NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 370-384
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__370_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 809 *et* 810

(voir p 189);

PAR M. GEORGES DE VILLEPIN,
Élève en Mathématiques spéciales au collége Stanislas.

809. *Décrire un cercle qui rencontre trois droites données de manière que les cordes interceptées par ces droites sur ce cercle soient égales à une longueur donnée.*

Si l'on considère le cercle inscrit au triangle formé par les trois droites, O étant son centre, A, B, C les points de contact, et que de chaque côté des points de contact et sur les côtés du triangle on prenne des longueurs égales à la moitié de celle qui est donnée, les six points ainsi trouvés sont sur un cercle ayant son centre au point O, et qui est le cercle cherché. Comme d'ailleurs on peut encore considérer les trois cercles exinscrits, on voit que le problème admet quatre solutions.

Le cas où deux des lignes données sont parallèles se résoudrait exactement de la même manière, et celui où les trois droites sont parallèles doit être exclu, car une même circonférence ne peut intercepter sur trois parallèles des longueurs égales, à moins que deux d'entre elles ne se confondent, auquel cas le problème est indéterminé.

810. *Même problème, quand on remplace les trois droites par trois circonférences.*

Soient C_1, C_2, C_3, les centres des circonférences données. Le centre O du cercle cherché se trouve à égale distance des trois cordes interceptées, puisqu'elles sont égales. Si l'on décrit un cercle concentrique à C_1 et tangent à une corde quelconque inscrite dans C_1, égale à la longueur donnée, et qu'on répète la même construction pour les circonférences C_2, C_3, on obtient trois cercles C'_1, C'_2, C'_3 concentriques à C_1, C_2, C_3, tels, que le centre d'un cercle ω tangent à la fois à C'_1, C'_2, C'_3 sera le même que celui de la circonférence cherchée. Si donc, par le point de contact de C'_1 et de ω, on mène la tangente commune, les deux points d'intersection de cette droite avec le cercle C_1 seront des points du cercle cherché, et puisque son centre est celui du cercle ω, ce cercle est par là même facile à construire. Comme d'ailleurs le problème du cercle tangent à trois cercles donnés admet huit solutions, le problème proposé admettra aussi huit solutions.

On peut étendre au cas de l'espace ces questions qui deviennent alors :

Décrire une sphère qui rencontre quatre plans donnés de manière que les cercles interceptés par ces plans sur cette sphère soient égaux à un cercle donné.

Décrire une sphère qui rencontre quatre sphères données de façon que les quatre cercles d'intersection soient égaux à un cercle donné.

Ces questions se résolvent absolument de la même manière qu'en Géométrie plane, en remplaçant dans les solutions que j'ai données les mots *cercle* et *droite* par *sphère* et *plan*. D'ailleurs, le problème de mener une sphère tangente à quatre plans admettant huit solutions, la première des questions proposées admettra aussi huit solutions, et le problème de mener une sphère tangente à quatre sphères données admettant seize solutions, la seconde question proposée admettra le même nombre de solutions.

Note. — Même solution de MM. Aldacotche, étudiant à Metz; Pierre Desguin, eleve de l'École des Mines à Liege; Gabriel Urdy, élève de l'École

Saint-Michel (à Saint-Étienne); Rejoie, Martinolli, Alexandre Veyret, élèves du collége Chaptal; L. Monange et D. Dussaq, élèves de M. Prouhet; Armand Dupommier et Auguste Kleine, élèves du lycée de Besançon; Honoré Pi, élève à l'École de Sorrèze.

Question 801;

PAR M. E. PELLET,
Élève au lycée de Nîmes.

Si $p_0, p_1, p_2, \ldots; q_0, q_1, q_2, \ldots,$ sont des nombres entiers tels, que $\frac{p_n}{q_n}$ ait une limite finie, ou nulle, la limite de la série

$$(1)\quad \frac{p_0}{q_0} - \frac{p_1}{q_0q_1} + \frac{p_2}{q_0q_1q_2} - \frac{p_3}{q_0q_1q_2q_3} + \ldots + (-1)^n \frac{p_n}{q_0q_1q_2\ldots q_n}$$

sera une quantité incommensurable.

