NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 466-475

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__466_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 767;

PAR M. E. PELLET,
Élève du lycee de Nîmes.

Les cercles circonscrits aux différents triangles semi-réguliers inscrits dans une ellipse ont pour centre radical commun le centre de cette ellipse.

Le lieu de leurs centres est une ellipse; leur enveloppe est une anallagmatique du quatrième ordre. (FOURET.)

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation de l'ellipse; $a\cos u$, $b\sin u$, les coordonnées

---

est alors représentée par les équations

$$z=0,\quad Q''x+R=0$$

Cette droite est par consequent parallele à l'axe des y, c'est-à-dire à l'axe moyen de l'ellipsoïde De plus, elle coupe le plan des xz, ou des ombilics, au point

$$z=0,\quad y=0,\quad x=-\frac{R}{Q''},$$

qui est le pôle de l'axe des z, ou de la normale à l'ombilic, par rapport a l'ellipse principale dont le plan est perpendiculaire à l'axe moyen.

G.

(*) Nous supprimons les calculs que M. Duvivier a faits à ce sujet, l'équation du lieu ayant dejà eté donnée par M. Welsch (*voir* p. 462).

de l'un de ses points que je prends pour sommet de l'un des triangles semi-réguliers inscrits dans l'ellipse; les coordonnées des deux autres sommets de ce triangle seront

$$a\cos\left(u+\frac{2\pi}{3}\right),\quad b\sin\left(u+\frac{2\pi}{3}\right),$$

et

$$a\cos\left(u+\frac{4\pi}{3}\right),\quad b\sin\left(u+\frac{4\pi}{3}\right).$$

La circonférence qui passe par ces trois points a pour équation

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2, & x, & y, & 1 \\ a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u, & a\cos u, & b\sin u, & 1 \\ a^2\cos^2\left(u+\frac{2\pi}{3}\right)+b^2\sin^2\left(u+\frac{2\pi}{3}\right), & a\cos\left(u+\frac{2\pi}{3}\right), & b\sin\left(u+\frac{2\pi}{3}\right), & 1 \\ a^2\cos^2\left(u+\frac{4\pi}{3}\right)+b^2\sin^2\left(u+\frac{4\pi}{3}\right), & a\cos\left(u+\frac{4\pi}{3}\right), & b\sin\left(u+\frac{4\pi}{3}\right), & 1 \end{vmatrix}=0,$$

ou, en développant ce déterminant :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+x\dfrac{c^2}{2a}\cos u\,(4\sin^2 u-1) \\ \quad -y\dfrac{c^2}{2b}\sin u\,(4\cos^2 u-1)-\dfrac{a^2+b^2}{2}=0, \end{array}\right.$$

c^2 représentant a^2-b^2.

La puissance du centre de l'ellipse pour tous les cercles compris dans l'équation précédente est $-\frac{a^2+b^2}{2}$; donc, tous ces cercles ont un centre radical commun qui est le centre de l'ellipse (*).

(*) Un triangle semi-régulier (abc), inscrit dans l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, est la projection d'un triangle équilatéral (ABC) inscrit dans un cercle décrit sur le grand axe $2a$ de l'ellipse comme diamètre, et dans un plan

Les coordonnées du centre du cercle que l'équation (1) représente sont données par les équations

$$2x + \frac{c^2}{2a}\cos u(4\sin^2 u - 1) = 0,$$

$$2y - \frac{c^2}{2b}\sin u(4\cos^2 u - 1) = 0.$$

qui peuvent s'écrire

$$\frac{16a^2}{c^4}x^2 = \cos^2 u(4\sin^2 u - 1)^2,$$

$$\frac{16b^2}{c^4}y^2 = \sin^2 u(4\cos^2 u - 1)^2$$

---

qui forme avec celui de l'ellipse un angle dont le cosinus est $\frac{b}{a}$. La somme des carrés des distances des sommets A, B, C du triangle équilatéral, à un diamètre quelconque du cercle circonscrit, est, comme on sait, une quantité invariable qui, dans le cas actuel, a pour valeur $\frac{3a^2}{2}$, puisque le rayon du cercle est a. De là il faut immédiatement conclure que la somme des carrés des abscisses des sommets a, b, c de tout triangle semi-régulier inscrit dans l'ellipse est égale à $\frac{3a^2}{2}$, et que la somme des carrés des ordonnées de ces trois points est égale à $\frac{3b^2}{2}$. Par conséquent, en nommant O le centre de l'ellipse, on a constamment

