Nouvelles annales de mathématiques

Georges Dostor

Inclinaisons mutuelles des arêtes opposées du tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 452-453

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__452_0>

INCLINAISONS MUTUELLES DES ARÊTES OPPOSÉES DU TÉTRAÈDRE;

PAR M. GEORGES DOSTOR,
Professeur au lycée impérial de la Réunion.

---

1. Considérons le tétraèdre SABC, dans lequel nous poserons les trois arêtes de la base ABC,

$$BC = a,\quad CA = b,\quad AB = c,$$

et les arêtes latérales opposées,

$$SA = a',\quad SB = b',\quad SC = c'.$$

Représentons par α l'angle des deux arêtes opposées a et a', par β, γ les angles des arêtes b et b', c et c'.

Projetons la ligne brisée BASC sur l'arête BC, nous trouvons

$$a = c\cos ABC + a'\cos\alpha + c'\cos SCB,$$

d'où nous tirons

$$2aa'\cos\alpha = a^2 - 2ac\cos ABC + a^2 - 2ac'\cos SCB.$$

Mais les deux triangles ABC, SBC nous donnent

$$a^2 - 2ac\cos ABC = b^2 - c^2,$$
$$a^2 - 2ac'\cos SCB = b'^2 - c'^2;$$

nous obtenons donc, en substituant :

$$(1)\qquad 2aa'\cos\alpha = b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2.$$

On trouverait de même

$$(2)\qquad \begin{cases} 2bb'\cos\beta = c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2, \\ 2cc'\cos\gamma = a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2. \end{cases}$$

2. Ces trois équations donnent

$$aa' \cos\alpha + bb' \cos\beta + cc' \cos\gamma = 0. \tag{3}$$

3. Représentons par p, q, r les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées; p et q sont les diagonales d'un parallélogramme dont les côtés sont $\frac{c}{2}$, $\frac{c'}{2}$; il vient, par suite,

$$p^2 + q^2 = 2 \cdot \frac{c^2}{4} + 2 \cdot \frac{c'^2}{4}.$$

Nous avons donc les relations

$$\left\{\begin{aligned} 2p^2 + 2q^2 &= c^2 + c'^2,\\ 2q^2 + 2r^2 &= a^2 + a'^2,\\ 2r^2 + 2p^2 &= b^2 + b'^2,\end{aligned}\right. \tag{4}$$

qui donnent

$$4p^2 + 4q^2 + 4r^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2. \tag{5}$$

4. Des égalités (4) on tire les valeurs

$$\left\{\begin{aligned} 4p^2 &= b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2,\\ 4q^2 &= c^2 + c'^2 + a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2,\\ 4r^2 &= a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

5. Si nous retranchons chacune de ces équations de la suivante, et la dernière de la première, nous obtenons, en ayant égard à (1) et (2),

$$\left\{\begin{aligned} aa' \cos\alpha &= r^2 - q^2 = (r+q)(r-q),\\ bb' \cos\beta &= p^2 - r^2 = (p+r)(p-r),\\ cc' \cos\gamma &= q^2 - p^2 = (q+p)(q-p).\end{aligned}\right. \tag{7}$$