NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABEL TRANSON

Application de l'algèbre directive à la géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 7 (1868), p. 145-157

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1868_2_7__145_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1868, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

APPLICATION DE L'ALGÈBRE DIRECTIVE A LA GÉOMÉTRIE;

PAR M. ABEL TRANSON.

I.

x et y étant deux nombres directifs (*) qui représentent deux chemins tracés sur un même plan et issus d'une même origine ou de deux origines différentes, l'équation algébrique $F(x, y) = 0$ déterminera pour chaque valeur de la variable x un nombre de valeurs de la fonction y égal au degré de la plus haute puissance de cette lettre dans la fonction $F(x, y)$. Ainsi, quand l'extrémité de la variable trace sur le plan une figure quelconque, l'extrémité de la fonction trace un certain nombre de figures correspondantes. L'équation proposée est donc propre à représenter une transformation multiple de toute figure tracée sur un plan.

La transformation sera dite algébrique si $F(x, y)$ est elle-même une fonction algébrique, et on voit ce que serait une transformation transcendante. Les points marqués par les extrémités de la variable seront des *points transformés*, et les points correspondants marqués par l'extrémité de la fonction seront des *points transformants*.

Une équation entre deux variables directives n'est donc pas, comme une équation entre deux coordonnées de Descartes ou bien de Plucker, le symbole d'une ligne déterminée; c'est celui d'une certaine corrélation entre

(*) Pour la définition et pour le calcul des *nombres directifs*, voir l'article : *Démonstration de deux théorèmes d'algèbre* (*Nouvelles Annales*, 1868).

toute ligne qu'on voudra se donner arbitrairement et d'autres lignes qui seront comme engendrées par la première au moyen de cette équation. Les théories algébriques trouveront ici comme dans tout système de géométrie analytique une interprétation, mais une interprétation sujette à moins de rectrictions que dans les systèmes pratiqués jusqu'ici, parce qu'une correspondance plus exacte sera établie entre la Géométrie et l'Algèbre. Pour en citer dès ce moment un exemple, tandis que deux courbes algébriques des ordres m et n sont dites avoir mn points communs, mais avec la rectriction expresse qu'on doit entendre ce résultat dans un sens purement *analytique*, vu que deux telles courbes peuvent n'avoir en effet *aucune rencontre!* Il arrive au contraire que deux transformations algébriques des ordres m et n donnent toujours lieu à mn points transformés qui reçoivent des deux équations correspondantes les mêmes points transformants.

Sur le plan où Descartes a construit sa Géométrie analytique, l'Algèbre peut produire à l'aise ses nombres positifs et ses nombres négatifs; mais comme toutes les places y sont marquées d'avance à l'aide des signes $+$ et $-$, il n'en reste aucune pour les nombres qui ne sont ni positifs ni négatifs! Cependant la théorie du calcul directif change les dispositions de la scène et elle y fait tenir les principaux rôles précisément par ces mêmes nombres prétendus imaginaires, que l'enseignement actuel considère comme des symboles *dénués de toute signification!*

Ne pouvant pas avoir ici d'autre objet que de faire pressentir par un petit nombre d'exemples l'utilité de la nouvelle doctrine, je montrerai sommairement que la transformation du premier ordre renferme les lois de la similitude; j'exposerai ensuite quelques propriétés générales des transformations d'un ordre quelconque; et enfin je déduirai de l'équation du second degré plusieurs relations curieuses entre certaines classes de courbes.

II.

L'équation du premier degré entre deux variables directives correspond à une transformation des figures planes par similitude. En effet, supposons d'abord que dans l'équation

$$y = b + ax$$

le coefficient a soit un nombre sans inclinaison ; y sera en grandeur et en direction le troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont : 1° le chemin correspondant au nombre b ; 2° un chemin parallèle à celui que x représente, mais avec une longueur augmentée dans le rapport du nombre a à l'unité. Si au contraire a est un nombre incliné de l'angle ω sur la direction positive, il faudra faire tourner de ce même angle le côté de triangle que dans la première supposition on avait fait parallèle à x. C'est pourquoi dans le premier cas la figure transformante est homothétique à la figure transformée, au lieu que dans le second les deux figures sont encore semblables, mais non placées semblablement. Dans les deux cas la valeur $x = 0$ donnant lieu à $y = b$, il s'ensuit que le point $y = b$ est le transformant de l'origine des x ; ou en d'autres termes, ce point et l'origine sont homologues l'un de l'autre dans les deux systèmes semblables des x et des y.

