Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 551-563
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__551_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question de Licence

(voir 2e série, t. IV, p. 424);

PAR M. GIGON,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

On propose d'intégrer les équations simultanées

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + u'y - v'z = 0, \\[2ex] \dfrac{dz}{dx} + v'y + u'z = 0; \end{cases}$$

u' et v' désignant les dérivées de deux fonctions données u et v de la variable x. (Faculté des Sciences de Paris, juillet 1865.)

Solution. — Ajoutons ensemble les deux équations (1) après avoir multiplié la seconde par $\sqrt{-1}$, il vient

$$(2)\quad \frac{dy + dz\sqrt{-1}}{dx} + u'(y + z\sqrt{-1}) + v'\sqrt{-1}(y + z\sqrt{-1}) = 0.$$

Cette équation renfermant une partie réelle et une partie imaginaire est équivalente, à elle seule, au système des deux équations (1).

En posant

$$(3) \qquad s = y + z\sqrt{-1}.$$

l'équation (2) se transforme en la suivante

$$(2\ bis) \qquad \frac{ds}{dx} + (u' + v'\sqrt{-1})\, s = 0,$$

qu'on met sous la forme

$$(2\ ter) \qquad \frac{ds}{s} + (u' + v'\sqrt{-1})\, dx = 0.$$

Dans cette dernière équation, les variables sont séparées; on intègre, et l'on trouve, en désignant par $A + B\sqrt{-1}$ une constante arbitraire imaginaire,

$$(4) \qquad \log s + (u + v\sqrt{-1}) = A + B\sqrt{-1}.$$

En séparant dans (4) les parties réelles et les parties imaginaires, on obtiendra les deux intégrales du système (1).

On pose

$$s = m(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha) = me^{\alpha\sqrt{-1}},$$

et, vu (3), il s'ensuit

$$m = (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \alpha = \text{arc tang}\,\frac{z}{y}; \quad \log s = \log m + \alpha\sqrt{-1}.$$

Observons que dans ce calcul tous les logarithmes indiqués sont népériens.

L'équation (4) s'écrit donc

$$(4\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} &\log(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{-1}\,\text{arc tang}\,\frac{z}{y} + u + v\sqrt{-1} \\ &\qquad = A + B\sqrt{-1}; \end{aligned} \right.$$

et par suite, les deux intégrales réelles du système proposé (1), résolues par rapport aux deux constantes arbitraires réelles A et B, sont les suivantes :

$$(5)\qquad \begin{cases} \log(y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} + u = \mathrm{A}, \\ \operatorname{arc\,tang} \dfrac{z}{y} + v = \mathrm{B}. \end{cases}$$

Ce résultat se vérifie sans difficulté.

Même question ;

Par le P. PÉPIN, S. J.

Intégration des équations simultanées

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} + u'y - v'z = 0,$$

$$(2)\qquad \frac{dz}{dx} + v'y + u'z = 0,$$

u', v' désignant les dérivées de deux fonctions données u, v de la variable x.

Première solution. — Multipliant la première équation par y, la seconde par z, et ajoutant les produits, on obtient

$$y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = -u'(y^2+z^2).$$

Posons

$$y^2+z^2 = t;\quad \text{d'où}\quad y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dt}{dx},$$

l'équation précédente pourra s'écrire

$$\frac{dt}{dx} = -2u't,\quad \text{ou}\quad \frac{dt}{t} = -2\,du;$$

d'où

$$\mathrm{L}t = -2u + \text{const};$$

(3) $$t = \mathrm{A}e^{-2u} = y^2 + z^2,$$

A désignant une constante arbitraire.

Multiplions l'équation (1) par z, et l'équation (2) par y, puis retranchons, nous obtiendrons l'équation

$$z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx} = v'(y^2 + z^2),$$

ou

$$\frac{d\left(\frac{y}{z}\right)}{1 + \left(\frac{y}{z}\right)^2} = dv,$$

dont l'intégrale est

$$\text{arc tang}\,\frac{y}{z} = v + c,$$

d'où

(4) $$\frac{y}{z} = \text{tang}(v + c),$$

c étant une constante arbitraire.

En résolvant les équations (3) et (4) par rapport à y, z, et posant $\sqrt{\mathrm{A}} = c'$, on obtient pour intégrales générales des équations proposées

$$y = c'e^{-u}\sin(v + c), \quad z = c'e^{-u}\cos(v + c) \ (*).$$

*) Les équations (3) et (4) sont les intégrales générales (5) trouvées par M. Gigon (p. 553). Car l'équation (3)

$$y^2 + z^2 = \mathrm{A}e^{-2u}$$

donne immédiatement

$$\mathrm{L}(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + u = \text{const.} - \mathrm{A},$$

Seconde solution. — On peut arriver au même résultat par l'emploi d'un facteur constant.

