NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. DE VIRIEU

Résolution trigonométrique d'une équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 444-446

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__444_0>

RÉSOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE D'UNE ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

1. A la page 421 du tome XX des *Nouvelles Annales*, on trouve les formules suivantes :

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{array}{l} x^3+ax-b=0, \quad \dfrac{2}{b}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}=\operatorname{tang}\varphi,\\ \sqrt[3]{\operatorname{tang}\dfrac{\varphi}{2}}=\sin\psi, \quad x=\dfrac{\cos^3\psi}{\sin\psi}\sqrt{\dfrac{a}{3}}; \end{array}\right.$$

formules qui semblent inexactes; appliquons-les à l'équation

$$(1)\qquad x^3+x-2=0.$$

On a

$$a=1,\quad b=2,\quad \operatorname{tang}\varphi=\sqrt{\frac{1}{8}},$$

$$\sin\psi=\sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}},\quad x=\frac{\cos^3\psi}{\sin\psi}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Calcul de φ.	Calcul de ψ.	Calcul de x.
$\log\frac{1}{8}=\bar{1},0969100$	$\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}=\bar{1},2344487$	$\log\frac{1}{3}=\bar{1},5228787$
$\log\operatorname{tang}\varphi=\bar{1},5484550$	$\log\sin\psi=\bar{1},7448162$	$+\log\sqrt{\frac{1}{3}}=\bar{1},7614393$
$\varphi=19^\circ 28' 16'',4$	$\psi=33^\circ 45' 24'',5$	
$\frac{1}{2}\varphi=9^\circ 44' 08'',2$	$\log\cos\psi=\bar{1},9198119$	$+\log\cos^3\psi=\bar{1},7594357$
		$-\log\sin\psi=0,2551838$
		$\log x\quad \bar{1},7760588$
		$x=0,59711.$

Résultat évidemment inexact, car l'unique racine réelle de l'équation (1) est $+1$.

2. Pour rectifier les formules (A), reprenons les formules données par Cagnoli (*Trigonométrie*, p. 201), et qui se trouvent dans le tome IX des *Nouvelles Annales*, p. 377, ligne 13, le second membre de la formule (3) devant être changé de signe.

a et b étant positifs, l'unique racine réelle de

$$x^3 + ax - b = 0$$

est donnée par le système suivant :

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{array}{l} 0 < \varphi < 90^\circ,\quad \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{2}{b}\left(\dfrac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}. \\ 0 < \theta < 90^\circ,\quad \operatorname{tang}\theta = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\dfrac{1}{2}\varphi},\quad x = \cot.2\theta\sqrt{\dfrac{a}{3}}. \end{array}\right.$$

$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$ se trouvant compris entre 0 et 1, il en est de même de $\operatorname{tang}\theta$; on peut poser

$$0 < \psi < 90^\circ,\quad \sin\psi = \operatorname{tang}\theta;$$

on en déduit

$$\cot 2\theta = \frac{1}{\operatorname{tang}2\theta} = \frac{1 - \operatorname{tang}^2.\theta}{2\operatorname{tang}\theta} = \frac{\cos^2\psi}{2\sin\psi},$$

d'où le système suivant :

$$0 < a,\quad 0 < b,\quad x^3 + ax - b = 0;$$

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{array}{l} 0 < \varphi < 90^\circ,\quad \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{2}{b}\left(\dfrac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ \sin\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\dfrac{\varphi}{2}},\quad x = \dfrac{\cos^2\psi}{\sin\psi}\sqrt{\dfrac{a}{3}}, \end{array}\right.$$

Le système (C) doit être substitué au système (A), où l'erreur est due probablement à des fautes d'impression.

3. Appliquons les formules (C) à l'équation (1) :

$$\operatorname{tang}\varphi = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3, \qquad \sin\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}, \qquad x = \frac{\cos^2\psi}{\sin\psi}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Calcul de φ.	Calcul de ψ.	Calcul de x.
$\log\frac{1}{3} = \bar{1},5228787$	$\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \bar{2},9793213$	$+\log\cos^2\varphi = \bar{1},8983344$
		$-\log\sin\psi = 0,3402262$
$\log\sqrt{\frac{1}{3}} = \bar{1},76143935$	$\log\sin\psi = \bar{1},6597738$	$+\log\sqrt{\frac{1}{3}} = \bar{1},7614393$
	$\psi = 27^\circ 11' 02'',6$	
$\log\operatorname{tang}\varphi = \bar{1},2843180$	$\log\cos\psi = \bar{1},9491672$	$\log x = 1,9999999$
$\varphi = 10^\circ 53' 36'',2$		$x = 1.$
$\frac{\varphi}{2} = 5^\circ 26' 48'',1$		