Si les x et les y ont une même origine, en posant $y_1 = x$ on trouvera le point unique qui est lui-même son transformant. Sa position est déterminée par

$$y_1 = x_1 = \frac{b}{1 - a}.$$

c'est le *centre de similitude* des deux systèmes des x et des y, et cela est vrai, que ces deux systèmes semblables soient ou non semblablement placés. Dans les systèmes homothétiques a est un nombre positif, et alors ce point est un centre de similitude *directe ;* lorsque a est négatif, c'est un centre de similitude *inverse.*

Ceci entendu, le célèbre théorème relatif à la situation en ligne droite des centres de similitude de trois systèmes semblables considérées deux à deux est facile à démontrer.

Soient les deux transformations du premier degré

$$y = ax,$$
$$z = a'x + b';$$

ici le centre de similitude des x et des y a été pris pour origine ; et, pour éviter toute confusion, on a représenté par z la seconde fonction transformante. Le centre de similitude des x et des z est déterminé par

$$z_1 = \frac{b'}{1 - a'};$$

et comme la relation entre les deux systèmes des y et des z est exprimée par l'équation

$$y = \frac{a}{a'}(z - b'),$$

le centre de similitude de ces deux systèmes est défini par

$$z_2 = \frac{b'}{1 - \frac{a'}{a}}.$$

Or si les coefficients a et a' sont des nombres positifs ou négatifs, c'est-à-dire sans autre inclinaison que 0 ou 180 degrés, les dénominateurs $1 - a'$ et $1 - \frac{a'}{a}$ sont eux-mêmes des nombres positifs ou négatifs ; par conséquent les chemins qui correspondent à z_1 et z_2 et qui ont leurs points de départ à l'origine, sont placés sur une même ligne, sur la même ligne que le chemin b', mais dans le même sens ou dans des sens opposés selon les signes des dénominateurs. Donc les trois centres de similitude, celui des y et des x, celui des x et des z, celui des z et des y, sont sur une même droite. D'ailleurs, ou bien les coefficients a, a', $\frac{a}{a'}$ sont tous les trois positifs, ou bien il y en a deux négatifs et un seul positif ; c'est pourquoi les trois centres trouvés ci-dessus en ligne droite sont, ou bien trois centres de similitude directe, ou bien deux centres de similitude inverse combinés avec un centre de similitude directe. De là résulte le théorème en question.

Nota. — La transformation du premier ordre étant évidemment la seule qui transforme toute ligne droite en une autre droite, je l'appellerai à cause de cela une *transformation linéaire*. Une transformation linéaire est déterminée soit lorsqu'on donne les transformants de deux points ; ou bien lorsque avec le transformant d'un point on donne le rapport de grandeur et celui d'inclinaison de deux lignes homologues des deux systèmes semblables, double rapport exprimé par le nombre directif a qu'on appellera le *coefficient de similitude*.

III.

Soit $F(x, y) = 0$ une transformation d'ordre quelconque. On peut démontrer que la région infiniment petite autour d'un point transformant est toujours, comme dans une transformation linéaire, semblable à la région infiniment petite qui est autour du point transformé. Mais tandis que dans une transformation linéaire le coefficient de similitude entre deux telles régions est constant dans toute l'étendue du plan, il varie d'un point à l'autre pour les transformations d'ordre supérieur au premier.

En effet, rappelons que, selon la théorie du calcul directif, l'accroissement dx de la variable représente en grandeur et en direction l'élément de la courbe décrite par l'extrémité de cette variable, et que dy représente à son tour l'élément correspondant de la courbe décrite par l'extrémité de la fonction; or, si on représente la dérivée de cette fonction par $\varphi(x, y)$ qui sera un nombre directif, la relation

$$dy = \varphi(x, y)\, dx$$

fait voir que le rapport de grandeur des éléments dy et dx, aussi bien que leur inclinaison mutuelle, reçoit une valeur déterminée pour un système de valeurs correspondantes de x et y, mais change avec ces valeurs. Si on fait tourner dx autour de l'extrémité de x, dy tournera du même angle; et si en même temps dx varie de grandeur, dy variera dans le même rapport; de sorte qu'à un triangle infiniment petit dont deux côtés seraient formés par deux de ces valeurs de dx correspondra un triangle semblable ayant pour côtés homologues les deux valeurs correspondantes de dy. Ceci est la propriété bien connue des fonctions que M. Cauchy appelle *monogènes*, et dont le caractère est d'avoir une dérivée unique pour toute valeur déterminée (réelle ou imaginaire) de la variable.

