NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. SARTIAUX

# Sur les courbes du troisième ordre

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 6 (1867), p. 68-73

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__68_0>

# SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE;

Par M. A. SARTIAUX,
Élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

Deux courbes du troisième ordre ont, comme on sait, neuf points communs; ces neuf points ne sont pas distincts, c'est-à-dire qu'il faut un dixième point pour déterminer les courbes passant par ces points. Cela ressort de l'équation générale $s_3 + \lambda s'_3 = 0$ des courbes du troisième ordre passant par l'intersection des courbes $s_3 = 0$ et $s'_3 = 0$.

Cela posé, considérons les intersections d'une courbe du troisième ordre par un triangle, et les courbes du même ordre passant par les points communs. Supposons trois des points, chacun étant pris sur un côté du triangle, en ligne droite, et forçons les courbes passant par ces neuf points à passer par un quatrième point situé sur la ligne droite qui en contient déjà trois; ce qui est toujours possible d'après ce qui a été rappelé plus haut Il est évident alors que la courbe du troisième ordre se décompose en une droite et une conique, c'est-à-dire que les six points restants sont sur une conique. Donc :

1° Si par trois points en ligne droite d'une courbe du troisième ordre on fait passer trois droites, les six autres points d'intersection sont sur une conique.

Comme sur une tangente d'inflexion il y a trois points de la courbe en ligne droite, nous voyons que :

2° Si par un point d'inflexion d'une courbe du troisième ordre on mène trois sécantes, les six points d'intersection sont sur une conique.

Supposons enfin que les trois droites coïncident, et nous arrivons à cette conclusion :

3° Si l'on mène par un point d'inflexion d'une courbe du troisième ordre une sécante, on peut mener une conique ayant aux deux points d'intersection un contact du deuxième ordre avec la courbe.

Si donc nous voulons avoir le nombre des coniques qui ayant en un point donné d'une courbe du troisième ordre un contact du second ordre, ont aussi en un autre point un contact du second ordre, il suffit de remarquer qu'il y a autant de ces coniques que de droites joignant le point donné aux points d'inflexion de la courbe. Or une courbe du troisième ordre a en général *neuf* points d'inflexion ; on a donc ce théorème :

I. *Parmi les coniques qui ont avec une courbe du troisième ordre un contact du second ordre en un point donné de cette courbe, il y en a en général* neuf *qui ont encore avec la courbe un contact du second ordre en un autre point.*

Trois de ces coniques seulement sont réelles, puisque trois seulement des points d'inflexion sont réels. On voit par l'application du théorème 1° :

*Que les points de contact des coniques correspondantes à trois points d'inflexion en ligne droite sont sur une même conique ayant avec la courbe un contact du second ordre au point donné.*

Il suffit pour le voir de faire concourir au point donné les trois sécantes passant par les points d'inflexion en ligne droite. Par les neuf points d'inflexion passent, comme on sait, douze droites sur lesquelles ces points sont distribués par groupes de trois. Ainsi les neuf points de contact des neuf coniques ayant avec la courbe deux contacts du second ordre, dont l'un en un point donné, sont distribués sur douze coniques ayant entre elles et avec la courbe un contact du second ordre au point donné. Lorsque la courbe du troisième ordre a un point double, le nombre des points d'inflexion se réduit à trois; on n'a plus que trois coniques qui correspondent aux points d'inflexion. Lorsque la courbe a un point de rebroussement, il n'y a plus qu'un point d'inflexion et par suite une conique. C'est le théorème I énoncé par M. de Jonquières (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. IV, p. 508) (*).