(G.-C. DE MORGAN.)

Pour des valeurs assez voisines de sa limite, le rapport $\frac{p_n}{q_n}$ varie d'une manière continue : cela exige que les valeurs correspondantes de q_n soient très-grandes, puisque ce nombre q_n varie par sauts (*). Cela posé:

1° La série (1) est convergente.

En effet, ses termes sont alternativement positifs et négatifs, et, vers la limite de $\frac{p_n}{q_n}$, ils vont nécessairement en diminuant, puisqu'alors ils sont composés de deux facteurs dont l'un, $\frac{p_n}{q_n}$, varie très-peu, tandis que l'autre $\left(\frac{1}{q_0q_1q_2\ldots q_{n-1}}\right)$ décroît rapidement.

(*) En attribuant à n une valeur suffisamment grande, la différence des rapports $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, ou $\pm\left(\frac{p_nq_{n+1} - p_{n+1}q_n}{q_nq_{n+1}}\right)$, devient moindre que tout nombre donne; or, le numérateur de cette fraction est, en valeur absolue, au moins égal à l'unité; donc le dénominateur q_nq_{n+1} tend vers l'infini.

2° La limite de la série (1) est incommensurable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de nombre entier qui, multiplié par la limite de cette série, donne pour produit un nombre entier.

Multiplions par $(b.q_0 q_1 q_2 \ldots q_{n-1})$ les termes de la série (1), b étant un nombre entier. Il en résultera une nouvelle série convergente

$$a + (-1)^n b\left[\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \frac{p_{n+2}}{q_n q_{n+1} q_{n+2}} - \ldots\right],$$

dans laquelle a désigne la somme des n premiers termes, qui est évidemment un nombre entier. Par conséquent, si le produit de b par la limite de la série (1) est un nombre entier, il en sera de même du produit

$$b\left[\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \frac{p_{n+2}}{q_n q_{n+1} q_{n+2}} - \ldots\right],$$

quel que soit n.

Or, d'après ce que j'ai dit en commençant, on peut, quel que soit b, choisir n de telle manière que : 1° $\frac{b.p_n}{q_n}$ ne soit pas un nombre entier (*) ; 2° $\frac{b p_{n+1}}{q_n q_{n+1}}$ soit moindre que la plus petite des différences qui existent entre $\frac{b p_n}{q_n}$ et un nombre entier. D'après cela, il est clair que

$$b\left[\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \frac{p_{n+2}}{q_n q_{n+1} q_{n+2}} - \ldots\right]$$

n'est pas un nombre entier, pour cette valeur de n, puis-

(*) Parmi les produits représentés par $\frac{b.p_n}{q_n}$, il y en a une infinité qui ne sont pas des nombres entiers, puisque leurs différences tendent vers zero pour des valeurs de n suffisamment grandes.

que ce produit est compris entre les deux quantités

$$\frac{b\,p_n}{q_n} \quad \text{et} \quad b\left[\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_n q_{n+1}}\right]$$

dont la différence est $\dfrac{b p_{n+1}}{q_n q_{n+1}}$.

Donc, il n'y a pas de nombre entier qui, multiplié par la série (1), donne pour produit un nombre entier.

C. Q. F. D.

Note. — Une démonstration à peu près semblable nous a été adressée par M. Honoré Pi, élève en Mathématiques spéciales à l'École de Sorrèze (classe de M. Dumont).

Question 795;

PAR M. A. DE GROSSOUVRE,
Élève en Mathématiques spéciales au collége Stanislas.

