ABEL TRANSON

Application de l'algèbre directive à la géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 193-208

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__193_0>

APPLICATION DE L'ALGÈBRE DIRECTIVE A LA GÉOMÉTRIE

(voir p. 144);

PAR M. ABEL TRANSON.

V.

A la fin de l'année 1846, j'ai fait connaître à la Société Philomathique : 1° la démonstration ci-dessus exposée du théorème relatif aux centres de similitude de trois figures homothétiques ; 2° la similitude des régions infinitésimales qui se correspondent dans toute transformation résultant d'une équation entre deux variables directives ; 3° la relation de toute ellipse avec les deux cercles concentriques dont les diamètres sont respectivement la somme et la différence des axes de cette ellipse, comme aussi la propriété correspondante de toute hyperbole. C'était à l'occasion d'un Rapport que j'avais été chargé de faire sur un premier Mémoire de M. Faure (de Gap), intitulé : *Essai sur la théorie et l'interprétation des quantités imaginaires* (*). En même temps l'auteur avait communiqué les premières feuilles d'un second Mémoire dont la publication, à ce que je crois, n'a pas été achevée, dans lequel il proposait l'interprétation géométrique de toute équation à deux variables par une corrélation entre

(*) Chez Bachelier, 1845. Ce Mémoire contient une démonstration du théorème fondamental que toute équation a au moins une racine. Malheureusement cette démonstration est sujette au même genre de difficultés que M. Liouville a objectées à celle de Mourey (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. IV, p. 501 ; 1839). En revanche on y trouve des considérations très-remarquables sur certaines équations dont l'auteur enseigne à opérer l'abaissement sans calcul, ce qu'on pourrait appeler l'*abaissement à vue*.

deux chemins inclinés issus d'une même origine, et c'est de cette idée première que j'avais déduit ces mêmes trois résultats ci-dessus énumérés, que j'ai été dans le cas de rappeler à la Société Philomathique dans sa séance du 14 mai 1864 (*).

Mais en 1846 non plus qu'en 1864, je ne savais pas que l'Algèbre directive pût réduire à de simples éliminations la solution d'une question comme celle de la trajectoire oblique d'un système d'ellipses homofocales, c'est-à-dire d'une question qui paraissait réclamer essentiellement le recours au calcul intégral. Cette singulière propriété dont le calcul directif paraît doué au moins à l'égard de certaines questions se présente encore dans la solution du problème suivant dont la condition conduit à une équation différentielle du second ordre.

Problème. — *Trouver l'équation générale des courbes dont la tangente rencontre sous un angle constant la droite qui partage dans un rapport donné l'angle du rayon vecteur avec une direction fixe (avec l'axe polaire).*

Concevons donc une droite qui partage l'angle ω du rayon vecteur dans le rapport de $\frac{n}{m}$ à l'unité, c'est-à-dire qui fait elle-même avec l'axe polaire un angle égal à $\frac{n}{m}\omega$; soit ε l'angle constant sous lequel cette droite est rencontrée par la tangente; α l'angle de la tangente avec le rayon vecteur ρ; et soient ρ' et ρ'' les dérivées première et seconde de ρ considéré comme fonction de ω. La con-

(*) *Voir* le journal *l'Institut*, et aussi le *Bulletin de la Société Philomathique*.

dition de la question est la suivante :

$$\alpha + \frac{m-n}{m}\,\omega = \varepsilon \quad \text{ou bien} \quad m\,d\alpha + (m-n)\,d\omega = 0.$$

D'ailleurs en ayant égard à la relation connue

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\rho}{\rho'}, \quad \text{on obtient} \quad d\alpha = \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}\,d\omega;$$

ce qui conduit finalement à l'équation différentielle

$$m\rho\rho'' - (2m-n)\,\rho'^2 - (m-n)\,\rho^2 = 0.$$

Mais traitons la question par le calcul directif. Soit u la variable dont l'extrémité trace la courbe cherchée. L'inclinaison de l'accroissement directif du, c'est l'inclinaison de la tangente elle-même; d'après la règle pour l'élévation aux puissances, règle à déduire de celle de la multiplication, la quantité directive $u^{\frac{n}{m}}$ a pour inclinaison $\frac{n}{m}\,\omega$, si ω est l'inclinaison de u. Enfin l'inclinaison d'un quotient directif étant égale à la différence des inclinaisons de ses deux termes, la condition du problème est que l'angle de $\dfrac{du}{u^{\frac{n}{m}}}$ soit constant.

