PROUHET

Note sur l'usage et l'emploi des quantités négatives

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 337-348
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__337_0>

NOTE SUR L'USAGE ET L'EMPLOI DES QUANTITÉS NÉGATIVES;

PAR M. PROUHET (*).

1. Les quantités négatives, telles qu'elles se sont présentées à nous jusqu'ici, sont de véritables symboles d'impossibilité, car un problème doit être évidemment considéré comme impossible quand on ne peut le résoudre sans en modifier l'énoncé. Ce caractère est d'ailleurs exprimé par la qualification même dont on accompagne ces quantités et qui désigne bien l'absence de toute solution. Par opposition, les quantités qui résolvent le problème dans le sens précis de son énoncé sont dites *positives* ou *affirmatives;* on ne doit les faire précéder d'aucun signe.

Les quantités négatives, en tant qu'elles signifient une impossibilité, ne peuvent être, en Algèbre, que d'une utilité fort restreinte. On peut même dire que la recherche des modifications à introduire dans l'énoncé du problème, pour le rendre possible, sort des limites de la question; car toute question est nécessairement terminée, soit lorsqu'on en a trouvé la solution, soit lorsqu'on a reconnu qu'elle n'en admet aucune. Ce qui achève d'ailleurs d'enlever tout intérêt à cette recherche, c'est qu'il y a souvent, ainsi que M. Lacroix l'a déjà remarqué, plusieurs manières de former des questions analogues à la proposée et qui soient résolues par la valeur absolue du nombre négatif que l'on avait trouvé.

2. La principale utilité des quantités positives ou né-

(*) Extrait de l'*Algèbre* de LACROIX, 22e édition, revue, corrigée et annotée par M. Prouhet, 1867.

gatives *isolées* résulte de leur emploi en vertu d'une convention expresse, à l'effet de représenter un élément important de certaines grandeurs : c'est ce que quelques exemples vont faire comprendre.

Supposons que l'on veuille assigner sur une ligne droite la position d'un point M rapporté à un point fixe et bien connu O, pris sur cette droite. Cette position sera complétement déterminée si l'on indique : 1° la valeur numérique de la distance qui sépare les deux points, valeur qui dépendra d'une unité choisie arbitrairement; 2° la situation de cette distance comme étant placée à droite ou à gauche du point O.

Ainsi la position du point M sera déterminée si l'on dit qu'il est à 20 mètres *à droite* du point O, ou à 15 mètres *à gauche* de ce point.

Supposons que l'on rapporte divers événements à une époque fixe. L'époque d'un de ces événements sera connue sans ambiguïté si l'on donne la grandeur de l'intervalle qui le sépare de l'époque fixe, et en même temps si l'on marque par les mots *avant* ou *après* que cet événement a *précédé* ou *suivi* l'époque fixe.

On voit, par ces deux exemples, que certaines grandeurs ne sont pas complétement déterminées par leur valeur absolue; il faut y joindre la désignation d'une certaine manière d'être qu'on nomme leur sens et qui, dans le langage ordinaire, s'exprime par les mots *à droite, à gauche; avant, après; au-dessus, au-dessous* et autres analogues.

Dans ce qui suit, nous prendrons surtout pour exemple les distances comptées sur une même droite à partir d'un certain point; mais on verra sans peine que ce que nous dirons s'appliquera à toutes les grandeurs susceptibles d'affecter deux sens complétement opposés. D'ailleurs, toute grandeur peut être assimilée à une distance, et c'est ce que l'on fait souvent, même dans le langage ordinaire, où la plupart des expressions relatives au temps sont empruntées à la notion d'espace.

3. Cela posé, les Mathématiques ayant pour but l'étude des grandeurs, on comprend que cette étude sera d'autant plus parfaite que les grandeurs seront représentées non-seulement dans leur valeur numérique, mais encore dans le sens qu'elles affectent. L'Algèbre devra donc avoir des signes pour exprimer ce qui, dans le discours, se rend par les mots *à droite, à gauche; au-dessus, au-dessous, etc.*

Les signes destinés à cet usage devront être très-simples et généraux, c'est-à-dire exprimer l'idée commune aux mots que nous venons de citer, mais en la dégageant de tout ce qui se rapporte à une grandeur spéciale.

