NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. BATTAGLINI

Sur la géométrie imaginaire de Lobatcheffsky

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 265-277

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__265_0>

SUR LA GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE DE LOBATCHEFFSKY

(voir p. 209);

PAR M. G. BATTAGLINI.

Rendiconto della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, juin 1867.
Giornale di Matematiche, t. V, p. 217.

III.

Cherchons maintenant les relations entre les parties d'un triangle, et supposons en premier lieu que le triangle ait un angle droit C. Soient A, B les deux angles obliques, opposés respectivement aux côtés a, b, et soit c l'hypoténuse. D'après ce que nous avons dit, on aura évidemment les relations

$$(11)\qquad \operatorname{Th} a = \Phi(b)\operatorname{tang} A,\quad \operatorname{Th} b = \Phi(a)\operatorname{tang} B,$$

d'où l'on tire

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \sin A &= \frac{\operatorname{Th} a}{\sqrt{\operatorname{Th}^2 a + \Phi^2(b)}} \\ &= \frac{\operatorname{Sh} a}{\sqrt{\operatorname{Sh}^2 a + \Phi^2(b) + \operatorname{Sh}^2 a.\Phi^2(b)}}, \\ \sin B &= \frac{\operatorname{Th} b}{\sqrt{\operatorname{Th}^2 b + \Phi^2(a)}} \\ &= \frac{\operatorname{Sh} b}{\sqrt{\operatorname{Sh}^2 b + \Phi^2(a) + \operatorname{Sh}^2 b.\Phi^2(a)}}. \end{aligned}\right.$$

En remarquant que, *quel que soit c,* pour $\sin A = 0$ ou $\sin B = 0$, on doit avoir $a = 0$ ou $b = 0$, et pour $\sin A = 1$ ou $\sin B = 1$, on doit avoir $a = c$ ou $b = c$, il est facile de voir que sin A et sin B ont nécessairement des expressions de la forme

$$\sin A = \frac{f(a)}{f(c)}, \quad \sin B = \frac{f(b)}{f(c)}.$$

De plus, c devant être évidemment une fonction symétrique de a et de b, il en sera de même aussi pour $f(c)$. On aura donc, pour satisfaire à de telles conditions,

$$(13) \quad \Phi(a) = \mathrm{Th}\,a = f(a), \quad \Phi(b) = \mathrm{Th}\,b = f(b),$$

ou bien

$$(14) \quad \Phi(a) = \mathrm{Sh}\,a = f(a), \quad \Phi(b) = \mathrm{Sh}\,b = f(b).$$

Les équations (13) correspondent au système de la *Géométrie euclidienne*. On tire, en effet, des équations (11), (12), (13),

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin A = \cos B = \dfrac{\mathrm{Th}\,a}{\mathrm{Th}\,c}, \quad \sin B = \cos A = \dfrac{\mathrm{Th}\,b}{\mathrm{Th}\,c}, \\ \mathrm{Th}^2 c = \mathrm{Th}^2 a + \mathrm{Th}^2 b. \end{array} \right.$$

Si l'on abaisse maintenant de C une perpendiculaire sur l'hypoténuse c, et qu'on appelle α, β les segments de c adjacents à A, B, on aura, par les relations (15),

$$\mathrm{Th}\,\alpha = \mathrm{Th}\,b \cos A = \frac{\mathrm{Th}^2 b}{\mathrm{Th}\,c}, \quad \mathrm{Th}\,\beta = \mathrm{Th}\,a \cos B = \frac{\mathrm{Th}^2 a}{\mathrm{Th}\,c},$$

$$\mathrm{Th}\,c = \mathrm{Th}(\alpha + \beta) = \mathrm{Th}\,\alpha + \mathrm{Th}\,\beta.$$

Cette dernière équation conduit à la condition

$$\mathrm{Sh}\,\alpha\, \mathrm{Sh}\,\beta = 0;$$

et, comme on a

$$\mathrm{Sh}\,\alpha = k\alpha + \frac{k^3 \alpha^3}{2.3} + \ldots, \quad \mathrm{Sh}\,\beta = k\beta + \frac{k^3 \beta^3}{2.3} + \ldots,$$

on en conclura $k = 0$, et les équations (15) se réduiront aux formules connues de la Trigonométrie plane ordinaire

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin A = \cos B = \dfrac{a}{c}, \quad \sin B = \cos A = \dfrac{b}{c}, \\ \qquad\qquad c^2 = a^2 + b^2. \end{array}\right.$$