En même temps considérons u comme la fonction transformante d'une variable z, de sorte qu'on ait

$$\frac{du}{u^{\frac{n}{m}}} = \frac{m}{m-n}\,\varphi'(z)\,dz, \quad \text{ou bien} \quad u^{\frac{m-n}{m}} = \varphi(z).$$

Quel que soit $\varphi(z)$, si z décrit un chemin tel que l'inclinaison du produit $\varphi'(z)\,dz$ soit constante, on est assuré que u décrira quelqu'une des courbes cherchées;

et réciproquement, lorsque la fonction u suivra une de ces courbes, le chemin de z sera déterminé par la condition ci-dessus exprimée. En un mot, toutes les courbes cherchées sans exception peuvent résulter de l'équation directive $u^{\frac{m-n}{m}} = \varphi(z)$, quel que soit $\varphi(z)$. Supposons donc la forme la plus simple $\varphi(z) = z$. Alors il faudra que l'inclinaison de dz soit constante, c'est-à-dire il faudra que l'extrémité de z parcoure une ligne droite. Soit $y = b + ax$ l'équation cartésienne en coordonnées rectangulaires de cette droite, on pourra remplacer z par $x + i(b + ax)$, et en même temps u par $\rho(\cos\omega + i\sin\omega)$. Faisant ces substitutions, et égalant entre elles les composantes horizontales, et aussi entre elles les composantes verticales, il viendra les deux équations

$$\rho^{\frac{m-n}{m}} \cos\frac{m-n}{m}\omega = x, \quad \rho^{\frac{m-n}{m}} \sin\frac{m-n}{m}\omega = b + ax,$$

entre lesquelles il faudra éliminer x; on trouvera ainsi l'équation

$$\rho^{\frac{m-n}{m}}\left(\sin\frac{m-n}{m}\omega - a\cos\frac{m-n}{m}\omega\right) = b:$$

équation finie qui satisfait à l'équation du second ordre du problème, et qui en est l'intégrale générale, puisqu'elle contient deux constantes arbitraires. La constante a est précisément la tangente de l'angle que nous avions représenté par ε, et il ne serait pas difficile de définir l'autre constante.

Le résultat final serait illusoire dans le cas de $m = n$; mais alors il faudrait reprendre la condition du calcul directif, qui serait ici

$$\frac{du}{u} = \varphi'(z)\,dz, \quad \text{ou bien} \quad u = ce^{\varphi(z)}.$$

On expliquerait encore que $\varphi(z)$ peut être égal à z pourvu qu'on fasse parcourir à z une droite quelconque; et en suivant la même marche que ci-dessus, on arriverait à l'équation

$$\rho = ce^{\frac{\omega}{a}},$$

c'est-à-dire, comme cela devait être, à l'équation générale des spirales logarithmiques de même pôle.

VI.

Ainsi l'idée claire du nombre directif substituée à l'idée obscure du nombre imaginaire ne serait pas seulement l'unité établie dans la science, ce serait aussi, à ce qu'il semble, un nouvel instrument pour ses progrès ultérieurs. D'ailleurs, ce qu'il importe surtout de remarquer et sur quoi je veux, en terminant cette exposition incomplète, fixer l'attention du lecteur, c'est que le calcul directif, en donnant à la notion du nombre abstrait un complément devenu indispensable, maintient les conceptions relatives à la nature des opérations élémentaires (*addition, multiplication*) sans aucun mélange de *convention arbitraire*. Cela importe à l'enseignement des mathématiques et cela importe à la philosophie elle-même, car la philosophie a le droit et le besoin de citer en exemple les Sciences mathématiques comme reposant sur des idées *rationnelles*, c'est-à-dire sur des idées constitutives de la Raison, c'est-à-dire sur des idées qui sont à la fois indépendantes de la *Volonté* et de l'*Expérience*; car enfin :