Or, ce double caractère de simplicité et de généralité se retrouvant dans les signes $+$ et $-$ qui désignent déjà les deux modifications opposées que l'on peut concevoir dans une grandeur, savoir l'augmentation et la diminution, ce sont ceux que nous adopterons désormais pour représenter les deux sens dont certaines grandeurs sont susceptibles.

4. Voici maintenant comment on procédera quand il s'agira de distances comptées sur une même ligne. On verra sans peine ce qu'il faudrait faire dans des cas analogues.

Toutes les distances comptées à partir d'un certain point ou *origine* O, et dans un sens convenu, de gauche à droite par exemple, seront représentées par leur valeur numérique précédée du signe $+$, et toutes les distances comptées dans le sens opposé seront représentées par leur valeur numérique précédée du signe $-$.

Ainsi, $+5$ désignera une distance de 5 unités comptée à droite du point O, et -5 une distance égale à la première, mais comptée à gauche de ce point.

La distance considérée aura donc une expression composée : 1° d'un nombre qui indique son rapport à l'unité et que l'on nomme sa valeur absolue ou numérique; 2° du signe $+$ ou du signe $-$ qui indique le sens de la grandeur. La distance est dite positive dans le premier cas, et négative dans le second.

Dans ces expressions composées, les signes $+$ et $-$, suivant l'heureuse remarque de Cauchy, sont comme des adjectifs qui, sans détruire la signification propre des substantifs auxquels ils sont joints, y ajoutent seulement une idée de relation.

On se contente quelquefois d'énoncer la valeur absolue des quantités positives; mais le signe $+$ doit être sous-entendu.

Quoique l'expression complète d'une grandeur se compose d'un nombre et d'un signe, rien n'empêche de la représenter encore par une seule lettre. Ainsi une grandeur, dont a' est la valeur absolue et qui affecte le sens que l'on convient de désigner par le signe $-$, peut être représentée par la seule lettre a, en posant

$$a = -a'.$$

5. Deux grandeurs affectées de signes sont *égales* lorsqu'elles ont à la fois *la même valeur numérique* et *le même signe*. Elles ne sont égales qu'en valeur absolue lorsque la première condition est seule remplie.

Une distance a est dite plus grande ou plus petite qu'une distance b qui a la même origine, suivant que la première se termine à droite ou à gauche de la seconde, en supposant, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que les distances soient comptées positivement de gauche à droite.

La relation d'inégalité s'exprime par les signes $\gtrless$:

$a > b$ signifie que a est plus grand que b; $a < b$ signifie le contraire.

On voit, par notre définition, que les mots *plus grand que, plus petit que* se rapportent plutôt à la situation qu'à l'étendue. On ne devra donc pas être étonné, si une inégalité relative aux valeurs numériques de deux grandeurs se trouve quelquefois renversée quand on a égard à leurs signes.

En effet, soient a' et b' les valeurs numériques de a et de b, et supposons

$$a' > b';$$

si l'on a

$$\begin{array}{llcl} a = +a', & b = +b', & \text{on aura} & a > b, \\ a = +a', & b = -b', & » & a > b, \\ a = -a', & b = +b', & » & a < b, \\ a = -a', & b = -b', & » & a < b. \end{array}$$

Ainsi, de deux quantités négatives, la plus petite est celle qui a la plus grande valeur absolue.

Si $b' = 0$ et $a = -a'$, on aura

$$a < 0.$$

Une quantité négative est donc moindre que zéro.

Les mots *plus grand que zéro*, *plus petit que zéro*, ont ici le même sens que les mots *au-dessus de zéro, au-dessous de zéro,* employés pour désigner des températures supérieures ou inférieures à une température *initiale*.

6. L'introduction des quantités positives et négatives dans le calcul demande aussi que l'on étende la signification primitivement attribuée aux principales opérations de l'Arithmétique.

Ajouter une distance b à une distance a, ce sera porter la première à la suite de la seconde dans le sens indiqué par son signe. La somme sera la distance qui sépare l'origine de a de l'extrémité de b.

Retrancher b de a, ce sera ajouter b changé de signe à la distance représentée par a.

Les exemples suivants feront comprendre l'emploi et la convenance de ces locutions.

Un courrier se mouvant sur la droite AB, à partir du point O, a parcouru d'abord 5 kilomètres dans le sens AB, et ensuite 3 kilomètres dans le même sens : à quelle distance du point O se trouve-t-il?

