Nouvelles annales de mathématiques

Chemin

Relation entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa polaire réciproque

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 49-57

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__49_0>

RELATION ENTRE LES RAYONS DE COURBURE D'UNE COURBE ET DE SA POLAIRE RÉCIPROQUE (*);

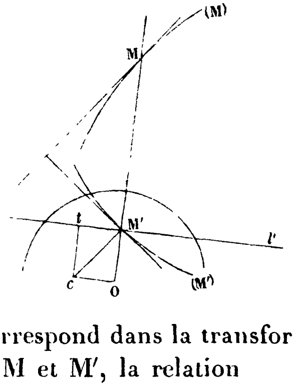
PAR M. CHEMIN,
Élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

Je dirai que deux points sont *correspondants*, quand l'un sera le point de contact de la polaire de l'autre avec son enveloppe.

Je prendrai toujours un cercle pour courbe auxiliaire de transformation.

Soient M un point de la première courbe, $M'l'$ la

FIG. 1.



droite qui lui correspond dans la transformation. On a, entre les points M et M', la relation

$$OM . OM' = a^2,$$

a étant le rayon du cercle de transformation. A chaque

(*) *Voir*, sur le même sujet, un Mémoire de M. Mannheim inséré dans le *Journal de M. Liouville*, 2e série, t. XI (1866), p. 193, intitulé : *Transformation par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure*. P.

point tel que M répondra un point M′, et le lieu géométrique de tous ces points sera la transformée par rayons vecteurs réciproques de la courbe lieu des points M. Supposons, pour un moment, que nous ayons déterminé cette transformée; alors nous pouvons facilement voir que la courbe polaire réciproque de la courbe (M) pourra être engendrée de la manière suivante : ce sera l'enveloppe du côté $M'l'$ d'un angle droit, se mouvant de manière que l'un de ses côtés passe constamment au point O, centre du cercle de transformation, tandis que son sommet se meut sur la courbe (M′). La considération du centre instantané de rotation nous donne immédiatement le point de contact. Pour cela, menons en M′ la normale à la courbe (M′), en O la perpendiculaire à OM′, et de leur point de rencontre c abaissons la perpendiculaire ct; le point t est le point de contact de $M'l'$ avec son enveloppe. Les deux points t et M sont deux points *correspondants*, d'après la définition donnée plus haut. Notre but est de déterminer la relation qui existe entre les rayons de courbure des deux courbes en ces points, relation qui s'exprime, ainsi qu'on va le voir, par une formule d'une remarquable simplicité.

Dans le cours de cette recherche, nous représenterons constamment par :

ν l'angle formé par la tangente et le prolongement du rayon vecteur, cet angle étant compté dans le sens des angles croissants;

n la normale polaire;

ρ le rayon de courbure;

ds l'élément de courbe;

$d\theta$ l'angle de contingence;

$d\omega$ l'élément d'angle polaire.

Chacune des quantités aura l'indice (1) quand elle se rapportera à la courbe M′, l'indice (2) pour la courbe lieu des points t; quant à la courbe M, les quantités qui en dépendent ne seront affectées d'aucun indice.

Nous ferons constamment usage des formules suivantes :

$$d\theta = d\omega + d\nu, \tag{1}$$

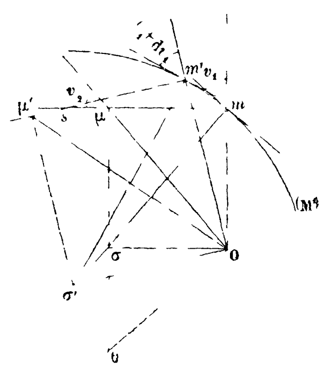
$$ds = n\,d\omega = \rho\,d\theta, \tag{2}$$

$$\nu + \nu_1 = \varpi; \tag{3}$$

leur démonstration étant connue, nous nous dispensons de la rapporter.