Les équations (14) correspondent, au contraire, au système de la *Géométrie non euclidienne*. En effet, des équations (11), (12), (14), on tire

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{Sh}\,a = \mathrm{Sh}\,c \sin A, & \mathrm{Sh}\,b = \mathrm{Sh}\,c \sin B, \\ \mathrm{Th}\,a = \mathrm{Th}\,c \cos B, & \mathrm{Th}\,b = \mathrm{Th}\,c \cos A, \\ \multicolumn{2}{c}{\mathrm{Ch}\,c = \mathrm{Ch}\,a\,\mathrm{Ch}\,b = \cot A \cot B,} \\ \cos A = \mathrm{Ch}\,a \sin B, & \cos B = \mathrm{Ch}\,b \sin A, \\ \mathrm{Th}\,a = \mathrm{Sh}\,b\,\mathrm{tang} A, & \mathrm{Th}\,b = \mathrm{Sh}\,a\,\mathrm{tang} B, \end{array}\right.$$

et ce sont là (sous une forme un peu différente) les relations données par Lobatcheffsky (*).

Les formules (17) se réduisent aux formules (16) lorsque les côtés du triangle proposé sont infiniment petits.

Il suit de ce que nous avons dit qu'entre l'angle de parallélisme Δ et la distance δ du point p à la droite L, on a la relation

$$\mathrm{Sh}\,\delta\,\mathrm{tang}\,\Delta = 1,$$

d'où

$$(18)\quad \mathrm{tang}\,\Delta = \frac{1}{\mathrm{Sh}\,\delta}, \quad \sin\Delta = \frac{1}{\mathrm{Ch}\,\delta}, \quad \cos\Delta = \mathrm{Th}\,\delta.$$

Les formules (17) font voir que l'angle aigu compris entre deux droites qui se rencontrent en un point à l'infini est égal à zéro; et que l'angle compris entre deux droites qui se rencontrent en un point idéal est exprimé par $ik\delta$, δ étant la longueur de leur perpendiculaire commune.

(*) *Études géométriques, etc.*, p. 27.

En procédant d'une manière analogue, on obtiendra les relations entre les parties d'un angle trièdre qui a un angle dièdre droit. Ces relations peuvent se déduire des formules (17), en y substituant $i\frac{a}{k}$, $i\frac{b}{k}$, $i\frac{c}{k}$ au lieu de a, b, c.

Considérons maintenant un triangle quelconque. Soient a, b, c ses côtés, évalués en parcourant le périmètre du triangle dans un sens constant; et soient A, B, C les angles *extérieurs* du triangle, compris entre (b, c), (c, a), (a, b). Soient γ la perpendiculaire abaissée du sommet C sur le côté c, et (C_α, C_β), (c_α, c_β) les parties dans lesquelles cette perpendiculaire divise l'angle C et le côté c. On aura évidemment les relations

$$\sin A \operatorname{Sh} b = \sin B \operatorname{Sh} a = \operatorname{Sh} \gamma,$$

$$\operatorname{tang} C_\alpha = -\frac{\cot A}{\operatorname{Ch} b}, \qquad \operatorname{tang} C_\beta = -\frac{\cot B}{\operatorname{Ch} a},$$

$$\operatorname{Th} c_\alpha = -\operatorname{Th} b \cos A, \qquad \operatorname{Th} c_\beta = -\operatorname{Th} a \cos B,$$

$$\operatorname{tang}(C_\alpha + C_\beta) = -\operatorname{tang} C = \frac{\operatorname{tang} A \operatorname{Ch} b + \operatorname{tang} B \operatorname{Ch} a}{1 - \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{Ch} a \operatorname{Ch} b},$$

$$\operatorname{Th}(c_\alpha + c_\beta) = -\operatorname{Th} c = \frac{-\operatorname{Th} a \cos B - \operatorname{Th} b \cos A}{1 + \operatorname{Th} a \operatorname{Th} b \cos A \cos B},$$

d'où l'on tire

$$(19)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{Sh} a}{\sin A} = \dfrac{\operatorname{Sh} b}{\sin B}, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{tang} A}{\operatorname{Ch} a} + \dfrac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{Ch} b} + \dfrac{\operatorname{tang} C}{\operatorname{Ch} a \operatorname{Ch} b} - \operatorname{tang} A \operatorname{tang} B \operatorname{tang} C = 0, \\[2ex] \dfrac{\operatorname{Th} a}{\cos A} + \dfrac{\operatorname{Th} b}{\cos B} + \dfrac{\operatorname{Th} c}{\cos A \cos B} + \operatorname{Th} a \operatorname{Th} b \operatorname{Th} c = 0. \end{array}\right.$$

