NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ALFRED GIARD

Sur les volumes trapézoïdaux (voir t. VII, p. 241)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 408-410

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__408_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1867, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR LES VOLUMES TRAPÉZOÏDAUX

(voir t. VII, p. 241);

PAR M. ALFRED GIARD.

On sait que *le volume de tout polyèdre ayant pour bases deux polygones quelconques situés dans des plans parallèles, et pour faces latérales des trapèzes, est exprimé par la formule*

$$\frac{H}{6}(B + B' + 4B''),$$

dans laquelle H *désigne la distance des deux plans parallèles,* B *la base inférieure du polyèdre,* B' *la base supérieure, et* B'' *la section équidistante des deux bases* (*).

A la suite de la démonstration de ce théorème, on lit (t. VII, p. 245) la Note suivante : D'après M. Koppe, de Sœst (*Crelle,* t. XVIII, p. 275), le volume que nous

(*) Cette proposition, énoncée par Mascheroni dans sa *Collection de Problèmes pour les Arpenteurs,* comprend, comme cas particulier, la mesure du tronc de pyramide à bases paralleles, telle qu'on l'enonce dans les Traités de Géometrie elementaire. Car, dans ce cas particulier, les aires des sections B, B'', B' étant proportionnelles aux carres des distances de leurs plans au sommet de la pyramide, on a évidemment

$$\sqrt{B''} = \frac{\sqrt{B} + \sqrt{B'}}{2},$$

d'où

$$4B'' = B + B' + 2\sqrt{BB'},$$

ce qui donne

$$\frac{H}{6}(B + B' + 4B'') = \frac{H}{3}(B + B' + \sqrt{BB'}).$$

G

venons de définir est équivalent à un prisme ayant pour hauteur H, et pour base l'aire de la section B″ augmentée de la douzième partie de l'aire P d'un polygone équiangle aux bases, et qui a pour côtés la différence de leurs côtés homologues. Il faudrait démontrer l'identité de cette expression avec la précédente.

C'est cette démonstration que je vais indiquer en quelques mots. L'égalité à vérifier est

$$\frac{H}{6}(B + B' + 4B'') = H\left(B'' + \frac{P}{12}\right),$$

ou

$$2B + 2B' = 4B'' + P.$$

Pour cela, nous appliquerons le théorème suivant dû à Mascheroni : Le double de la surface d'un polygone rectiligne est égal à la somme des rectangles de ses côtés, excepté un, pris deux à deux, multipliés par les sinus des sommes des angles extérieurs compris entre eux.

Soient A, B, C,... les côtés de la base B ; $a, b, c, \ldots$ les côtés de la base B′; ceux de la section B″ seront $\frac{A+a}{2}$, $\frac{B+b}{2}, \ldots$, et ceux du polygone P : $(A-a)$, $(B-b)$, $(C-c), \ldots$.

Désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ les sommes des angles extérieurs compris entre les côtés en nombre $n-1$, combinés deux à deux, les côtés étant toujours pris en marchant dans le même sens.

On aura, d'après le théorème énoncé :

$$2P = (A-a)(B-b)\sin\alpha + (A-a)(C-c)\sin\beta + \ldots$$

$$2B'' = \left(\frac{A+a}{2}\right)\left(\frac{B+b}{2}\right)\sin\alpha + \left(\frac{A+a}{2}\right)\left(\frac{C+c}{2}\right)\sin\beta + \ldots$$

d'où

$$P = \frac{(A-a)(B-b)}{2}\sin\alpha + \frac{(A-a)(C-c)}{2}\sin\beta + \ldots,$$

$$4B'' = \frac{(A+a)(B+b)}{2}\sin\alpha + \frac{(A+a)(C+c)}{2}\sin\beta + \ldots.$$

Faisons la somme

$$P + 4B'' = (AB + ab)\sin\alpha + (AC + ac)\sin\beta + \ldots,$$

$$P + 4B'' = (AB\sin\alpha + AC\sin\beta + \ldots)$$
$$+ (ab\sin\alpha + ac\sin\beta + \ldots),$$

$$P + 4B'' = 2B + 2B',$$

C. Q. F. D.

Il est évident que cette démonstration s'étend au cas où plusieurs des faces latérales seraient des triangles; dans ce cas le polygone P est équiangle à la base B.