Soient

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots 2n} + \ldots,$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{x}{1.2.3} + \frac{x^2}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots(2n+1)} + \ldots,$$

on propose de démontrer qu'en faisant successivement

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{x}[\varphi(x) - \varphi_1(x)],$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{x}[\varphi_1(x) - 3\varphi_2(x)],$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{x}[\varphi_2(x) - 5\varphi_3(x)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi_{i+2}(x) = \frac{1}{x}[\varphi_i(x) - (2i+1)\varphi_{i+1}(x)],$$

la fonction $\varphi_i(x)$ ne contiendra que des puissances positives de la variable, et d'en trouver l'expression.

(HERMITE.)

Nous pouvons poser

$$\varphi(x) = \sum \frac{x^n}{1.2\ldots 2n}$$

et

$$\varphi_1(x) = \sum \frac{x^n}{1.2\ldots(2n+1)}.$$

Dans ces deux formules, on ne peut pas supposer n négatif. Il faut en outre convenir que l'expression $1.2\ldots 2n$ se réduit à 1 pour $n=0$.

En employant cette notation, on a

$$\varphi(x) - \varphi_1(x) = \sum \frac{2nx^n}{1.2\ldots(2n+1)}.$$

Si l'on fait $n=0$, le coefficient de x^0 est nul; la quantité précédente est donc divisible par x; il faut en outre remarquer que d'après la formation même de cette expression on ne peut y supposer n négatif. Si l'on effectue la division par x, et si dans le résultat on change n en $n+1$, on a

$$\varphi_1(x) = \sum \frac{2(n+1)x^n}{1.2\ldots(2n+3)},$$

et on ne peut pas donner à n des valeurs négatives.

On trouverait de même

$$\varphi_3(x) = \sum \frac{2^2(n+1)(n+2)x^n}{1.2\ldots(2n+7)},$$

$$\varphi_4(x) = \sum \frac{2^3(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{1.2\ldots(2n+9)}.$$

La forme de ces expressions conduit à écrire

$$(1)\qquad \varphi_{i+1}(x) = \sum \frac{2^i(n+1)(n+2)\ldots(n+i)x^n}{1.2.3\ldots(2n+2i+1)}.$$

Pour démontrer la généralité de cette formule, je suppose qu'on l'ait vérifiée jusqu'à un certain rang et je vais prouver qu'elle est encore vraie quand on y change i en $i+1$. En effet, d'après cette formule on a

$$\varphi_i(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{2^{i-1}(n+1)(n+2)\ldots(n+i-1)x^n}{1.2\ldots(2n+2i-1)},$$

et par suite

$$\varphi_i(x) - (2i+1)\varphi_{i+1}(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{2^{i+1}n(n+1)\ldots(n+i)x^n}{1.2\ldots(2n+2i-1)}.$$

Si l'on suppose $n=0$, le coefficient de x^0 est nul, ce qui montre que l'expression précédente est divisible par x, ou encore que l'on ne peut pas supposer n inférieur à 1. Par conséquent, si l'on divise par x et si l'on change dans le résultat n en $n+1$, on a

$$\varphi_{i+2}(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{2^{i+1}(n+1)(n+2)\ldots(n+i+1)x^n}{1.2\ldots(2n+2i+1)}.$$

Cette formule (1) est donc générale, ce qui prouve que $\varphi_i(x)$ ne contient que des puissances positives de x et donne en même temps la forme de cette fonction.

Note. — Solutions analogues de MM. Georges de Villepin, élève en Mathématiques spéciales au collége Stanislas; Driant, élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout); P. Mansion; F. Beillar, élève de Mathématiques spéciales; Welsch; A. Miniscloux; Paul Vivier, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Strasbourg; A. Laisant, capitaine du génie; E. M., lieutenant d'artillerie; E. Pellet, élève du lycée de Nîmes; Lucien Bignon, à Lima; de Virieu, professeur à Lyon.

Question 538

(voir t XIX, p. 307);

PAR M. WELSCH,
Élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout).

Discuter la courbe $13y = p(25x - 12x^3)$.

Cette courbe passe par l'origine, car son équation est satisfaite pour $x = 0, y = 0$.