$$\overline{Oa}^2 + \overline{Ob}^2 + \overline{Oc}^2 = \frac{3(a^2+b^2)}{2}.$$

Remarquons, de plus, que le centre O de l'ellipse étant le centre des moyennes distances des sommets a, b, c de tout triangle semi-régulier inscrit, on a, pour un point quelconque m, la relation

$$ma^2 + mb^2 + mc^2 = 3\overline{Om}^2 + \overline{Oa}^2 + \overline{Ob}^2 + \overline{Oc}^2 = 3\overline{Om}^2 + \frac{3(a^2+b^2)}{2}.$$

Si le point m est le centre d'un cercle circonscrit au triangle abc et ayant r pour rayon, la relation précédente devient

$$3r^2 = 3.Om^2 + \frac{3(a^2+b^2)}{2}, \quad \text{d'où} \quad Om^2 - r^2 = -\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right),$$

égalité qui démontre la proposition énoncée. G.

En les ajoutant, on trouve

$$\frac{16a^2x^2}{c^4} + \frac{16b^2y^2}{c^4} = 1.$$

Cette dernière équation montre que le lieu des centres des cercles considérés est une ellipse semblable à l'ellipse proposée, mais inversement placée (*).

Si l'on prend la dérivée de l'équation (1) par rapport à u, on trouve

$$\frac{x \sin u}{a}(4\cos^2 u - 1) + \frac{y \cos u}{b}(4\sin^2 u - 1) = 0.$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe des cercles (1), il faut éliminer u entre l'équation précédente et l'équation

$$0 = \frac{yc^2}{2b}\sin u(4\cos^2 u - 1)$$
$$- \frac{xc^2}{2a}\cos u(4\sin^2 u - 1) - (x^2 + y^2) + \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

(*) Lorsqu'une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est coupée par un cercle dont les coordonnées du centre sont α, β, quel que soit le rayon de ce cercle, la somme des abscisses des quatre points d'intersection est égale à $4 \cdot \frac{a^2}{c^2}\alpha$, et la somme des ordonnées de ces points est égale à $-4 \cdot \frac{b^2}{c^2}\beta$. Or, si trois de ces quatre points sont les sommets d'un triangle semi-régulier inscrit dans l'ellipse, les sommes de leurs abscisses et de leurs ordonnées étant, séparément, nulles, le quatrième point d'intersection aura pour coordonnées $4 \cdot \frac{a^2}{c^2}\alpha$ et $-4 \cdot \frac{b^2}{c^2}\beta$. Il suffit donc, pour avoir l'équation du lieu du centre (α, β), de remplacer dans l'équation de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, les coordonnées courantes x et y par $\frac{4a^2}{c^2}x$ et $-\frac{4b^2}{c^2}y$, ce qui donne

$$\frac{16a^2x^2}{c^4} + \frac{16b^2y^2}{c^4} = 1.$$

G.

De ces équations on tire

$$\sin^2 u\,(4\cos^2 u - 1)^2 = \frac{y^2(a^2 + b^2 - 2x^2 - 2y^2)^2}{c^4 b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2},$$

$$\cos^2 u\,(4\sin^2 u - 1)^2 = \frac{x^2(a^2 + b^2 - 2x^2 - 2y^2)^2}{c^4 a^2\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2};$$

et, ajoutant membre à membre, il vient

$$1 = \frac{(a^2 + b^2 - 2x^2 - 2y^2)^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{c^4 a^2 b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2}.$$

Ainsi, l'équation de l'enveloppe est

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{a^2 + b^2 - 2x^2 - 2y^2}{c^2}\right)$$

en coordonnées rectangulaires, et

$$(3)\qquad \frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2} = \left(\frac{a^2 + b^2 - 2\rho^2}{c^2\rho}\right)^2$$

en coordonnées polaires.