Soient, sur la courbe (M'), m et m' deux positions in-

Fig. 2.



finiment voisines du sommet de l'angle droit dont on a parlé plus haut; soient μ et μ' les points de contact avec leur enveloppe des deux côtés correspondants $m\mu$, $m'\mu'$; soient α l'angle $\widehat{\mu O m}$, α_1 l'angle $\widehat{\mu' O m'}$, nous avons immédiatement

$$\widehat{\mu O \mu'} = \alpha_1 - \alpha + d\omega_1 = d\omega_2.$$

Mais

$$d\omega_1 = d\omega; \quad \text{d'où} \quad d\omega_2 = \alpha_1 - \alpha + d\omega.$$

Or

$$\alpha = \frac{\varpi}{2} - \nu_1, \quad \alpha_1 = \frac{\varpi}{2} - (\nu_1 + d\nu_1);$$

donc

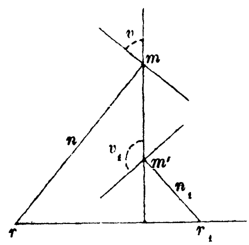
$$(4) \qquad d\omega_2 = d\omega - dv_1.$$

L'inspection de la *fig.* 2 montre immédiatement que

$$\widehat{msm'} = d\theta_2 = d\omega.$$

Maintenant cherchons n_2 : c'est la longueur comprise

FIG. 3.



entre le point μ et la perpendiculaire $O\theta$ à $O\mu$. Le triangle rectangle $\mu O\theta$ donne

$$\overline{O\mu}^2 = \overline{\mu\theta} \times \mu\sigma, \quad \text{ou bien} \quad \overline{n_1}^2 = \overline{n_2} . r;$$

d'où

$$(5) \qquad n_2 = \frac{\overline{n_1}^2}{r_1}.$$

De la formule (2) nous déduisons

$$\rho_2 = n_2 . \frac{d\omega_2}{d\theta_2}.$$

Toutes les quantités qui entrent dans le second membre de cette relation sont connues; nous avons donc

$$(6) \qquad \rho_2 = \frac{\overline{n_1}^2}{r_1} \times \frac{d\omega - dv_1}{d\omega}.$$

Mais de la formule (3) nous tirons

$$dv + dv_1 = 0,$$

et portant dans (6)

$$\rho_2 = \frac{\overline{n_1}^2}{r_1} \times \frac{d\omega + dv}{d\omega} = \frac{\overline{n_1}^2}{r_1} \times \frac{d\theta}{d\omega}.$$

Mais

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{n}{\rho}; \quad \text{donc} \quad \rho_2 = \frac{n_1^2}{r_1} \cdot \frac{n}{\rho}.$$

Or on a facilement

$$\frac{n_1}{r_1} = \frac{1}{\sin v_1}, \quad \frac{n}{r} = \frac{1}{\sin v}.$$

Substituant et remarquant que $rr_1 = a_2$, nous arrivons à

$$\rho_2 = \frac{a^2}{\rho \sin^3 v}, \quad \text{ou bien} \quad \rho\rho_2 \sin^3 v = a^2.$$

D'où ce théorème remarquable :

Théorème. — *Le produit des rayons de courbure aux points correspondants de deux courbes polaires réciproques l'une de l'autre, multiplié par le cube du sinus de l'angle formé par la tangente avec le prolongement du rayon vecteur* (angle compté comme on l'a dit plus haut), *est égal au carré du rayon du cercle de transformation.*

Cette relation est réciproque : on voit facilement que l'angle v_2 en μ est égal à l'angle v_1, et comme $v_1 + v = \varpi$, il en résulte que

$$v_2 + v = \varpi \quad \text{ou} \quad \sin v_2 = \sin v.$$

En partant du point μ et en déduisant par polarité réciproque le point M, on obtiendrait la relation

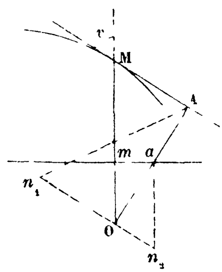
$$\rho_2 \rho_1 \sin^3 \nu_2 = a^2,$$

ou, d'après ce qu'on vient de dire,

$$\rho \rho_2 \sin^3 \nu = a^2.$$

On pourrait arriver à cette relation d'une manière moins directe, mais presque aussi simple, en procédant comme il suit. Soit ma la droite qui correspond au