L'origine est un centre de la courbe, car l'équation ne change pas quand on y change x en $-x$ et y en $-y$. D'après cela, il y a un point d'inflexion à l'origine, ce que l'on peut voir aussi directement, car

$$y' = \frac{p}{13}(25 - 36x^2),$$

et

$$y'' = -\frac{72p}{13}x = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

Nous avons pour le coefficient angulaire d'une tangente quelconque

$$y' = \frac{p}{13}(25 - 36x^2)$$

A l'origine

$$y' = \frac{25p}{13}.$$

Les points pour lesquels l'ordonnée est *maxima* ou *minima* sont donnés par $y' = 0$, c'est-à-dire par $x^2 = \frac{25}{36}$, d'où

$$x = \pm\frac{5}{6},$$

et

$$y = \pm\frac{5p}{13.6}\left(25 - 12\frac{25}{36}\right) = \pm\frac{5p.25.2}{13.6.3} = \pm\frac{125p}{117}.$$

Le maximum a lieu pour $x = \frac{5}{6}$, et le minimum pour $x = -\frac{5}{6}$; ce qu'indique $y'' = -\frac{72p}{13}x$, qui est négative dans le premier cas, et positive dans le second.

Nous avons vu que le centre, qui est à l'origine, est un point d'inflexion; il n'y en a pas d'autre, car y'' n'est nul que pour $x = 0$.

Tels sont les points remarquables que présente la courbe; pour x réel, y l'est aussi, et n'a qu'une seule valeur; la courbe est donc continue et à branches infinies. Il n'y a ni points d'arrêt, ni points de rebroussement; il n'y a pas non plus d'asympote, car le rapport

$$\frac{y}{x} = p(25 - 12x^2)$$

ne tend pas vers une limite finie pour $x = \pm\infty$.

L'axe des x est rencontré par la courbe en trois points, pour lesquels on a

$$x = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{25}{12},$$

ce qui donne l'origine

$$(x = 0, \quad y = 0),$$

et deux points symétriques par rapport à l'origine

$$\left(x = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}, \ y = 0\right) \quad \text{et} \quad \left(x = -\frac{5\sqrt{3}}{6}, \ y = 0\right).$$

Lorsque $x = 0$, $y = 0$; x croissant, y commence à croître, jusqu'à ce que $x = \frac{5}{6}$, atteint un maximum correspondant à cette valeur, puis décroît, s'annule pour $x = \frac{5\sqrt{3}}{6}$, puis devient négatif, et augmente indéfiniment en valeur absolue. Lorsque x est très-grand,

$$\frac{y}{x} = p(25 - 12x^2)$$

est aussi très-grand en valeur absolue, ce qui indique que l'ordonnée croît plus rapidement que l'abscisse.

Le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est, avons-nous dit, $\frac{25p}{13}$.

Cherchons les tangentes aux deux autres points où l'axe des x rencontre la courbe.

Pour $x = \pm \frac{5\sqrt{3}}{6}$,

$$y' = \frac{p}{13}(25 - 36x^2) = \frac{p}{13}(25 - 75) = -\frac{50p}{13};$$

les ordonnées, à l'origine, des deux tangentes considérées sont, d'après les équations

$$y = -\frac{50p}{13}\left(x \mp \frac{5\sqrt{3}}{6}\right):$$

$$b = \pm \frac{50p.5\sqrt{3}}{13.6} = \pm \frac{125p\sqrt{3}}{39}.$$

La courbe étant symétrique par rapport à l'origine, la branche de gauche est identique à celle de droite, sauf qu'elle est renversée. On peut donc considérer sa discussion comme terminée.

N. B. — Cette courbe représentant, d'après M. Édouard [illegible] la variation de l'attraction terrestre quand on [illegible]ns le sein de la terre, il n'y a lieu de considérer [illegible] valeurs de x positives et inférieures à 1, le rayon [illegible]re étant pris pour unité.