Soient maintenant x_0 et $x_0 + \Delta x_0$ deux points transformés, y_0 et $y_0 + \Delta y_0$ leurs transformants déduits de l'équation $F(x, y) = 0$; la transformation linéaire déterminée par le système de ces deux points sera représentée par l'équation

$$(y - y_0)\,\Delta x_0 - (x - x_0)\,\Delta y_0 = 0,$$

laquelle se réduira, si le second point est infiniment voisin du premier, à la suivante :

$$(y - y_0)\frac{dF}{dy_0} + (x - x_0)\frac{dF}{dx_0} = 0.$$

La similitude que cette transformation linéaire exprime dans toute l'étendue du plan est précisément celle que la relation $F(x, y) = 0$ procure entre les régions infiniment voisines des points correspondants x_0, y_0. Aux environs de ces points et à ne considérer que les infiniment petits du premier ordre les deux transformations coïncident. Donc on peut dire par analogie que dans les régions infiniment voisines des points x_0 et y_0 la transformation linéaire est *tangente* à la transformation d'ordre supérieur. Et il est assez évident, sans entrer dans aucun détail, que toutes les propriétés des courbes algébriques relativement à leurs tangentes auront ici leurs analogues.

IV.

Si dans l'équation à deux variables directives

$$F(x, y) = 0,$$

on remplace x et y par $x' + a$ et $y' + b$ respectivement, cela revient à substituer aux deux variables qui pouvaient avoir primitivement une origine commune, deux variables nouvelles ayant des origines distinctes, et notamment à prendre l'extrémité du chemin mesuré par a pour origine des x', et l'extrémité du chemin mesuré par b pour celle des y'.

Par de tels changements de l'origine, l'équation générale du second degré pourra être débarrassée de ses termes du premier dégré, si toutefois la fonction $B^2 - 4AC$ n'est pas nulle; or une telle équation donnera généralement pour y la valeur suivante :

$$y = -\frac{Bx}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 - 4AF}.$$

Si l'on pose

$$z = -\frac{Bx}{2A},$$

il viendra

$$y = z \pm \sqrt{Mz^2 + N}.$$

Ici les z auxquels on peut attribuer la même origine qu'aux y représentent une transformation linéaire des x; de sorte que la transformation générale du second degré se compose d'une première transformation par similitude, laquelle, à la vérité, serait nulle dans le cas de $B = 0$, suivie d'une seconde transformation représentée par une irrationnelle du second degré. Pour les deux valeurs de z qui annulent le radical, on a deux points à l'égard desquels la transformation du second ordre se réduit à la transformation linéaire. Ces deux valeurs

$$z_1 = +\sqrt{-\frac{N}{M}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\sqrt{-\frac{N}{M}}$$

mesurent deux chemins de grandeur égale, issus tous deux de l'origine et dirigés suivant une même droite, mais en sens contraire l'un de l'autre. On peut concevoir que cette droite ait été choisie primitivement pour celle des chemins positifs et des chemins négatifs; et d'ailleurs on peut toujours, à un moment quelconque du calcul, réaliser cette supposition en augmentant d'un même angle convenablement choisi les inclinaisons de tous les paramètres de l'équation proposée. Dès lors les deux valeurs ci-dessus de z seront l'une positive que je représenterai par $+c$, et l'autre négative par $-c$; enfin je me bornerai à discuter le cas de $M = +1$; ce qui revient finalement à supposer que l'équation primitive était

$$y^2 - 2zy + c^2 = 0,$$

donnant lieu aux deux valeurs

$$(1)\qquad y_1 = z + \sqrt{z^2 - c^2}, \quad y_2 = z - \sqrt{z^2 - c^2}.$$

Appelons C et C′ les extrémités des deux chemins issus de l'origine et mesurés par $+c$ et $-c$; Z l'extrémité du chemin mesuré par z. D'après les principes du calcul directif, les facteurs $z-c$ et $z+c$ correspondent respectivement aux chemins CZ, C′Z; et les nombres $+\sqrt{z^2-c^2}$, $-\sqrt{z^2-c^2}$, mesurent deux chemins d'une même longueur qui est égale à la moyenne géométrique des distances CZ, C′Z, chemins opposés l'un à l'autre et placés sur la bissectrice de l'angle CZC′. Donc si on marque sur cette bissectrice, et de part et d'autre du point Z, deux points Y_1 et Y_2 à une distance de Z égale à cette moyenne géométrique, la valeur y_1 mesurera OY_1 mené de l'origine à celui de ces points qui est au delà de Z par rapport à la base CC′ du triangle CC′Z, et y_2 le chemin OY_2 qui va au point placé en deçà. D'ailleurs les équations (1) donnent lieu aux relations suivantes :

