmes sont égaux et de même signe. On trouve que

$$\Sigma_{4p} = \Sigma_{4p+1}$$

et

$$\Sigma_{4p+2} = \Sigma_{4p+3};$$

d'où l'on déduit que

$$\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2} = \Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3};$$

par suite, la formule du théorème précédent donne

$$\pm(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2}) > A_0.$$

Exemple :

$$6x^5 - 29x^4 + 27x^3 + 27x^2 - 29x + 6 = 0.$$

2° Si les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux et de signe contraire. On trouve que

$$\Sigma_{4p} = -\Sigma_{4p+1}$$

et

$$\Sigma_{4p+2} = -\Sigma_{4p+3};$$

d'où

$$\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2} = (\Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3});$$

par suite, la formule du théorème précédent donne encore

$$\pm(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2}) > A_0.$$

Exemple :

$$6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0.$$

Corollaire I. — Si l'équation donnée est réciproque et de degré pair.

1° Si le terme indépendant est positif, et si entre les coefficients de l'équation donnée on a

$$\pm(\Sigma_{4p+1} - \Sigma_{4p+3}) = \text{ ou } < A_0\sqrt{2},$$

l'équation donnée a des racines imaginaires.

2° Si le terme indépendant est négatif, et si les coefficients de l'équation considérée donnent

$$\pm(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2}) = \text{ ou } < A_0\sqrt{2},$$

l'équation a des racines imaginaires.

Corollaire II. — Si l'équation donnée est réciproque et de degré impair, si de plus entre les coefficients on trouve la relation

$$\pm(\Sigma_{4p} - \Sigma_{4p+2}) = \text{ ou } < A_0,$$

l'équation donnée a nécessairement des racines imaginaires.

Observation. — Si l'on considérait les équations réciproques inverses, on ne trouverait aucun résultat remarquable.

(*La suite prochainement.*)