En posant

$$\Sigma^2 = 1 - \mathrm{Ch}^2 a - \mathrm{Ch}^2 b - \mathrm{Ch}^2 c + 2\,\mathrm{Ch}\,a\ \mathrm{Ch}\,b\ \mathrm{Ch}\,c,$$
$$\sigma^2 = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C,$$

les formules (19) et leurs analogues donneront

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{Sh}^2 a}{\sin^2 A} = \frac{\mathrm{Sh}^2 b}{\sin^2 B} = \frac{\mathrm{Sh}^2 c}{\sin^2 C} = \frac{-\sigma^2}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C},\\
&\frac{\sin^2 A}{\mathrm{Sh}^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\mathrm{Sh}^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\mathrm{Sh}^2 c} = \frac{\Sigma^2}{\mathrm{Sh}^2 a\, \mathrm{Sh}^2 b\, \mathrm{Sh}^2 c},\\
&\mathrm{Ch}\,a = \mathrm{Ch}\,b\ \mathrm{Ch}\,c + \mathrm{Sh}\,b\ \mathrm{Sh}\,c \cos A,\\
&\mathrm{Ch}\,b = \mathrm{Ch}\,c\ \mathrm{Ch}\,a + \mathrm{Sh}\,c\ \mathrm{Sh}\,a \cos B,\\
&\mathrm{Ch}\,c = \mathrm{Ch}\,a\ \mathrm{Ch}\,b + \mathrm{Sh}\,a\ \mathrm{Sh}\,b \cos C,\\
&\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C\ \mathrm{Ch}\,a,\\
&\cos B = \cos C \cos A - \sin C \sin A\ \mathrm{Ch}\,b,\\
&\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B\ \mathrm{Ch}\,c,
\end{aligned}\right.$$

et trois quelconques de ces équations serviront pour exprimer les relations entre les côtés et les angles d'un triangle.

Les équations (20) n'éprouvent aucune altération, lorsqu'on y remplace a, b, c, A, B, C par $i\frac{A}{k}$, $i\frac{B}{k}$, $i\frac{C}{k}$, ika, ikb, ikc. Il suit de là qu'à tout triangle correspond un triangle idéal tel, que les sommets de chacun de ces deux triangles sont respectivement les *pôles* des côtés correspondants de l'autre.

Les formules (20) se réduisent aux formules connues de la Trigonométrie plane ordinaire, lorsque les côtés du triangle proposés sont infiniment petits.

En procédant d'une manière analogue, nous obtiendrons les relations entre les parties d'un angle trièdre, relations qui peuvent se déduire des équations (20), en remplaçant a, b, c par $i\frac{a}{k}$, $i\frac{b}{k}$, $i\frac{c}{k}$.

De ce qui précède il résulte évidemment que, dans la Géométrie plane, les relations métriques des figures dépendent de la constante k. Cette constante ne pouvant être déterminée *à priori* (à moins qu'entre les deux conceptions de la ligne droite indiquées précédemment, on ne veuille se décider pour celle d'Euclide), on devra, *dans la science pure,* la conserver comme absolument *indéterminée*. Si, pour l'homogénéité des formules, on pose $kl = 1$, l sera la longueur d'une certaine droite, que l'on doit chercher à déterminer, lorsqu'on veut procéder aux applications *pratiques* de la Géométrie. Pour y parvenir, il suffit d'exécuter *une seule expérience,* savoir, de mesurer les parties d'un triangle (l'unité angulaire étant l'angle droit divisé par le nombre $\frac{\pi}{2}$, et l'unité de longueur étant une droite arbitraire), et, en substituant les nombres qui les représentent dans une des équations (20) (ou dans toute autre équation qui s'en déduise), de tirer de cette équation le nombre k. Alors on aura l égale à la droite prise pour unité, divisée par k. Par exemple, si a et A sont le côté et l'angle d'un triangle équilatéral et par suite équiangle, on aura, pour déterminer k, l'équation

$$ka = \log \frac{1 + \sqrt{4\cos^2 \frac{1}{2}A - 1}}{1 - \sqrt{4\cos^2 \frac{1}{2}A - 1}}.$$

On trouve ainsi (eu égard à nos moyens d'observation et à notre organisation même) pour k une valeur tellement petite, que l dépasse tout ce que nous pouvons mesurer. Nous sommes donc ramenés dans la pratique à la Géométrie euclidienne.