On [illegible] l'attraction est nulle au centre, comme d'ailleurs cela est évident, puis elle croît, passe par un maximum et décroît jusqu'à la surface. L'attraction de la terre est donc moindre à sa surface qu'à une certaine profondeur, et elle atteint son maximum quand la distance n'est plus que les $\frac{5}{6}$ du rayon terrestre.

On voit qu'à la surface de la terre, où $x = 1$, l'attraction $y = p$, tandis que pour $x = \frac{5}{6}$,

$$y = \frac{125\,p}{117}.$$

Remarque. — Dans cette courbe, comme dans toute cubique, les tangentes coupent la courbe, car toute tangente coupe la courbe en deux points confondus en un seul, et il faut qu'elle la coupe en un troisième, en exceptant les points d'inflexion qui sont des points triples.

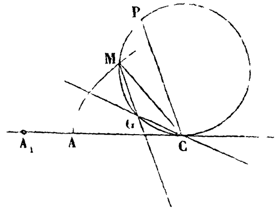
Note. — Autres solutions par MM. Driant, du lycee de Metz, et de Virieu, professeur a Lyon. Ce dernier trouve que les diamètres de la courbe sont des paraboles cubiques dont l'equation est de la forme $y = Ax + Bx^3$.

Questions 799 *et* 800;

Par M. ROUQUET,
Professeur au lycee de Pau.

799. *L'enveloppe des droites coupant une cycloïde sous un angle constant est une cycloïde égale.*

Fig. 1.



Soient M un point situé sur l'un des arcs de cycloïde, dont le point de départ est en A ; C le point de contact du cercle générateur dans la position de ce cercle qui correspond au point M, en sorte que arc CM = AC, et que CM est normale à la cycloïde.

Par le point M menons la droite MG qui coupe la cycloïde sous l'angle donné θ. L'angle que fait cette droite avec la normale CM étant le complément de θ, l'arc CG du cercle générateur compris entre le point C et la ligne MG est constant, et compté toujours dans le même sens à partir du point C.

Cela posé, menons par le point C une droite CP parallèle à GM et rencontrant la circonférence en P. Le lieu du point P est une cycloïde égale à la première; car si l'on prend sur la base de la cycloïde, à partir du point A et dans un sens convenable, une longueur égale à MP ou à CG, on aura

$$\text{arc } CP = CA_1.$$

De plus, la droite CP étant normale à cette cycloïde, l'enveloppe des lignes telles que CP est, d'après une propriété connue, une cycloïde égale à la première.

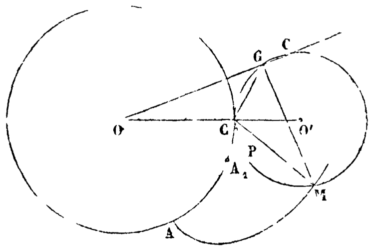
D'un autre côté, la droite CG étant constante en grandeur et en direction, il est évident que l'enveloppe des lignes analogues à MG n'est autre que l'enveloppe des droites CP, que l'on aurait transportée parallèlement à elle-même, de manière à lui faire parcourir dans la direction fixe CG une longueur égale à cette corde.

L'enveloppe demandée est donc une cycloïde égale à la cycloïde proposée.

800. *L'enveloppe des droites coupant une épicycloïde sous un angle constant est une épicycloïde semblable.*

Soient O le centre du cercle fixe, O′ le centre du cercle mobile dans l'une de ses positions, M le point correspondant de la courbe, en sorte que C étant le point de contact des deux cercles, et A le point de départ de l'arc d'épicycloïde sur lequel est situé le point M, l'arc CM égale

Fig. 2



l'arc CA, et CM est normale à la courbe au point M.

Menons par le point M la ligne MG qui coupe l'épicycloïde sous l'angle donné θ. L'angle CMG étant le complément de θ intercepte sur le cercle O' un arc CG constant en grandeur et compté toujours dans le même sens à partir du point C. Les éléments du triangle OCG ont dès lors des valeurs indépendantes de la position du point M sur la courbe, et la droite OG rencontre par conséquent le cercle O' en un second point G' tel, que l'arc CG' est aussi constant.

