Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 526-528

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__526_2>

QUESTIONS.

836. Soient deux surfaces du second ordre S et T; ABCD le tétraèdre conjugué par rapport à ces deux sur-

faces, et Γ la courbe gauche d'intersection de S et T. Les plans polaires d'un point P, par rapport aux diverses surfaces du second ordre passant par la courbe Γ, tournent autour d'une droite Δ; les plans menés par la droite Δ et les sommets du tétraèdre ABCD forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant, quel que soit le point considéré P.

Plus particulièrement, les plans menés par une tangente quelconque à la courbe gauche Γ par les sommets du tétraèdre ABCD forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant. (L. Painvin.)

837. Étant donnée une surface du second ordre dont O est le centre, soit M un point quelconque de l'espace : 1° si le point M est extérieur à la surface, on mène une tangente MT, le diamètre conjugué OT de cette tangente, et le demi-diamètre OA conjugué du plan de ces deux droites; les points M, T, O, A sont les sommets d'un tétraèdre, soit V le volume du parallélipipède construit sur ce tétraèdre; 2° si le point M est intérieur à la surface, on mène une demi-corde MT, le demi-diamètre OB conjugué de cette demi-corde, et le demi-diamètre OA conjugué du plan de ces deux droites : les points B, T, O, A sont les sommets d'un tétraèdre, soit V le volume du parallélipipède construit sur ce tétraèdre.

Le volume V est ce que M. Aoust nomme la *puissance* du point M par rapport à la surface considérée (*Comptes rendus*, 1er semestre 1867, p. 590). A cette occasion, je signalerai la relation suivante.

Soit l'équation de la surface du second ordre

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0;$$

si x, y, z sont les coordonnées du point M, V le volume du parallélipipède défini ci-dessus, on a

$$(\mathrm{I}) \qquad f(x, y, z) = \pm \frac{\delta^3}{\Delta^2} V^2,$$

δ et Δ représentant les déterminants

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

On doit prendre le signe $+$ ou $-$ suivant que le point M est *extérieur* ou *intérieur* à la surface.

On sait d'ailleurs que si a, b, c sont les axes de la surface, on a

$$(\mathrm{II}) \qquad a^2 b^2 c^2 = -\frac{\Delta^3}{\delta^4}.$$

Les relations (I) et (II) rendent, pour ainsi dire, intuitives toutes les propriétés énoncées par M. Aoust (*loco citato*). (L. PAINVIN.)

838. Soit q_0 le quotient par $1.2.3\ldots p$ du produit de p nombres consécutifs, le premier étant $(a-1)p$; soit q_1 le quotient analogue, le premier nombre étant $(a-1)p-a$; q_2 le quotient analogue, le premier nombre étant $(a-1)p-2a$, et ainsi de suite, en s'arrêtant lorsqu'on trouve un premier nombre nul ou négatif; on aura la relation

$$a^p - 1 = q_0 - \frac{p}{1} q_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} q_2 - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} q_3 + \ldots.$$

(J.-J.-A. MATHIEU.)