Transformons cette courbe par rayons vecteurs réciproques, en prenant l'origine pour pôle; l'équation de la courbe transformée sera

$$\frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2} = \left[\frac{(a^2 + b^2)\rho^2 - 2k^4}{c^2k^2\rho}\right]^2,$$

ou

$$\frac{\cos^2\omega}{a^2} + \frac{\sin^2\omega}{b^2} = \left[\frac{\dfrac{(a^2 + b^2)}{k^2}\rho^2 - 2k^2}{c^2\rho}\right]^2,$$

k^2 représentant le paramètre de la transformation.

Si l'on prend k^2 égal à $\dfrac{a^2+b^2}{2}$, la courbe se transforme en elle-même; elle est donc *anallagmatique* (*).

Note — Solutions analogues de MM. Charles Ribaucourt, élève à l'École Polytechnique; J. Vollot et L. Plasse, élèves du lycée de Lyon; Driant, élève du lycée de Metz; Édouard Besson, élève du lycée de Besançon.

Seconde solution de la question 813;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

On sait qu'en représentant $\sin x$ par y et $\sin 9x$ par a

$$(1)\qquad 256y^9 - 576y^7 + 432y^5 - 120y^3 + 9y - a = 0.$$

Supposons que a soit nul, c'est-à-dire que $9x$ soit de la forme $0^\circ \pm 180^\circ K$, x sera de la forme $0^\circ \pm 20^\circ K$, et les racines de l'équation (1) seront les différentes valeurs de $\sin(0^\circ \pm 20^\circ K)$. Or, en laissant de côté la valeur zéro, on trouve huit autres valeurs distinctes, qui sont

$$\pm\sin 20^\circ,\quad \pm\sin 40^\circ,\quad \pm\sin 60^\circ,\quad \pm\sin 80^\circ.$$

L'équation

$$(2)\qquad 256u^4 - 576u^3 + 432u^2 - 120u + 9 = 0$$

(*) Le centre O de l'ellipse ayant la même puissance pour tous les cercles circonscrits aux triangles semi-réguliers inscrits, si l'on conduit de ce centre une droite OM à l'un des points d'intersection de deux cercles du système considéré, cette droite, prolongée de l'autre côté de O, ira nécessairement passer par le second point d'intersection N des deux cercles. Il est facile d'en conclure que chacun des cercles du système est touché par l'enveloppe en deux points m, n appartenant à une droite passant par le point O; et comme $Om \times On = \dfrac{a^2+b^2}{2}$, il est clair qu'en prenant O et $\dfrac{a^2+b^2}{2}$ pour pôle et coefficient de la transformation, on obtiendra pour transformée l'enveloppe elle-même. G.

a donc pour racines

$$\sin^2 20^\circ,\quad \sin^2 40^\circ,\quad \sin^2 60^\circ,\quad \sin^2 80^\circ;$$

le produit de ces racines est $\frac{9}{256}$, donc

$$\sin 20 . \sin 40^\circ . \sin 60^\circ . \sin 80^\circ = + \frac{3}{16};$$

on prend le signe + parce que tous les facteurs du premier membre sont positifs.

La seconde égalité proposée se démontre de la même manière, et en général on pourrait, au moyen des coefficients de l'équation (2), calculer une fonction symétrique rationnelle des quantités

$$\sin^2 20^\circ,\quad \sin^2 40^\circ,\quad \sin^2 60^\circ,\quad \sin^2 80^\circ.$$

Note du Rédacteur. — En désignant par n un nombre entier et positif, on a généralement:

$$(1)\quad \sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\cdots\sin\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = + \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n},$$

$$(2)\quad \cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2^n};$$

d'où

$$(3)\quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\cdots\operatorname{tang}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1},$$

$$(4)\quad \operatorname{séc}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\operatorname{séc}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\operatorname{séc}\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\cdots\operatorname{séc}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = 2^n.$$

On fait disparaître le radical en posant $n = 4$, $n = 12$, etc.

Il est clair que les relations indiquées (question 813) sont comprises dans ces formules générales.

L'égalité (2) montre que la série

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \ldots$$

a pour limite l'unité. G.