Ni les vérités de la Géométrie ne sont des résultats de l'expérience; puisque, par exemple, si on nous a fait voir à l'aide des polygones inscrits au cercle que la longueur de la circonférence est comprise entre vingt et une et vingt-deux fois la septième partie du diamètre, notre conviction ne sera pas plus augmentée par le résultat conforme d'un mesurage effectif qu'elle ne serait ébranlée par un résultat contraire : c'est le theorème démontré qui jugera si ce mesurage est bon, et ce n'est pas ce mesurage qui fera le jugement du théorème; et ce que nous disons d'une vérité déduite des principes de la Géométrie, nous pouvons le dire aussi de toutes les idées premières ou conceptions qui sont ces principes mêmes; puisque, par exemple, s'il est vrai que la *raie* grossière et le *rond* irrégulier tracés sur le tableau par notre premier professeur ont éveillé en nous les idées de la *ligne droite* et du *cercle,* il est également vrai que jamais des yeux du corps nous n'avons vu l'un ou l'autre;

Ni d'autre part les principes et les règles de l'Algèbre ne sont des choses de convention; car si quelqu'un me dit que les quantités positives isolées et aussi les négatives isolées sont des êtres de convention, et que la règle des signes relative à ces sortes de quantités est une règle de convention, et encore que la notion des nombres imaginaires et leur calcul sont une notion et un calcul de convention, je le prierai de me faire voir comment l'Algèbre pourrait exister sans ces conventions, ou bien avec d'autres conventions que celles-là, puisque enfin celui qui dit convention veut dire certainement une chose arbitraire, une chose dont on peut se passer et qu'on peut remplacer par une autre. Or la double qualité des nombres d'être positifs ou négatifs s'impose à nos calculs dès le premier degré de l'algèbre, et depuis lors elle n'en disparaît plus. Et lorsqu'à notre second pas nous rencontrons, rencontre inattendue! *la racine carrée d'un nombre négatif!* c'est bien en vain que nous lui disons : « Tu n'existes pas! tu es impossible! tu es imaginaire!... » Malgré toutes nos dénégations et toutes nos objurgations la racine tient bon; elle ne se laisse pas extraire (si ce n'est par Argand, Français, Mourey, etc.) ; et nous, tout en lui déniant la possibilité d'être, nous sommes forcés de l'admettre, de la subir ; et bientôt à sa suite surgissent de tous côtés, je veux dire *à tous les degrés de l'Algèbre,* une infinité d'autres racines qu'elles aussi nous appelons impossibles !... Oui, on les déclare impossibles, mais bien en vain voudrait-on établir *la convention* de les déclarer inutiles ; car elles se retrouvent à tous les niveaux de la science et elles en sont l'instrument le plus précieux ; et au milieu de leur multitude les autres racines que nous jugions seules possibles n'apparaissent plus qu'à titre d'exception ; et enfin, le calculateur arrive à ce résultat aussi incontesté qu'il est étrange que ce qu'il appelait exclusivement le Réel n'est plus qu'un cas très-particulier de ce qu'il avait appelé l'Imaginaire.

Ces difficultés, pour celui qui en ignore le dénoûment et qui aime à pénétrer le fond des choses, doivent sembler comme un voile placé entre l'esprit de l'homme et la vérité. L'Algèbre lui paraissant dépasser par son étendue l'ordre des réalités connues, ce doit lui être comme un indice que parmi les réalités de ce monde que sans doute l'imperfection de nos sens nous empêche de saisir, ou peut-être parmi celles de quelque monde construit sur un plan différent du nôtre, il est des grandeurs qui correspondent à ces symboles inexpliqués ; car, s'il se pouvait qu'à une conception utile de l'être intelligent manquât indéfiniment la correspondance d'un objet intelligible, ce serait une note fausse dans l'harmonie universelle.