Si l'on prend la droite l pour unité de longueur, les formules (20) se simplifieront, puisqu'on aura alors $k = 1$.

IV.

Si aux milieux des côtés a, b, c d'un triangle on élève des perpendiculaires, celles-ci se rencontreront en un même point (à une distance finie, infinie ou idéale), lequel sera à égale distance des sommets A, B, C du triangle. En appelant r le rayon du cercle circonscrit au triangle, et α, β, γ les angles au centre, opposés à ses côtés, on aura les relations

$$(21)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}\alpha} = \dfrac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}\beta} = \dfrac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}\gamma} = \operatorname{Sh} r, \\[2ex] \quad\quad \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = \pi. \end{array}\right.$$

d'où, en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} \Pi^2 = {} & \left(\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a + \operatorname{Sh}\frac{1}{2}b + \operatorname{Sh}\frac{1}{2}c\right)\left(\operatorname{Sh}\frac{1}{2}b + \operatorname{Sh}\frac{1}{2}c - \operatorname{Sh}\frac{1}{2}a\right) \\ & \times \left(\operatorname{Sh}\frac{1}{2}c + \operatorname{Sh}\frac{1}{2}a - \operatorname{Sh}\frac{1}{2}b\right)\left(\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a + \operatorname{Sh}\frac{1}{2}b - \operatorname{Sh}\frac{1}{2}c\right), \end{aligned}$$

on tire

$$(22)\quad \operatorname{Sh} r = \frac{\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a \operatorname{Sh}\frac{1}{2}b \operatorname{Sh}\frac{1}{2}c}{\Pi}.$$

Soit $a < b < c$; le centre du cercle sera à une distance finie, infinie ou idéale, suivant que l'on aura

$$\operatorname{Sh}\frac{1}{2}a + \operatorname{Sh}\frac{1}{2}b \gtreqless \operatorname{Sh}\frac{1}{2}c.$$

Tous les points du cercle sont équidistants non-seulement du centre, mais encore de la droite dont ce centre est le pôle. Cette droite se trouve à une distance idéale, infinie ou finie, suivant que le centre se trouve à une distance finie, infinie ou idéale. La distance δ des points du cercle à la droite qui a son centre pour pôle est donnée par la formule

$$(23) \qquad \mathrm{Ch}\,\delta = \frac{\mathrm{Sh}\,\frac{1}{2}a\,\mathrm{Sh}\,\frac{1}{2}b\,\mathrm{Sh}\,\frac{1}{2}c.}{i\Pi}.$$

Tous les cercles qui ont le même centre (à une distance finie, infinie ou idéale) coupent orthogonalement toutes les droites menées par ce centre. Soient s, s' et S, S′ deux arcs et deux secteurs correspondants à un même angle Δ au centre commun des cercles de rayons ρ, ρ'; on aura

$$(24) \quad \frac{s}{s'} = \frac{\mathrm{circ.}\,\rho}{\mathrm{circ.}\,\rho'} = \frac{\mathrm{Sh}\,\rho}{\mathrm{Sh}\,\rho'}, \quad \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{S}'} = \frac{\mathrm{surf.}\,\rho}{\mathrm{surf.}\,\rho'} = \frac{\mathrm{Sh}^2\,\frac{1}{2}\rho}{\mathrm{Sh}^2\,\frac{1}{2}\rho'}.$$

Si ρ' est infiniment petit, il viendra

$$\frac{s}{\Delta} = \frac{\mathrm{circ.}\,\rho}{2\pi} = \frac{\mathrm{Sh}\,\rho}{k}, \quad \frac{\mathrm{S}}{\frac{1}{2}\Delta} = \frac{\mathrm{surf.}\,\rho}{\pi} = \frac{\mathrm{Sh}^2\,\frac{1}{2}\rho}{\frac{1}{4}k^2},$$

d'où

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} s &= \frac{\Delta}{k}\,\mathrm{Sh}\,\rho, & \mathrm{circ.}\,\rho &= \frac{2\pi}{k}\,\mathrm{Sh}\,\rho, \\ \mathrm{S} &= \frac{2\Delta}{k^2}\,\mathrm{Sh}^2\,\frac{1}{2}\rho & \mathrm{surf.}\,\rho &= \frac{4\pi}{k^2}\,\mathrm{Sh}^2\,\frac{1}{2}\rho \\ &= \frac{s}{k}\,\mathrm{Th}\,\frac{1}{2}\rho, & &= \frac{\mathrm{circ.}\,\rho}{k^2}\,\mathrm{Th}\,\frac{1}{2}\rho. \end{aligned} \right.$$