Ajoutant les équations proposées, après avoir multiplié la seconde par $-i$, et remarquant qu'on a

$$\frac{v' + iu'}{u' - iv'} = +i, \quad i = \sqrt{-1},$$

on obtient

$$d(y - iz) + (u' - iv')\left[y - \frac{v' + iu'}{u' - iv'}\right] dx = 0;$$

$$\frac{d(y - iz)}{y - iz} = -d(u - iv),$$

d'où

$$L(y - iz) = -(u + a) + i(v + b);$$

$$y - iz = e^{-a} e^{-u} e^{i(v+b)} = e^{-a} e^{-u}[\cos(v + b) + i \sin(v + b)].$$

Enfin, en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires, nous aurons pour intégrales générales

$$y = e^{-a} e^{-u} \cos(v + b),$$

$$-z = e^{-a} e^{-u} \sin(v + b).$$

On fera coïncider ces formules avec les précédentes en remplaçant e^{-a} par c', et b par $c - \frac{\pi}{2}$.

Note. — M. Graindorge a resolu la question d'une manière à peu près semblable.

---

et de l'equation (4),

$$\frac{y}{z} = \text{tang}(v + c),$$

on deduit facilement

$$\text{arc tang}\frac{z}{y} + v = \text{const} = B.$$

G.

Question 825

(voir 2ᵉ série, t. VI, p. 478).

PAR M. WILLIÈRE DE THUIN.

Dans un triangle inscrit à une conique, le pôle d'un côté et les seconds points d'intersection de la courbe et des bissectrices des angles formés au sommet sont en ligne droite. (J.-J.-A. MATHIEU.)

Soit la conique

$$l\beta\gamma + m\alpha\gamma + n\alpha\beta = 0,$$

circonscrite au triangle dont les côtés sont

$$(\mathrm{AB}),\ \gamma = 0;\quad (\mathrm{BC}),\ \alpha = 0;\quad (\mathrm{CA}),\ \beta = 0.$$

Le pôle du côté BC est déterminé par l'intersection des deux tangentes

$$(1)\qquad l\beta + m\alpha = 0,\quad l\gamma + n\alpha = 0.$$

Les bissectrices des angles en A ont pour équations

$$\beta - \gamma = 0,\quad \beta + \gamma = 0.$$

En cherchant les points d'intersection de ces deux droites avec la courbe, on trouve qu'ils sont déterminés par les deux systèmes

$$(2)\qquad \beta - \gamma = 0,\quad l\gamma + (m + n)\alpha = 0,$$

$$(3)\qquad \beta + \gamma = 0,\quad \alpha(m - n) - l\gamma = 0.$$

La droite qui passe par ces deux points aura donc pour équation

$$ml\beta - nl\gamma + (m^2 - n^2)\alpha = 0;$$

et l'on voit que cette droite passe aussi par le pôle (1).

Note. — La même question a ete resolue par MM. Auguste Mace et Napoleon Porte, elèves du lycee de Grenoble; Alfred Giard, elève du lycee de Douai; Andre et Jarde, elèves du lycee Louis-le-Grand; Édouard Duvivier, du lycee de Bordeaux; Louis Plivard, Julien Welsch, L. Leclerc et Herment, eleves du lycee de Metz (classe de M. Ribout); Leon Barbier, du lycee de Strasbourg; Édouard Besson, du lycee de Besançon; Ch. Lesquier, du lycee de Caen; Henri Ledoux et Paul Endrès, du lycee de Douai; Alphonse Ellie, maître repetiteur au lycee de Bordeaux; E. Jasserou, elève du lycee de Besançon (classe de M. Chevilliet); A. Lemaître, maître repetiteur au lycee de Besançon.

M. Porte a donné une solution geométrique

Note sur la question 825;

PAR M. KOEHLER,
Capitaine du Genie

ÉNONCÉ. — *Dans un triangle inscrit à une conique, le pôle d'un côté et les seconds points d'intersection de la courbe avec les bissectrices des angles formés au sommet opposé sont en ligne droite.*

(J.-J.-A. MATHIEU.)

Le théorème dont il s'agit est un cas particulier d'une propriété plus générale des coniques, dont l'énoncé peut être présenté sous la forme suivante :

Lorsqu'un faisceau harmonique a son sommet en un point d'une conique, les droites qui joignent deux à deux les seconds points d'intersection des rayons conjugués et de la courbe, forment un couple de droites conjuguées par rapport à la conique.