Eh bien, dirai-je à cet ami de l'Évidence (*), si de telles grandeurs existent ne devront-elles pas, pour correspondre aux différents états du nombre (état réel, positif ou négatif ; état imaginaire susceptible d'une infinité

(*) Mourey avait dédié son livre *aux Amis de l'Évidence.*

d'arguments), ne devront-elles pas admettre différents modes d'existence? Et d'abord ne devront-elles pas admettre dans tous leurs modes une dualité constante, de sorte qu'à chacun d'eux en corresponde un autre qui lui soit opposé, contraire ou inverse, dualité telle que par leur juxtaposition (addition), les deux modes opposés se neutralisent? — Et ensuite chacun de ces modes ne devra-t-il pas admettre une modification particulière qui, répétée sur elle-même, soit capable de produire le mode opposé, puisque telle est évidemment la condition pour qu'une grandeur réelle corresponde toujours à la racine carrée du nombre qui représentera un mode déterminé de la grandeur primitive (*). — Et, enfin, pour exprimer en une proposition unique la condition nécessaire de la correspondance supposée, ne faudrait-il pas que les modes d'une telle grandeur passassent de l'un à l'autre d'une manière continue, de telle sorte que la modification qui produit l'un d'eux puisse, étant répétée un nombre de fois convenable, en produire un autre quel qu'il soit?

Appliquée à toute grandeur qui serait douée de ces modes d'existence, notre Algèbre n'aurait pas trop d'étendue; elle aurait précisément l'étendue convenable. Mais à ces différents traits qui n'a pas reconnu en particulier la condition des chemins tracés sur un plan dans toute direction à partir d'un point fixe? Et puisque ainsi nous avons à notre disposition une grandeur dont toutes les propriétés correspondent exactement aux propriétés algorithmiques de nos symboles, comment persisterions-

(*) M. Vallès, dans un passage des *Études philosophiques sur la science du calcul* que je cite de mémoire, a dit judicieusement : « Si quelque grandeur subit une modification qui répétée sur elle-même la fait passer de l'état positif à l'état négatif, cette modification constitue un état intermédiaire qui doit être caractérisé dans le calcul par le symbole $\sqrt{-1}$. »

nous à dire que ces symboles ne représentent rien de réel?...

A la vérité, parmi les grandeurs que nous soumettons au calcul, il en est un grand nombre pour lesquelles les ressources de la science algorithmique sont une richesse superflue. Combien par exemple en est-il pour lesquelles la divisibilité indéfinie de l'unité abstraite est inutile, parce qu'elles se composent d'unités concrètes indivisibles? Et combien pour lesquelles le double état positif et négatif des nombres est un véritable non-sens, parce qu'elles ne sont pas susceptibles de s'accroître en deux sens opposés? — Cependant il suffit que quelques grandeurs soient indéfiniment divisibles pour que l'apparition de la forme fractionnaire dans la solution d'un problème quel qu'il soit ne nous étonne pas. Et pour ce qui est des solutions négatives, depuis Descartes elles ont cessé d'être *fausses*, non pas qu'elles soient *vraies* pour toutes sortes de questions, mais parce qu'elles le sont au moins pour quelques-unes. Malheureusement, l'idée de Descartes a manqué, pendant un siècle et demi, de son complément nécessaire qui consistait à faire entrer dans le calcul avec les deux chemins opposés (positif et négatif) tous les chemins de direction intermédiaire. Et comme dans le même temps se sont produites inévitablement, et par la force propre du calcul, diverses formes équivalentes au nombre directif, lesquelles n'auraient pu recevoir d'interprétation que par leur correspondance avec ces chemins intermédiaires, on s'est habitué à croire que l'Algèbre pouvait conduire le calculateur à des résultats dépourvus de signification et de réalité, en un mot à des *résultats imaginaires!* — Il est temps d'affirmer, au contraire, que toutes les racines des équations algébriques sont réelles, non pas en ce sens qu'elles procurent toujours aux problèmes qui leur ont donné naissance des solutions possibles, ce qui serait une assertion fausse et absurde, une assertion contraire à la vérité et à la raison; mais parce que de telles équations ayant lieu entre des nombres abstraits peuvent toujours, indépendamment des problèmes initiaux, être considérées comme traduisant une relation déterminée entre des grandeurs linéaires, c'est-à-dire entre des chemins diversement inclinés, et qu'à ce point de vue leurs solutions (leurs racines) sont toujours constructibles.

