GEORGES DOSTOR

Diverses expressions du volume du tétraèdre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 410-414

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__410_1>

DIVERSES EXPRESSIONS DU VOLUME DU TÉTRAÈDRE;

PAR M. GEORGES DOSTOR,
Professeur au lycée impérial de la Réunion.

1. Soient a, b, c trois arêtes contiguës d'un tétraèdre, issues du sommet S; et α, β, γ les angles compris entre ces arêtes, savoir

$$\alpha = (b, c), \quad \beta = (c, a), \quad \gamma = (a, b).$$

Désignons, en outre, par A, B, C les trois autres sommets du solide qui terminent les arêtes a, b, c; et posons

$$\mathrm{AB} = c', \quad \mathrm{BC} = a', \quad \mathrm{CA} = b'.$$

Appelons H la hauteur du solide, abaissée du sommet C sur la face opposée SAB ; nous avons le volume

$$V = SAB \cdot \frac{1}{3} H.$$

Cela posé, représentons par α', β', γ' les trois hauteurs du triangle sphérique dont les côtés sont α, β, γ : nous avons

$$H = c \sin \gamma',$$

et, comme

$$SAB = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

il vient

$$\text{(I)} \qquad V = \frac{1}{6} abc \sin \gamma \sin \gamma'.$$

Donc, *le volume d'un tétraèdre est égal au sixième du produit de trois arêtes issues du même sommet, multiplié par le produit du sinus de l'angle compris entre deux de ces arêtes, et du sinus de l'inclinaison de la troisième arête sur le plan des deux premières.*

2. La hauteur γ' partage le triangle sphérique $\alpha\beta\gamma$ en deux triangles sphériques rectangles; l'un d'eux a pour hypoténuse le côté β, et pour angle opposé à γ' le dièdre dirigé suivant l'arète a; ce triangle sphérique rectangle donne donc

$$\sin \gamma' = \sin \beta \sin \widehat{a};$$

il vient, par suite, en substituant dans (I),

$$\text{(II)} \qquad V = \frac{1}{6} abc . \sin \beta \sin \gamma \sin \widehat{a}.$$

Or, le triangle sphérique $\alpha\beta\gamma$ donne aussi

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{\sin \varpi \sin(\varpi - \alpha) \sin(\varpi - \beta) \sin(\varpi - \gamma)}}{\sin \beta \sin \gamma},$$

où

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\varpi.$$

Il vient donc,

$$\text{(III)} \quad V = \frac{1}{3} abc \sqrt{\sin \varpi \sin(\varpi - \alpha) \sin(\varpi - \beta) \sin(\varpi - \gamma)}.$$

La quantité sous le radical peut se développer; en la représentant par $\frac{1}{4}\Delta^2$, on a

$$\text{(IV)} \quad \Delta^2 = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

de sorte qu'on peut écrire

$$\text{(V)} \qquad V = \frac{1}{6} abc.\Delta.$$

Ainsi, *le volume d'un tétraèdre est égal au sixième du produit de trois arêtes issues du même sommet, multiplié par la quantité* Δ *qui est une fonction symétrique des trois angles compris entre ces arêtes* (*).

Cette expression correspond à celle qui donne la surface du triangle en fonction de deux côtés et de l'angle compris.

3. Si nous comparons (I) et (V), nous verrons que

$$\text{(VI)} \qquad \sin\alpha \sin\alpha' = \sin\beta \sin\beta' = \sin\gamma \sin\gamma' = \Delta.$$

Donc, *dans tout triangle sphérique, les produits des sinus de chaque côté et de la hauteur correspondante sont égaux entre eux et à la fonction* Δ.

(*) La quantité désignée ici par Δ est ce que les Allemands nomment le sinus de l'angle trièdre des arêtes a, b, c. En adoptant cette définition, on peut dire que le volume d'un tétraèdre est égal au sixième du produit des trois arêtes issues d'un même sommet par le sinus de l'angle trièdre que ces trois arêtes forment. G.

4. La valeur (II) peut s'écrire

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} ca . \sin\beta \cdot \frac{1}{2} ab \sin\gamma \cdot \frac{\sin\widehat{a}}{a};$$

or, on sait que

$$\frac{1}{2} ca \sin\beta = \text{SAC}, \quad \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \text{SAB};$$

on a donc la formule

$$\text{(VII)} \qquad V = \frac{2}{3} \text{SAB}.\text{SAC} \cdot \frac{\sin\widehat{a}}{a},$$

qui exprime le *volume du tétraèdre en fonction de deux faces* SAB, SAC; *de l'arête commune a, et du dièdre compris entre ces deux faces.*

5. Pour plus de simplicité, représentons par A, B, C, S les faces respectivement opposées aux sommets désignés par ces mêmes lettres.

L'expression précédente (VII) permet d'écrire

$$V = \frac{2}{3} \text{AS} \cdot \frac{\sin\widehat{a'}}{a'} = \frac{2}{3} \text{BS} \cdot \frac{\sin\widehat{b'}}{b'} = \frac{2}{3} \text{CS} \cdot \frac{\sin\widehat{c'}}{c'},$$

d'où l'on tire les deux équations

$$\frac{A \sin\widehat{a'}}{a'} = \frac{B \sin\widehat{b'}}{b'} = \frac{C \sin\widehat{c'}}{c'},$$

qui, étant combinées entre elles et avec l'équation évidente

$$A \cos\widehat{a'} + B \cos\widehat{b'} + C \cos\widehat{c'} = S,$$

donnent d'abord

$$B = \frac{A\, b' \sin\widehat{a'}}{a' \sin\widehat{b'}}, \quad C = \frac{A\, c' \sin\widehat{a'}}{a' \sin\widehat{c'}};$$

puis

$$A = \frac{S}{a' \cot \widehat{a'} + b' \cot \widehat{b'} + c' \cot \widehat{c'}} \cdot \frac{a'}{\sin \widehat{a'}}.$$

Si nous substituons cette valeur de A dans l'expression

$$V = \frac{2}{3} AS \cdot \frac{\sin \widehat{a'}}{a'},$$

nous trouvons

$$(\text{VIII}) \qquad V = \frac{2}{3} \cdot \frac{S^2}{a' \cot \widehat{a'} + b' \cot \widehat{b'} + c' \cot \widehat{c'}}$$

pour le *volume du tétraèdre en fonction d'une face et de ses inclinaisons sur les trois autres faces.*

Cette expression correspond à celle de la surface du triangle en fonction d'un côté et des deux angles adjacents (*).

(*) Parmi les différentes expressions du volume d'un tétraèdre en fonction de ses éléments, on peut encore citer les expressions suivantes :

$$288 . V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ 1 & b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix},$$

formule qui donne le volume du tétraèdre en fonction des carrés de ses arêtes;

$$V^2 = \frac{2}{9} A . B . C . \Delta',$$

en nommant Δ' le sinus de l'angle trièdre supplémentaire de l'angle des arêtes a, b, c;

$$V = \frac{1}{6} \cdot a . a' \delta . \sin \left(\widehat{aa'}\right),$$

où δ représente la plus courte distance des arêtes opposées a, a' et $\left(\widehat{aa'}\right)$ l'angle de ces deux arêtes.

On sait aussi comment le volume d'un tétraèdre s'exprime en fonction des équations de ses faces, et au moyen des coordonnées de ses sommets.

G.