Fig. 4.



point M de la courbe donnée; menons la tangente MA, nous obtiendrons le point de contact de ma, en prenant son intersection avec la perpendiculaire OA abaissée du point O sur MA. Or on a, par les triangles semblables,

$$\overline{Om} \cdot \overline{OM} = \overline{Oa} \cdot \overline{OA}.$$

Mais

$$\overline{Om} \cdot \overline{OM} = a^2; \quad \text{donc} \quad \overline{Oa} \cdot \overline{OA} = a^2.$$

Donc la courbe polaire réciproque par rapport à un cercle d'une courbe donnée est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire de cette même courbe par rapport au centre du cercle de transformation.

A propos de la démonstration de la formule qui lie les rayons de courbure aux points correspondants de deux courbes réciproques,

$$(1) \qquad \frac{n}{\rho} + \frac{n_1}{\rho_1} = 2, \qquad \text{(Nicolaïdès)}$$

j'ai énoncé (*Nouvelles Annales*, t. V, 2e série, p. 170) une formule analogue pour les courbes podaires

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{r} - \frac{\rho}{rn}.$$

Cette formule se ramène aisément à

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{r} - \frac{p\rho}{r^3},$$

p étant la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente à la courbe donnée. Ces deux formules vont nous résoudre la question. Entre les rayons de courbure ρ et ρ_1 en M et A, nous avons

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{r} - \frac{p\rho}{r^3}.$$

Mais

$$\frac{p}{r} = \sin\nu; \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\rho_1} = \frac{2}{r} - \frac{\rho \sin\nu}{r^2}.$$

La formule (1) donne

$$\frac{n_1}{\rho_1} + \frac{n_2}{\rho_2} = 2.$$

Mais

$$n_1 = \mathrm{A}n_1 = \mathrm{MO} = r,$$

d'après les propriétés des podaires; donc

$$(3) \qquad \frac{n_1}{\rho_1} = \frac{r_1}{\rho_1} = 2 - \frac{\rho \sin\nu}{r}.$$

Mais $n_2 = \overline{an_2}$, et des triangles semblables $\mathrm{O}ma$, $\mathrm{O}n_2a$, on déduit

$$n_2 = \frac{\overline{Oa}^2}{Om}.$$

Or

$$Oa = \frac{Om}{\sin v}; \quad \text{d'où} \quad n_2 = \frac{Om}{\sin^2 v}.$$

Et, puisque $OM.Om = a^2$,

$$Om = \frac{a^2}{r};$$

d'où

$$(4) \qquad n_2 = \frac{a^2}{r \sin^2 v} \quad \text{et} \quad \frac{n_2}{\rho_2} = \frac{a^2}{\rho_2 r \sin^2 v}.$$

Donc

$$\frac{n_1}{\rho_1} + \frac{n_2}{\rho_2} - 2 = 0$$

donne, en substituant,

$$\frac{\rho \sin v}{r} - \frac{a^2}{\rho_2 r \sin^2 v} = 0,$$

ou bien, en divisant par r et chassant le dénominateur,

$$\rho\rho_2 \sin^3 v = a^2.$$

C. Q. F. D.

Appliquons à un cas qui puisse fournir une vérification. Une conique étant donnée, si on la transforme au moyen d'un cercle ayant son centre au foyer, on obtient un cercle; donc

$$\rho_2 = \text{const.};$$

par suite,

$$\rho \sin^3 v = \text{const.}, \quad \text{mais} \quad \sin v = \cos i,$$

i étant l'angle formé par la normale et le rayon vecteur issu du foyer; donc

$$\rho \cos^3 i = \text{const.},$$

propriété connue des coniques. Cette même formule permettrait de montrer que la polaire réciproque d'une spirale logarithmique est une courbe du même genre.

On pourrait en déduire beaucoup d'autres conséquences que je développerai peut-être plus tard.