NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FÉDOR THOMAN

Sur la méthode de Huyghens pour calculer les logarithmes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 304-308

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__304_1>

SUR LA MÉTHODE DE HUYGHENS POUR CALCULER LES LOGARITHMES;

PAR M. FÉDOR THOMAN.

Soit N le nombre dont on cherche le logarithme et soit

$$\sqrt[n]{N} = f \quad \text{et} \quad \sqrt{f} = g = 1 + \omega,$$

on aura

$$N = (1+\omega)^{2n} \quad \text{et} \quad \log N = 2n\omega\left(1 - \frac{\omega}{2} + \frac{\omega^2}{3} - \frac{\omega^3}{4} + \ldots\right);$$

mais $f = (1+\omega)^2$, donc

$$\left(1-\frac{1}{f}\right) = 2\omega\,\frac{1+\frac{\omega}{2}}{(1+\omega)^2} \quad \text{et} \quad 2\omega = \left(1-\frac{1}{f}\right)\frac{(1+\omega)^2}{1+\frac{\omega}{2}}.$$

En substituant cette valeur de (2ω) dans la formule de $\log N$, on obtient

$$\log N = n\left(1-\frac{1}{f}\right)\left(1+\omega-\frac{\omega^2}{6}+\frac{\omega^4}{30}\right.$$
$$\left.-\frac{\omega^5}{30}+\frac{11\,\omega^6}{420}-\frac{2\,\omega^7}{105}+\ldots\right).$$

Cela posé, Huyghens cherche une *expression algébrique* fractionnaire qui, par son développement en série, donne les cinq premiers termes de la série en parenthèse. De plus, comme il y a une infinité de solutions possibles, Huyghens choisit une expression du second degré par rapport à ω, ou du premier degré par rapport à f et g, telle que

$$\frac{\alpha\,(1+\omega)^2}{1+\omega+\beta\omega^2}+\gamma\,(1+\omega+\delta\omega^2)$$
$$= 1+\omega-\frac{\omega^2}{6}+\frac{\omega^4}{30}-\frac{\omega^5}{30}\pm\ldots,$$

d'où

$$\alpha = \frac{17}{20},\quad \beta = \frac{3}{10},\quad \gamma = \frac{10}{27},\quad \delta = -1,$$

et

$$\frac{10}{27}\,\frac{(1+\omega)^2}{1+\omega+\frac{3\omega^2}{10}}+\frac{17}{27}\,(1+\omega-\omega^2)$$
$$= 1+\omega-\frac{\omega^2}{6}+\frac{\omega^4}{30}-\frac{\omega^5}{30}+\frac{7\,\omega^6}{300}-\frac{4\,\omega^7}{300}+\ldots;$$

et, puisque $g = 1 + \omega$ et $f = g^2$, on aura

$$\frac{200f}{3+3f+4g} - (3+3f-40g)$$
$$= 54\left(1+\omega-\frac{\omega^2}{6}+\frac{\omega^4}{30}-\frac{\omega^5}{30}+\frac{7\omega^6}{300}-\dots\right).$$

Par conséquent, si l'on représente par Q la série en parenthèse, on aura

$$\log N = \left(1-\frac{1}{f}\right)\frac{nQ}{54},$$

exact jusqu'au sixième terme.

On aura de même pour tout autre nombre A, en posant $a = \sqrt[n]{A}$, $b = \sqrt{a}$ et $P = \dfrac{200a}{3+3a+4b} - (3+3a-40b)$,

$$\log A = \left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{nP}{54},$$

par conséquent, pour un système quelconque de logarithmes,

$$\frac{\log N}{\log A} = \frac{1-\dfrac{1}{f}}{1-\dfrac{1}{a}}\,\frac{Q}{P} = \frac{\left(1-\dfrac{1}{f}\right)aQ}{(a-1)P}.$$