Nota. — Je dois reconnaître que dans les articles précédents j'ai attribué à Mourey une part trop grande dans toutes ces inventions. Au tome IV des *Annales* de Gergonne, on apprend qu'une première idée au sujet de la représentation géométrique des imaginaires avait été émise par Buée (en 1806). Plus tard, en 1813, par Argand et Français à la fois mais séparément, cette idée est retrouvée et développée. Le premier de ces Géomètres donne déjà une ébauche très-remarquable de la démonstration récemment perfectionnée par M. Hoüel du théorème fondamental : que toute équation a une racine. Le second expose avec clarté l'extension des principes fondamentaux du calcul à des nombres propres à représenter les grandeurs géométriques ; et pour ces nombres que Mourey a appelés *directifs*, Français propose déjà le symbole si simple a_ω ; puis de ce symbole et des règles du calcul il déduit comme corollaires évidents ces beaux résultats : « Que les rayons qui partagent en m parties égales la circonférence dont le rayon est 1, représentent les m racines de l'unité ; que ces racines sont toutes également réelles, puisqu'elles sont représentées par des lignes données de grandeur et de position, etc. » Et comme le célèbre Servois s'était demandé : « La nouvelle théorie est-elle au moins justifiée par de nombreuses applications ? »

Gergonne, qui avait déjà dit très-judicieusement : « On ne peut espérer ces résultats que du temps et des efforts de tous ceux qui voudront bien ne pas rejeter cette théorie avec dédain sans l'avoir sérieusement examinée (*Annales*, t. IV, p. 73); Gergonne répond à la critique prématurée de Servois : « M. Servois compterait-il donc pour peu de voir enfin l'analyse algébrique débarrassée de ces formes inintelligibles et mystérieuses, de ces *non-sens* qui la déparent et en font, pour ainsi dire, une sorte de science cabalistique. » (*Ibid.*, p. 230.)

VII.

C'est donc à l'égard seulement des problèmes de Géométrie que nous avons à justifier l'assertion que toutes les racines des équations sont réelles; et à cet effet, ne suffit-il pas d'opposer à l'opinion commune exprimée par M. Poncelet dans les termes suivants, à la fin d'une longue dissertation *sur la loi des signes de position en Géométrie :* « Concluons que les racines négatives indiquent des solutions réelles en même temps qu'un changement dans les hypothèses sur la situation des inconnues, et que, à l'inverse, les imaginaires indiquent que, pour les grandeurs actuelles des données du problème, les solutions examinées sont véritablement impossibles, quoiqu'elles puissent devenir possibles et constructibles géométriquement en changeant ces grandeurs sans changer les hypothèses (*); » ne suffit-il pas d'opposer à cette opinion,