Cela posé, prenons à partir du point M, sur le cercle générateur et dans un sens convenable, un arc MP égal à l'arc CG'. L'angle OCP sera égal à l'angle OGM, comme ayant même mesure.

D'un autre côté, le lieu géométrique du point P est une épicycloïde égale à la première, dont le point de départ A_1 est situé sur le cercle fixe O, à une distance AA_1 du point A égale à MP ou à CG'; car

$$CP = CM \pm MP = CA \pm AA_1 = CA_1.$$

CP étant normale à cette épicycloïde, l'enveloppe des lignes telles que CP est, d'après une propriété connue, une épicycloïde semblable à la première.

Si l'on fait tourner maintenant la figure formée par les droites CP, autour du point O, d'un angle égal à l'angle constant COG, chacune de ces droites deviendra parallèle à la droite qui lui correspond dans le système formé par les droites MG, puisque l'on a constamment

$$\widehat{OCP} = \widehat{OGM}.$$

En outre, le rapport $\frac{OC}{OG}$ étant constant, il en résulte que les deux systèmes seront devenus homothétiques par rapport au centre O.

Par suite, l'enveloppe des droites MG est une épicycloïde semblable à l'épicycloïde enveloppe des droites CP, et semblable par conséquent à l'épicycloïde donnée.

Note. — Les questions 799 et 800 ont aussi été résolues au moyen de constructions graphiques par MM. Driant, élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout), Gabriel Lippmann, élève en Mathématiques spéciales au lycée Napoléon (classe de M. Lemonnier), Joseph Morel, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble, E. Muzeau, lieutenant d'artillerie, Laisant, capitaine du génie, J.-M. Coindre, du lycée Louis-le-Grand (élève de M. Bouquet).

Les mêmes questions ont été résolues au moyen de calculs par MM. E. Muzeau, lieutenant d'artillerie, C. Laduron, élève à l'École des Mines de Liége, A. Annequin, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble, E. Pellet, élève au lycée de Nîmes, Morel, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

Question 813

(voir t. VI, p. 288),

PAR M. DRIANT,
Élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout).

Démontrer les formules :

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16},$$

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}.$$

(LINDMANN.)

Considérons la première égalité : on y connaît la valeur de $\sin 60^\circ$ qui est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Je vais chercher à évaluer le produit

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$$

en fonction de ce sinus.

Or, $20^\circ = \frac{60^\circ}{3}$; je remarque alors que si je cherchais à faire la trisection de l'angle de 60 degrés, l'équation du troisième degré que j'obtiendrais aurait pour racines

$$\sin\frac{60^\circ}{3}, \quad \sin\frac{60^\circ + 360^\circ}{3}, \quad \sin\frac{60^\circ + 2\ 360^\circ}{3},$$

ou

$$\sin 20^\circ, \quad \sin 140^\circ = \sin 40^\circ, \quad \sin 260^\circ = -\sin 80^\circ.$$

Mais cette équation du troisième degré est, comme on le sait,

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2\times 4} = 0;$$

on a donc

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8},$$

et par suite

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}.$$

(C. Q. F. D.)

La seconde égalité se démontre de la même manière. On trouve aussi par la même marche les deux relations

$$\text{tang}\, 20^\circ\, \text{tang}\, 40^\circ\, \text{tang}\, 60^\circ\, \text{tang}\, 80^\circ = 3,$$

$$\cot 20^\circ \cot 40^\circ \cot 60^\circ \cot 80^\circ = \frac{1}{3},$$

qui se déduisent d'ailleurs aisément des deux premières.

Note. — Même solution de MM. Laisant, capitaine du génie; de Virieu, professeur à Lyon; Petiot et Clai, élèves du lycée de Dijon; Aldacotche et Welsch, du lycee de Metz; Berquet, Jouffray et Sandier, du lycée de Lyon; Armanet, elève de l'École Saint-Michel à Saint-Étienne; Aribert, elève à Sainte-Barbe.