$$\frac{dy_1}{y_1} = + \frac{dz}{\sqrt{z^2 - c^2}}, \quad \frac{dy_2}{y_2} = - \frac{dz}{\sqrt{z^2 - c^2}};$$

et comme l'égalité entre deux fractions directives entraîne que l'angle entre les deux termes de la première soit égal à l'angle entre les deux termes de la seconde, il s'ensuit que, si la courbe décrite par l'extrémité de la variable z fait un angle constant α avec la bissectrice des rayons vecteurs CZ, C′Z, les extrémités de y_1 et de y_2 parcourront des courbes faisant respectivement avec les deux rayons issus de l'origine OY_1 et OY_2 les angles constants α et $\pi - \alpha$. Or, dans la supposition qu'on vient de faire, le lieu des points Z coupe sous l'angle constant $\pi - \alpha$ toutes les ellipses ayant pour foyers communs C et C′. De là résulte la proposition suivante :

Théorème. — *Soient* C *et* C′ *les foyers communs d'un système d'ellipses,* S *une courbe qui traverse toutes ces ellipses sous un angle constant; si en chaque point* Z *de* S *on construit la bissectrice des rayons focaux, et que sur cette bissectrice, de part et d'autre de* Z, *on porte une longueur égale à la moyenne géométrique de ces deux rayons, les extrémités de ces longueurs auront pour lieux respectifs deux spirales logarithmiques.*

Deux cas particuliers méritent de nous arrêter. Supposons 1° que l'angle constant de la trajectoire avec les ellipses soit droit; cette trajectoire sera, comme on sait, une des hyperboles confocales aux ellipses traversées, et comme l'angle de l'élément dz avec la bissectrice sera nul, les angles de dy_1 et de dy_2 avec y_1 et y_2 respectivement seront nuls aussi, c'est-à-dire que les lieux des points Y_1 et Y_2 seront deux droites issues de l'origine : ce seront précisément les asymptotes de cette hyperbole, comme on le reconnaîtra en supposant l'extrémité de z à l'un de ses sommets ; car la bissectrice des rayons focaux sera alors une perpendiculaire à l'axe transverse, et leur moyenne géométrique sera égale au demi-axe non transverse. Supposons 2° que l'angle de la trajectoire soit nul, c'est-à-dire que la trajectoire se confonde avec l'une des ellipses du système; l'angle de dz avec l'un ou l'autre des nombres directifs $+\sqrt{z^2-c^2}$ et $-\sqrt{z^2-c^2}$ sera droit, et par conséquent seront droits aussi les angles de dy_1 et de dy_2 avec y_1 et y_2 respectivement. Donc, dans ce cas, les constructions expliquées ci-dessus pour les points Y_1 et Y_2 donneront lieu à deux cercles concentriques. L'un d'eux aura pour diamètre la demi-somme et l'autre la demi-différence des axes de l'ellipse que l'on considère ; car si on suppose le point Z à l'extrémité du petit axe, la moyenne géométrique dont il faudra augmenter ou diminuer le demi petit axe pour obtenir y_1 ou y_2, sera précisément égale à la demi-longueur du grand axe.

Le premier de ces deux résultats revient à dire que, dans une hyperbole, le segment de toute tangente compris entre les deux asymptotes est égal au double de la moyenne géométrique entre les deux rayons focaux relatifs au point de contact. Le second constitue une extension de la relation qui existe dans le cercle entre une corde perpendiculaire à un diamètre et les deux segments de ce diamètre; car si on considère, parmi toutes les ellipses confocales, celle dont le petit axe est nul, cette ellipse se réduit à la droite double qui réunit les deux foyers; la bissectrice des rayons vecteurs en un point quelconque, c'est la perpendiculaire à cette droite, et les deux rayons vecteurs en sont les deux segments.