Si le centre commun des deux cercles est à l'infini, en posant $\rho - \rho' = \delta$, et appelant t la corde de l'arc s, on aura

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &s' = s e^{-\frac{\delta}{k}}, && S' = S e^{-\frac{2\delta}{k}},\\ &s = \frac{2\,\mathrm{Sh}\,\frac{1}{2}t}{k}, && S = \frac{2\,\mathrm{Sh}\,\frac{1}{2}t}{k^2}. \end{aligned}\right.$$

Enfin, si le centre commun des deux cercles est idéal, en désignant par δ, δ' les distances constantes de leurs points à la droite qui a leur centre pour pôle, et par τ la projection de l'arc s sur cette droite, on aura

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{s}{s'} = \frac{\mathrm{Ch}\,\delta}{\mathrm{Ch}\,\delta'}, && \frac{S}{S'} = \frac{\mathrm{Ch}^2\frac{1}{2}\delta}{\mathrm{Ch}^2\frac{1}{2}\delta'},\\ &s = \tau\,\mathrm{Ch}\,\delta, && S = \frac{\tau}{k}(\mathrm{Sh}\,\delta + i). \end{aligned}\right.$$

V.

Si le système des droites menées par un point p aux divers points d'une droite L, tourne avec L autour de la perpendiculaire O abaissée de p sur L, la droite L, par sa rotation autour du pied o de la perpendiculaire, décrira un plan P perpendiculaire à O, et l'on verra immédiatement, d'après ce que nous avons dit, quelles sont les droites menées par p qui rencontreront le plan P à une distance finie, infinie ou idéale. Toutes les droites qui rencontrent P en un point idéal sont perpendiculaires à un même plan, dont ce point est le *pôle*.

Dans le système de la Géométrie *non euclidienne,* le plan est une surface indéfinie, ses points à l'infini étant tous *distincts* entre eux, et appartenant à *une circonférence de cercle,* qui a son centre en un point *quelconque* du plan et son rayon infini. De même pour l'espace, les points à l'infini sont tous *distincts* entre eux, et appartiennent à une *surface sphérique,* qui a son centre en un point *quelconque* et son rayon infini. Au contraire, dans le système de la Géométrie *euclidienne,* le plan est une surface indéfinie et *rentrante sur elle-même,* dont les points à l'infini coïncident deux à deux avec les points d'une *ligne droite*. De même, l'espace est un lieu continu, indéfini et *rentrant sur lui-même,* dont les points à l'infini coïncident deux à deux avec les points d'un plan.

Sans entrer pour le moment dans d'autres développements sur cet objet, examinons seulement le triangle sphérique déterminé par l'intersection des trois faces d'un angle solide, de sommet p, avec la surface sphérique décrite en faisant tourner autour de O le cercle de centre p et de rayon ρ. En désignant par A, B, C les inclinaisons des faces, et par a, b, c les angles plans de l'angle solide (évalués comme il a été dit au n° 3), A, B, C seront les angles *extérieurs* du triangle sphérique, et les longueurs α, β, γ de ses côtés seront données par les formules

$$(28) \qquad \frac{\alpha k}{a} = \frac{\beta k}{b} = \frac{\gamma k}{c} = \operatorname{Sh}\rho.$$

En posant

$$(29) \qquad 2\pi - (A + B + C) = \varepsilon,$$

on sait que ε est la mesure de la surface S du triangle sphérique $\left(\text{c'est-à-dire que, pour deux triangles appartenant à une même surface sphérique, on a } \frac{S}{S'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)$, et que la valeur de ε est donnée par la formule