II. Nous avons vu que si de trois points en ligne droite d'une courbe du troisième ordre on mène trois sécantes, les six points d'intersection sont sur une conique. Supposons, comme application de ce théorème, que des trois points d'intersection de la courbe avec une tangente on mène trois sécantes, que l'une d'elles soit tangente à la courbe en un point et que les deux autres sécantes qui sont confondues passent par ce point de contact, la conique passant par les six points sera une conique ayant avec la courbe un contact du troisième ordre en un point, du premier en un autre. Donc :

III. *Si d'un point d'une courbe du troisième ordre on mène les quatre tangentes distinctes de la tangente au point donné, on peut mener trois coniques ayant en l'un des points de contact un contact du troisième ordre avec la courbe et qui touchent la courbe en un autre point.*

C'est le théorème II énoncé à l'endroit cité. Ce deuxième point de contact s'obtient en joignant le point de contact de l'une des tangentes aux points de contact des trois autres tangentes et prenant le troisième point

(*) On ne tient pas compte, en énonçant ces résultats, des solutions singulières qn'introduit la presence soit d'un point double soit d'un point de rebroussement.

d'intersection de ces sécantes avec la courbe. Comme un point double diminue la classe de deux unités, un point de rebroussement de trois, il ne reste dans ces cas qu'une de ces coniques ou aucune.

Revenons au cas général et considérons les points de contact des coniques ayant un contact du troisième ordre avec la courbe en l'un des points de contact des quatre tangentes menées d'un point O de la courbe; ces points sont par groupes de deux sur des droites qui concourent au point O. En effet, les points de contact des quatre tangentes sont sur la conique polaire du point O, conique tangente en O à la courbe. Si l'on prend les intersections avec la courbe de la tangente au point O, de la sécante joignant deux des points de contact des tangentes et de celle qui joint les deux autres, les trois points d'intersection sont en ligne droite, d'après la réciproque évidente du théorème I. Ce résultat ressortait encore du théorème de M. Chasles cité au bas de la page 505, en considérant parmi les coniques passant par les quatre points de contact des tangentes : 1° la conique polaire; 2° les coniques composées de deux droites joignant deux à deux les points de contact des tangentes. On peut encore appliquer le théorème 1°, et l'on a cet énoncé :

IV. *Supposons que d'un point* O *d'une courbe du troisième ordre on mène les quatre tangentes distinctes de la tangente au point* O. *On peut, en chacun des points de contact de ces tangentes, mener une conique ayant en ce point un contact du quatrième ordre avec la courbe; ces coniques la rencontrent encore en un sixième point. Ces points, joints aux points de contact correspondants, forment quatre droites qui passent par le point où la tangente au point* O *rencontre la courbe du troisième ordre.*

V. On peut encore tirer du théorème 1° la conclusion connue qui suit :

*Les vingt-sept points de contact des tangentes menées des points d'inflexion à la courbe jouissent de cette propriété qu'une conique peut y avoir avec la courbe un contact du cinquième ordre.*

*Nota.* — On pouvait encore arriver à trouver le nombre des coniques ayant avec une courbe du troisième ordre deux contacts du second ordre dont l'un en un point donné. Il suffit de rappeler que lorsqu'une sécante rencontre une courbe algébrique, si $\rho$ est rayon de courbure en un des points d'intersection, $\alpha$ l'angle de la sécante avec la normale, on a

$$\sum \frac{1}{\rho \cos^3 \alpha} = 0.$$

(Mannheim.)

Si la sécante passe par un point d'inflexion et que l'on imagine, ce qui est toujours possible, une conique osculatrice en l'un des points d'intersection et tangente en l'autre, cette conique sera, d'après la relation, osculatrice au second point. On tirera les mêmes conclusions que précédemment.

On peut enfin déduire de cette étude une propriété des surfaces du troisième ordre.

Par une droite donnée on mène les douze plans tangents à une surface du troisième ordre. Il existe pour chaque point de contact onze surfaces du second ordre osculatrices en ce point à la surface, tangentes en un autre et telles, que suivant les trois droites qui joignent le point de contact aux points d'intersection de la surface avec la droite donnée, les deux surfaces ont un contact du troisième ordre.

Les seconds points où les surfacee se touchent s'obtiennent en prenant les intersections avec la surface des droites joignant deux points de contact des plans tangents.