Huyghens applique sa méthode aux logarithmes vulgaires et cherche les racines en extrayant six fois consécutivement la racine carrée du nombre donné ; il obtient alors

$$a = \sqrt[32]{10} = 1,07460\dots,$$
$$b = \sqrt{a} \;= 1,03663\dots,$$
$$P = \frac{214,9214\dots}{10,37035\dots} + 35,2415 = 55,966\dots;$$

donc

$$(a-1)P = 4,17550\dots$$

et

$$\log N = \left(1 - \frac{1}{f}\right)\frac{aQ}{4,17550\ldots}.$$

La constante de Huyghens est

$$4,17550\,9443116778$$
$$= \left[\frac{200\sqrt[32]{10}}{3+3\sqrt[32]{10}+4\sqrt[64]{10}} - (3+3\sqrt[32]{10}-40\sqrt[64]{10})\right](\sqrt[32]{10}-1).$$

Soit proposé de trouver le logarithme de 2, on cherche

$$f = \sqrt[32]{2} = 1,021897\ldots, \qquad 1 - \frac{1}{f} = 0,021427\ldots,$$
$$g = \sqrt{f} = 1,010889\ldots, \qquad Q = 54,5869\ldots;$$

donc

$$aQ\left(1 - \frac{1}{f}\right) = 1,2569\ldots$$

et

$$\log 2 = \frac{1,2569\ldots}{4,1755\ldots} = 0,30102\,99956\,7.$$

Le résultat obtenu à l'aide de la formule et des constantes de Huyghens peut être exact à quinze chiffres, il le sera toujours à une unité du onzième chiffre au moins.

En effet, puisque dans les facteurs en parenthèse on a substitué $\left(\frac{7\omega^6}{300} - \ldots\right)$ à $\left(\frac{11\omega^6}{420} - \ldots\right)$, les valeurs de P et de Q seront trop petites de $\left(\frac{\omega^6}{350} - \ldots\right)$.

Mais comme on peut toujours supposer N entre 1 et 10, l'erreur relative du dénominateur sera $< 0,0^{11}47$, et celle du numérateur sera moindre; par conséquent le résultat obtenu sera trop grand. Si N est près de l'unité, l'erreur sera à son maximum et pourra être d'une unité du onzième chiffre décimal (comme dans l'exemple de Huyghens); à mesure que le nombre N augmente, l'erreur diminue et finit par devenir nulle, et le logarithme sera exact à une unité du quinzième ordre.

Note. — A propos de la Note de M. Bertrand sur le procédé d'Huyghens pour le calcul des logarithmes, M. Hoüel nous rappelle une méthode encore plus vieille, plus simple et n'exigeant que la connaissance des trois premières règles de l'arithmétique.

Soit, par exemple, à trouver le logarithme de 3. On élèvera 3 aux puissances 2, 4, 8, 10; 20, 40, 80, 100; 200, 400, 800, 1000; etc., en ne conservant, par l'usage de la multiplication abrégée (ou plus simplement en supprimant des chiffres à droite), que le nombre des chiffres nécessaires dans chaque produit pour pouvoir indiquer combien le produit final a de chiffres. Supposons que l'on ait trouvé que 3^{10000} se compose de 4771 chiffres; on en conclut aisément que

$$\log 3 = 0,4771.$$

Cette règle se trouve à la page 7 (et suiv.) de l'*Arithmetica logarithmica* de Briggs, Londres 1624, c'est-à-dire dans la première de toutes les Tables de Logarithmes.

M. Hoüel nous fait remarquer aussi que l'on trouve partout la *Trigonometria Britannica* (la plus belle Table qui ait jamais été publiée) avec le nom de Gellibrand. Or Gellibrand n'a fait que *compléter* la préface, en y ajoutant un traité insignifiant de Trigonométrie sphérique. L'ouvrage est de Briggs, le plus grand calculateur qui ait jamais existé, et qui est mort avant la publication. L'erreur universelle est due à ce que sur le frontispice du volume le nom de Briggs est imprimé en petits caractères et celui de Gellibrand en grosses lettres. A quoi tient la réputation d'un auteur!

J. B.