Dans ces deux cas particuliers, le théorème énoncé ci-dessus pourra être vérifié aisément par les méthodes de la Géométrie analytique ordinaire, parce que dans l'un comme dans l'autre on connaît *à priori* les trajectoires correspondantes : dans le premier cas, une hyperbole; dans le second, une ellipse.

Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque les ellipses confocales sont traversées sous un angle constant autre que 0 ou 90 degrés, la recherche de la trajectoire est-elle une question qui dépende de l'algèbre proprement dite?... Il ne semble pas d'abord qu'il puisse en être ainsi, puisque la solution du problème des trajectoires a été l'une des premières applications du calcul intégral. Mais dans l'équation directive $y^2 - 2zy + c^2 = 0$, dont nous discutons la signification géométrique, si nous supposons que l'extrémité de la fonction y parcourt une spirale logarithmique, nous pourrons très-aisément déterminer la courbe correspondante décrite par l'extrémité de la variable z; et cela résulte de ce que toute transformation représentée par une équation $F(x, y) = 0$ jouit de la propriété très-remarquable que, *si on connaît l'équation en coordonnées ordinaires (polaires ou rectilignes) de la courbe décrite par l'extrémité de l'une des variables de cette équation directive, la détermination aussi en coordonnées ordinaires de la courbe correspondante décrite par l'extrémité de l'autre variable dépendra d'un simple calcul d'élimination.*

Supposons, en effet, que les deux courbes des x et des y soient représentées respectivement par les deux équations polaires

$$(2) \qquad \varphi(r, \varepsilon) = 0, \quad \psi(\rho, \omega) = 0,$$

on pourra remplacer, dans l'équation directive, x et y respectivement par les sommes des deux nombres perpendiculaires entre eux, savoir :

$$x \text{ par } r\cos\varepsilon + ir\sin\varepsilon,$$
$$y \text{ par } \rho\cos\omega + i\rho\sin\omega,$$

expressions dans lesquelles i est, comme à l'ordinaire, le symbole de la perpendicularité, l'équivalent de $\sqrt{-1}$. Par ces substitutions, l'équation directive $F(x, y) = 0$ prendra la forme

$$P + iQ = 0,$$

laquelle donne lieu aux deux équations distinctes

$$P = 0, \quad Q = 0.$$

La combinaison de ces deux équations avec celle des équations (2) que l'on suppose connue permettra d'éliminer les coordonnées relatives à la courbe correspondante à cette équation, et fera connaître l'équation de l'autre courbe.

L'application de ce principe à l'équation

$$y^2 - 2zy + c^2 = 0$$

est facile ; car en remplaçant y par $r\cos\varepsilon + ir\sin\varepsilon$, il vient

$$z = \frac{r^2 + c^2}{2r}\cos\varepsilon + i\,\frac{r^2 - c^2}{2r}\sin\varepsilon,$$

de sorte que les deux éléments perpendiculaires de z sont les suivants :

$$\rho\cos\omega = \frac{r^2 + c^2}{2r}\cos\varepsilon,\quad \rho\sin\omega = \frac{r^2 - c^2}{2r}\sin\varepsilon.$$

Donc si la courbe des y est une spirale logarithmique, pour avoir l'équation de la courbe qui coupe sous un angle constant toutes les ellipses dont les foyers sont en $+c$ et $-c$, il faut éliminer r et ε entre les deux dernières équations et la suivante :

$$r = ae^{\frac{\varepsilon}{m}}.$$

Relativement aux transformations d'ordre supérieur et dès le second ordre, il y a à faire une remarque importante. La variable peut passer d'une valeur x_1 à une valeur x_2 par une infinité de chemins différents. A x_1 correspondront m valeurs de y qui marqueront les points de départ des chemins parcourus par les m fonctions distinctes que l'équation est supposée impliquer ; à x_2 correspondront m autres valeurs qui marqueront leurs points d'arrivée. Or, tandis qu'il y a entre x_1 et x_2 des chemins de la variable qui font toujours parvenir chacune des m fonctions de son point de départ à la même arrivée, il en est d'autres pour lesquels les m fonctions échangent entre elles leurs points d'arrivée. Les conditions et les lois de ces échanges ont été mises en lumière par M. Puiseux dans un Mémoire inséré au *Journal de M. Liouville* (année 1850).

(*La suite prochainement.*)