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang}^2 \frac{1}{4}\varepsilon = \operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b+c)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(b+c-a) \\ &\qquad\times \operatorname{tang}\frac{1}{4}(c+a-b)\operatorname{tang}\frac{1}{4}(a+b-c) \\ &\text{ou} \\ &\operatorname{tang}^2 \frac{1}{4}\varepsilon = \operatorname{tang}\frac{1}{4}k\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\operatorname{Sh}\rho}\operatorname{tang}\frac{1}{4}k\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\operatorname{Sh}\rho} \\ &\qquad\times \operatorname{tang}\frac{1}{4}k\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\operatorname{Sh}\rho}\operatorname{tang}\frac{1}{4}k\frac{\alpha+\beta-\gamma}{\operatorname{Sh}\rho}. \end{aligned}\right.$$

Le second membre de l'équation (30) pouvant varier de zéro à l'infini, ε sera compris entre zéro et 2π, de sorte que les triangles appartenant à une surface sphérique qui a son centre à une distance finie, ont la somme de leurs angles extérieurs comprise entre zéro et quatre angles droits.

Si le centre de la sphère se trouve à une distance infinie, a, b, c étant des quantités infiniment petites, ε sera aussi infiniment petit; de sorte que les triangles appartenant à une surface sphérique dont le centre est à l'infini auront toujours la somme de leurs angles extérieurs égale à quatre angles droits. Par suite, comme on a, pour ces triangles

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin B} = \frac{\gamma}{\sin C}, \\ &A + B + C = 2\pi, \end{aligned}\right.$$

leurs côtés et leurs angles satisferont aux relations de la Trigonométrie plane ordinaire.

Dans le cas actuel, les angles pouvant être substitués dans l'équation (30) à la place de leurs tangentes, si l'on fait

$$(32)\quad E^2 = \frac{1}{16}(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma),$$

on aura, pour deux triangles de la surface sphérique de rayon infini,

$$\frac{S}{S'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{E}{E'}.$$

Si le centre de la sphère est à une distance idéale, en désignant par δ la distance commune des points de la surface sphérique au plan qui a le centre pour *pôle*, on aura

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\varepsilon &= \operatorname{Th} \frac{1}{4}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\operatorname{Ch}\delta} \operatorname{Th} \frac{1}{4}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{\operatorname{Ch}\delta} \\ &\quad \times \operatorname{Th} \frac{1}{4}\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\operatorname{Ch}\delta} \operatorname{Th} \frac{\alpha+\beta-\gamma}{\operatorname{Ch}\delta}, \end{aligned}\right.$$

et dans le cas particulier de $\delta = 0$, où la surface sphérique se réduit à un plan, il viendra

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{4}\varepsilon &= \operatorname{Th} \frac{1}{4}(\alpha+\beta+\gamma) \operatorname{Th} \frac{1}{4}(\beta+\gamma-\alpha) \\ &\quad \times \operatorname{Th} \frac{1}{4}(\gamma+\alpha-\beta) \operatorname{Th} \frac{1}{4}(\alpha+\beta-\gamma). \end{aligned}\right.$$

La quantité ε passant par zéro, lorsque le rayon varie, est maintenant devenue négative; de sorte que, le second membre de l'équation (33) ou (34) pouvant varier de zéro à l'unité, ε sera compris entre zéro et $-\pi$. Donc les triangles appartenant à une surface sphérique dont le centre est à une distance idéale (comme cela a lieu, en particulier, pour les triangles plans) ont la somme de leurs angles extérieurs comprise entre quatre droits et six droits.

Pour deux triangles appartenant à une surface sphérique de rayon idéal (et, en particulier, pour deux triangles plans), on a toujours la relation

$$\frac{S}{S'} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}.$$

En supposant $\alpha < \beta < \gamma$, la valeur de E ou de ε, donnée par une des formules (32), (33), (34), est réelle, nulle ou imaginaire, suivant que l'on a $\alpha + \beta \gtreqless \gamma$. Il suit de là que, dans un triangle appartenant à une surface sphérique dont le centre est à une distance infinie ou idéale, le plus grand côté est toujours moindre que la somme des deux autres; et par suite, l'arc de cercle concentrique à la sphère (dans le cas particulier, la droite), qui passe par deux points de la surface sphérique de rayon infini ou idéal, représente sur cette surface (dans le cas particulier, sur le plan) la distance *minimum* de ces points.

Sur la surface sphérique de rayon fini, l'arc de cercle, concentrique à la sphère, mené par deux points, représente leur distance *minimum* ou *maximum*, suivant que cet arc est plus petit ou plus grand que la demi-circonférence.