(*) *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. II, p. 206. — Quelques personnes ont cru pouvoir dire que, dans cet ouvrage, M. Poncelet aurait jugé à fond et réfuté la doctrine proposée par Argand et Français et développee par Mourey. Mais je n'y trouve que quelques fragments d'une Note composée en 1816 et reproduite en 1864 où l'auteur se borne à affirmer que les équations du nouveau calcul *manquent d'homogénéité* et que d'abord que bien évidemment si l'on change les grandeurs des données sans changer les hypothèses sur la situation des inconnues, non-seulement les racines imaginaires, mais aussi les négatives peuvent devenir constructibles (en sens positif); mais de plus que *les racines imaginaires, comme les négatives, indiquent des solutions réelles, à la condition de changer les hypothèses sur la situation des inconnues sans d'ailleurs changer aucunement les grandeurs des données.* C'est là un des plus importants résultats de la nouvelle Algèbre; aussi est-il rigoureusement exact de dire que la plupart des problèmes déterminés de la Géométrie dont on a donné depuis longtemps la solution n'ont jamais été complétement discutés et ne pouvaient pas l'être avant l'introduction du calcul directif, puisque la circonstance d'une racine imaginaire paraissait être l'indication d'une impossibilité absolue et ainsi excluait toute idée d'un examen ultérieur. Cependant, si le lecteur veut s'exercer sur quelqu'un de ces problèmes élémentaires, il reconnaîtra aisément que, dans le cas des imaginaires, toujours quelques chemins inclinés satisfont pleinement et exclusivement aux équations du problème, et, par conséquent, en représentent les racines, quoiqu'à la vérité ils ne puissent le plus souvent correspondre à l'énoncé verbal de la question primitive que si l'on modifie convenablement cet énoncé. Mais n'est-ce pas sous cette réserve expresse

---

le symbole a_ω, où a est une longueur constante et ω un angle variable, ne peut pas représenter un cercle et qu'il représente nécessairement une *spirale logarithmique imaginaire!* (*Ibid*, p. 594). Il n'y a rien à répondre à ces deux assertions; mais si les circonstances dans lesquelles a été composé le dernier ouvrage de M. Poncelet suffisent à expliquer quelques méprises de sa part, il est moins facile d'expliquer comment, dans un journal scientifique (*Les Mondes,* livraison de février 1868), on a pu considérer de telles méprises comme constituant un JUGEMENT A FOND!

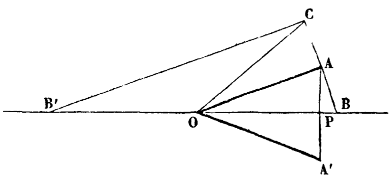
qu'on admet comme réelles les solutions négatives, et qu'on en fait l'interprétation?....

Je prendrai pour unique exemple le problème de déterminer simultanément deux points sur une droite lorsqu'on connaît leur point-milieu, et le produit, ou rectangle, de leurs distances à une origine commune prise sur la même droite.

Soient q le produit de ces deux distances et p la distance du point-milieu à l'origine. L'équation

$$x^2 - 2px + q = 0$$

donnera par ses racines, et dans tous les cas, la solution du problème. En effet, lorsque les racines sont réelles, elles mesurent les chemins qu'il faut parcourir sur la droite fixe, à partir de l'origine, pour arriver aux points cherchés. Quand elles sont ce que l'on appelle *imaginaires*, elles mesurent deux chemins qui sont encore *réels* et qui satisfont exactement aux deux conditions de la question, mais qui à la vérité ne sont plus sur la droite donnée.



Ce sont les chemins OA, OA′, construits en portant d'abord à partir de l'origine O une longueur OP égale à p, puis en élevant de part et d'autre de P les perpendiculaires PA, PA′ égales l'une et l'autre à $\sqrt{q - p^2}$.

Ces deux chemins inclinés ont bien, pour milieu entre leurs extrémités, le point donné P; le produit de leurs longueurs est bien aussi un nombre sans inclinaison, puisque leurs deux inclinaisons sont égales et de signes contraires ; et c'est bien un nombre égal à q puisque chacun d'eux est numériquement égal à $\sqrt{q}$. Enfin en mettant préalablement l'équation du problème sous la forme

$$\frac{x^2}{p} - 2x + \frac{q}{p} = 0,$$

il est facile de s'assurer que chacun de ces deux chemins inclinés, OA par exemple, est l'une des deux racines.

A cet effet, élevons en A perpendiculairement à OA une droite que nous prolongerons d'une part jusqu'en B à la rencontre de la droite donnée, et d'autre part jusqu'à la rencontre de la ligne OC, celle-ci menée de sorte que l'angle AOC soit égal à l'angle AOB ; enfin par le point C menons CB' parallèle à AO jusqu'à la rencontre de BO prolongée au delà de O.