Soit O (a, a', b, b') le faisceau harmonique; il faut prouver que chacune des droites aa', bb' passe par le pôle de l'autre. En vertu d'une propriété fondamentale des coniques, le faisceau O (a, a', b, b') et le faisceau formé autour du point b' par les droites $b'a$, $b'a'$, $b'b$ et par la tangente b'P ont leurs rapports anharmoniques égaux ; on peut donc écrire

$$O(a, a', b, b') = b'(a, a', b, P).$$

Comme on a

$$\frac{\sin(a, b)}{\sin(a, b')} : \frac{\sin(a', b)}{\sin(a', b')} = -1,$$

on peut établir la correspondance de la manière suivante :

$$O(a, a', b, b') = b'(a, b, a', P),$$

ce qui ne serait pas permis, si le rapport anharmonique avait une valeur quelconque. On voit de même que

$$O(a, a', b, b') = b(a, b', a', P).$$

Les deux faisceaux formés en b et en b' sont donc tous deux harmoniques, et de plus deux rayons correspondants coïncident suivant bb' ; donc, les points d'intersection a, a', P des trois autres couples de rayons sont en ligne droite ; en d'autres termes, la droite aa' passe par le pôle P de bb', ce qu'il fallait prouver.

On peut arriver encore très-facilement au même théorème en suivant une marche employée souvent par M. Poncelet, dans le *Traité des Propriétés projectives des figures*.

Soient aOa' un angle inscrit dans un cercle ; Ob, Ob' les bissectrices de cet angle et de son supplément. La droite bb' est un diamètre, la droite aa' lui est perpendiculaire, puisque les arcs ab, ba' sont égaux. Donc, le pôle P de aa' est sur bb', et le pôle de bb' est à l'infini sur aa'. Transformons la figure par homographie, ou par simple perspective ; le cercle devient une conique quelconque, le faisceau $O(a, a', b, b')$ devient un faisceau harmonique quelconque, et les droites aa', bb' restent conjuguées.

On peut énoncer immédiatement le théorème corrélatif suivant, dont la démonstration directe serait d'ailleurs aussi simple.

Si, sur une tangente à une conique, on prend quatre points en rapport harmonique, les points d'intersection des secondes tangentes menées à la courbe par les points conjugués formeront un couple de points conjugués par rapport à la conique.

Et comme cas particulier :

Dans tout triangle circonscrit à une conique, la polaire d'un sommet, la tangente parallèle au côté opposé et la seconde tangente menée à la courbe par le milieu de ce côté se coupent au même point.

Solution géométrique de la question 830;

PAR M. LÉON GEOFFROY,
Élève de l'École Centrale.

ÉNONCÉ. — *On donne dans un plan deux circonférences* O *et* O'; *un point* P *se meut sur la première* O; *l'enveloppe des polaires de ce point, par rapport à la circonférence* O', *est une conique; lorsque le centre de la circonférence* O' *se meut sur une circonférence* O'', *concentrique à la première* O, *quel lieu décrit le centre de cette conique?*

1[er] *Cas.* — Supposons d'abord que le centre O' soit en dehors de la circonférence O; dans ce cas, l'enveloppe des polaires du point P, c'est-à-dire la polaire réciproque ω de la circonférence O, est une hyperbole.

En effet, il y a toujours deux tangentes O'A, O'B à la circonférence O, se coupant en O'. Les pôles de ces droites

O′A, O′B appartiennent à la polaire réciproque ω ; mais ces deux pôles sont à l'infini ; la polaire réciproque ω est donc une conique ayant deux branches infinies dans des sens différents ; c'est donc une hyperbole.

Je dis maintenant que le centre a de cette conique se trouve sur la droite des centres OO′. En effet, les tangentes à la conique ω aux points situés à l'infini sont les polaires des points A et B du cercle O, c'est-à-dire des droites CD, C′D′, qui peuvent facilement se construire, puisque ce sont les cordes de contact des couples de tangentes issues de A et de B ; ces droites CD, C′D′ sont les asymptotes de l'hyperbole ω, et leur intersection a donne le centre de la conique ω. Or, il résulte des constructions indiquées, qui sont symétriques de part et d'autre de OO′, que le point a est sur OO′.

Quand le centre O′ décrira une circonférence O″ concentrique à O, la figure dont nous avons indiqué la construction ne fera que tourner, sans déformation, autour du point O. Le lieu du centre a est donc une circonférence concentrique à O, et qu'il est facile de tracer, en effectuant les constructions indiquées pour la détermination du point a.