Question 683

(voir 2e série, t II, p. 551),

PAR M. LAISANT,
Capitaine du génie.

Soient

$$\begin{aligned}&l\cos\theta + m\sin\theta\cos\varphi + n\sin\theta\sin\varphi\\&\quad + p\cos^2\theta + q\sin^2\theta\cos^2\varphi + r\sin^2\theta\sin^2\varphi = \mathrm{U},\end{aligned}$$

$$\frac{l^2}{2p+\psi} + \frac{m^2}{2q+\psi} + \frac{n^2}{2r+\psi} + \psi = \mathrm{V}.$$

Il faut démontrer que l'équation résultant de l'élimination de θ *et de* φ *entre* $\mathrm{U} = 0$, $\frac{d\mathrm{U}}{d\theta} = 0$, $\frac{d\mathrm{U}}{d\varphi} = 0$ *sera identique avec celle qui provient de l'élimination de* ψ *entre* $\mathrm{V} = 0$, $\frac{d\mathrm{V}}{d\psi} = 0$. (CAYLEY.)

Je forme l'équation $\frac{d\mathrm{U}}{d\varphi} = 0$, qui me donne

$$\frac{m}{\sin\theta\cos\varphi} + 2q = \frac{n}{\sin\theta\sin\varphi} + 2r.$$

Écrivant maintenant $\frac{d\mathrm{U}}{d\theta} = 0$, en tenant compte de la relation précédente, on trouve

$$\frac{l}{\cos\theta} + 2p = \frac{m}{\sin\theta\cos\varphi} + 2q.$$

Posons cette quantité égale à une inconnue auxiliaire $-z$; il viendra la triple égalité

$$\frac{l}{\cos\theta} + 2p = \frac{m}{\sin\theta\cos\varphi} + 2q = \frac{n}{\sin\theta\sin\varphi} + 2r = -z.$$

D'où

$$\cos\theta = -\frac{l}{2p+z},$$

$$\sin\theta\cos\varphi = -\frac{m}{2q+z},$$

$$\sin\theta\sin\varphi = -\frac{n}{2r+z}.$$

Il s'agit d'éliminer θ, φ et z entre ces trois équations et $U = o$. Or, si nous éliminons θ et φ entre les équations que nous venons d'écrire, en les élevant au carré et les ajoutant, il vient

$$(1) \qquad \frac{l^2}{(2p+z)^2} + \frac{m^2}{(2q+z)^2} + \frac{n^2}{(2r+z)^2} = 1.$$

Si, d'autre part, nous formons l'équation $U = o$, en remplaçant $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$ par leurs valeurs écrites ci-dessus, nous avons :

$$-\frac{l^2}{2p+z} - \frac{m^2}{2q+z} - \frac{n^2}{2r+z}$$
$$+\frac{pl^2}{(2p+z)^2} + \frac{qm^2}{(2q+z)^2} + \frac{rn^2}{(2r+z)^2} = o.$$

Ecrivons le terme $\frac{pl^2}{(2p+z)^2}$ sous cette forme :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{2p+z} - \frac{l^2 z}{(2p+z)^2}\right);$$

opérons d'une façon analogue pour les deux derniers termes, changeons les signes et multiplions par 2 ; l'équation deviendra

$$\frac{l^2}{2p+z} + \frac{m^2}{2q+z} + \frac{n^2}{2r+z}$$
$$+ z\left(\frac{l^2}{(2p+z)^2} + \frac{m^2}{(2q+z)^2} + \frac{n^2}{(2r+z)^2}\right) = o.$$

En vertu de l'équation (1), elle se réduit à

$$(2)\qquad \frac{l^2}{2p+z}+\frac{m^2}{2q+z}+\frac{n^2}{2r+z}+z=0.$$

Il resterait à éliminer z entre les équations (1) et (2). Or, il est évident qu'au changement près de z en ψ, l'équation (2) n'est autre que $V=0$. On vérifie sans plus de peine que l'équation (1) est identique avec $\frac{dV}{d\psi}=0$; les deux éliminations conduiront donc au même résultat.

Note. — Autre solution de M. G.-B. Maffiotti, élève à l'université de Turin.