Premièrement OC a une inclinaison double de celle de OA ; à cause de cela et de sa valeur numérique déduite des triangles semblables OAC, OPA, on a évidemment $OC = \frac{\overline{OA}^2}{p}$; secondement B'C représente en grandeur et en direction $2OA$; troisièmement B'O est égal à OB, qui lui-même est égal en valeur numérique à OC, mais qui est sans inclinaison ; de sorte que B'O est égal au nombre positif $\frac{q}{p}$. Le chemin brisé OC + CB' + B'O est donc identiquement égal à

$$\frac{\overline{OA}^2}{p} - 2\overline{OA} + \frac{q}{p}.$$

D'ailleurs ce chemin brisé est nul, puisque ses extrémités coïncident en O; il est donc prouvé que OA satisfait à l'équation donnée.

A la vérité, lorsqu'on cherche à déterminer les deux points de rencontre d'une droite et d'un cercle, on est conduit à la même équation que ci-dessus, et quelqu'un, dans le cas des racines imaginaires, pourra dire que nos points A et A' ne sont pas de telles rencontres. Je suis du même avis; mais il ne s'agit pas d'accepter une Algèbre qui donnerait des choses qui n'existent pas; il s'agit de choisir entre l'Algèbre actuelle, qui dans la circonstance des racines imaginaires ne peut satisfaire aux équations qu'avec ce que Gergonne appelait des *non-sens*, des formes *inintelligibles* et en quelque sorte *cabalistiques;* avec ce que M. Hoüel appelle non moins judicieusement des *compensations d'absurdités;* oui, il s'agit de choisir entre cette Algèbre et une Algèbre autre qui dans tous les cas satisfait aux équations par des grandeurs réelles et constructibles.

Toutefois la nécessité de faire un tel choix est-elle bien établie, ou du moins l'alternative est-elle aussi étroite que je le suppose? Car, sans nous écarter de l'exemple ci-dessus :

Premièrement, quand une droite ne rencontre pas un cercle, n'existe-t-il pas déjà une construction bien connue qui est propre à figurer les conséquences de cette non-rencontre, et les analogies de ces conséquences avec toutes celles qu'aurait une rencontre véritable?... Qui donc ignore la théorie des *sécantes idéales* de M. Poncelet, sa belle théorie des *coniques supplémentaires*, etc.?

Et secondement, lorsqu'il y a à déterminer deux points sur une droite par leur point-milieu et par le produit de leurs distances à un point fixe de la droite, ces *éléments* qui subsistent toujours, c'est-à-dire lors même que les deux points sont imaginaires, ne conservent-ils pas avec les autres parties de la figure les mêmes relations que si ces deux points étaient réels? Autrement, et d'une manière générale, n'échappera-t-on pas toujours à la nécessité de faire entrer explicitement les objets imaginaires, *points* ou *lignes*, dans les raisonnements s'ils y sont toujours représentés par des éléments *réels?* Ou, autrement encore, à quoi bon la représentation géométrique (la *réalisation*) des racines imaginaires, s'il suffit à nos recherches de considérer leurs fonctions symétriques?... Enfin qui donc ignore le grand parti que M. CHASLES a tiré de *la représentation des grandeurs imaginaires par leurs éléments réels?*

Ainsi, d'une part, la représentation directe des imaginaires pourrait se faire autrement que par les chemins inclinés auxquels la nouvelle doctrine fait correspondre ses nombres directifs; et d'autre part cette représentation serait sans utilité positive.

Certes, ma conviction ne serait pas entière si, de moi-même, je ne portais pas la discussion sur ce terrain; et de plus, ma thèse ne manquerait-elle pas de vérité si elle pouvait recevoir quelque contradiction des résultats que nous devons aux deux illustres maîtres que je viens de nommer?...

(*La fin prochainement.*)