2e *Cas*. — Supposons maintenant que le centre O′ soit en dedans du cercle O ; la polaire réciproque ω est alors une conique sans branche infinie, c'est-à-dire une ellipse. La droite OO′ est un axe de cette ellipse. En effet, considérons deux points quelconques A, A′ du cercle O, symétriquement placés par rapport à OO′, les cordes de contact correspondantes du cercle O′ se coupent sur OO′, et sont également inclinées sur cette droite ; les points A et A′ étant quelconques, nous voyons que toutes les tangentes à l'ellipse ω se coupent deux à deux sur OO′ et qu'elles sont alors également inclinées sur cette droite, ce qui prouve que OO′ est un axe de l'ellipse.

Il nous est également facile, dans ce cas, de déterminer la position du centre de l'ellipse ω; prenons les polaires des points L et L', où OO' coupe la circonférence O : ces polaires sont perpendiculaires à OO'; donc ce sont les tangentes aux extrémités d'un axe de l'ellipse ω; on construit donc ainsi l'un des axes de l'ellipse, en position et en grandeur, et, par suite, le centre a se trouve déterminé de position.

Quand O' décrit le cercle O'', on voit, comme précédemment, que le centre a de l'ellipse décrit une circonférence dont le centre est en O.

3^e *Cas*. — Le centre O' peut enfin se trouver sur le cercle O, la polaire réciproque ω serait alors une parabole; ce qu'on verrait en remarquant qu'il n'y a alors qu'une seule tangente possible par O' au cercle O, c'est-à-dire que la conique ω n'a qu'une branche infinie. La recherche du centre a devient illusoire; ce centre passe à l'infini.

Solution analytique de la même question;

PAR M. AUGUSTE MACÉ,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

Je prends pour origine le centre O, et pour axes deux droites rectangulaires.

La circonférence O aura pour équation

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

et la circonférence O'

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2;$$

a, b étant les coordonnées du centre O'.

Si x', y' représentent les coordonnées du point P, on aura

$$(1) \qquad x'^2 + y'^2 = R^2;$$

et l'équation de la polaire de ce point, par rapport à la circonférence O′, sera

$$(2) \quad (x-a)x' + (y-b)y' - ax - by = r^2 - a^2 - b^2.$$

En égalant les rapports des dérivées des équations (1) et (2), prises par rapport à x' et à y', on a, de plus,

$$(3) \qquad \frac{x'}{x-a} = \frac{y'}{y-b}.$$

L'élimination de x', y' entre les équations (1), (2) et (3), donnera l'équation de l'enveloppe des polaires.

Or, de l'équation (3) on déduit

$$\frac{x'}{x-a} = \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \frac{\pm R}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}},$$

et

$$\frac{y'}{y-b} = \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = \frac{\pm R}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}.$$

En remplaçant x' et y' par leurs valeurs, dans l'équation (2), il vient

$$(4) \quad (ax + by + r^2 - a^2 - b^2)^2 = R^2[(x-a)^2 + (y-b)^2],$$

ce qui est l'équation de l'enveloppe des polaires.

Le centre de cette conique sera donné par les deux dérivées

$$(5) \qquad a(ax + by + r^2 - a^2 - b^2) = R^2(x-a),$$

$$(6) \qquad b(ax + by + r^2 - a^2 - b^2) = R^2(x-b).$$

Et, comme le point O′ se meut sur une circonférence O″

concentrique à la circonférence O, on doit avoir

$$(7) \qquad a^2 + b^2 = K^2.$$

Si, maintenant, nous éliminons a, b, entre les équations (5), (6) et (7), nous aurons le lieu du centre de la conique.

Or, de (4) et de (5) on tire

$$\frac{a}{b} = \frac{x-a}{y-b} = \frac{x}{y}, \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{\pm K}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Substituant les valeurs de a et de b dans l'équation

$$a(ax + by + r^2 - K^2) = R^2(x - a),$$

nous aurons pour l'équation du lieu

$$(R^2 - K^2)^2(x^2 + y^2) = K^2(R^2 + r^2 - K^2)^2.$$

Donc, le lieu du centre de la conique est une circonférence concentrique à la circonférence donnée O.

Note — Solutions analogues de MM. Willière; Graindorge; J. Welsch, Herment, L. Henning, élèves du lycee de Metz; Niebylowski, elève de l'École Normale.

L'un des Professeurs les plus distingués des Facultés des Sciences, M. Bourget, ayant bien voulu participer à la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, nous prévenons qu'à partir de 1868 les articles destinés au Journal peuvent être adressés à M. Bourget, rue de Reims, 6, Paris.

GERONO.