Réponse : à 8 kilomètres à droite du point O.

Si nous convenons de considérer les espaces parcourus dans le sens AB comme positifs, le résultat précédent s'exprimera par l'égalité suivante :

$$(+5)+(+3)=+8.$$

Si le sens de la vitesse avait été contraire, le résultat se serait exprimé par l'égalité

$$(-5)+(-3)=-8.$$

D'où l'on voit que *deux grandeurs de même signe étant* ajoutées *donnent un résultat de même signe et dont la valeur absolue est égale à la somme arithmétique des valeurs absolues de ces grandeurs.*

Supposons maintenant que le courrier, ayant parcouru 5 kilomètres dans le sens AB, vienne à parcourir ensuite 8 kilomètres dans le sens contraire. Il est clair qu'il reviendra au point O, et ensuite parcourra 3 kilomètres à gauche de ce point. L'ensemble des chemins parcourus équivaudra donc à 3 kilomètres parcourus à gauche, ce que nous exprimerons ainsi :

$$(+5)+(-8)=-3;$$

on aurait de même

$$(-5)+(+8)=+3.$$

D'où l'on voit que la *somme algébrique de deux quantités de signes différents est égale à la différence arithmétique de leurs valeurs absolues, et doit être affectée du signe de la plus grande.*

Le lecteur trouvera facilement, dans le même ordre d'idées, des exemples de soustraction, et verra que la *suppression* ou soustraction d'un chemin parcouru dans un sens équivaut à l'addition du même chemin parcouru dans l'autre sens. En résumé, les principes relatifs à l'addition et à la soustraction *algébrique* des monômes s'exprimeront par les identités suivantes, où a et b désignent des valeurs absolues :

$$\begin{aligned}
(+a)+(+b)&=+(a+b),\\
(+a)+(-b)&=+(a-b)=-(b-a),\\
(+a)-(+b)&=+(a-b)=-(b-a),\\
(+a)-(-b)&=+(a+b),\\
(-a)-(-b)&=+(b-a).
\end{aligned}$$

6. Les règles de la multiplication dérivent tout naturellement de celles de l'addition.

Supposons qu'un courrier fasse 5 fois 3 kilomètres dans le sens AB, il est clair qu'il aura parcouru en définitive 15 kilomètres dans le sens AB. On aura donc

$$(+3)\times(+5)=+15,$$

on aurait de même

$$(-3)\times(+5)=-15.$$

Si, le même courrier étant supposé se mouvoir depuis un temps indéfini, on vient à supprimer 5 fois 3 kilomètres parcourus dans un sens, il est clair que cela équivaudra à 15 kilomètres parcourus dans le sens opposé. Par conséquent

$$(+3)\times(-5)=-15,$$

$$(-3)\times(-5)=+15,$$

et l'on voit que les règles des signes sont les mêmes pour les quantités positives et négatives, quand elles sont isolées, que pour les termes additifs ou soustractifs des polynômes. La même conclusion s'applique à la division des monômes affectés de signes.

7. Si l'on considère, dans un polynôme, les différents termes comme comprenant à la fois leur valeur absolue et leur signe, le polynôme pourra être assimilé à une somme, et les diverses règles pourront être ramenées à un moins grand nombre, qui sont les suivantes :

1° On ajoute un polynôme à un autre en *ajoutant* au second successivement tous les termes du premier.

2° On retranche un polynôme d'un autre en *retranchant* successivement du second tous les termes du premier.

3° On multiplie deux polynômes entre eux en *ajoutant* tous les produits des termes du premier *multipliés* par les termes du second.

Un peu d'attention montrera au lecteur que ces énoncés, en attribuant aux mots *ajouter*, *retrancher*, *etc.*, leur signification *algébrique*, conduisent aux mêmes résultats que ceux auxquels on est parvenu en traitant à part la valeur absolue des termes et leur signe.

Il suit encore de là, et c'est une conséquence naturelle, que toutes les transformations que nous faisons subir aux équations pour les résoudre s'appliquent encore au cas où les lettres désignent des nombres affectés de signes. Une quantité négative donnée par la résolution d'une équation y satisfera donc en effectuant les opérations d'après les règles que nous venons d'indiquer.

8. Voyons maintenant quel avantage nous pouvons retirer de l'emploi des quantités positives et négatives.

Dans les questions de pur calcul, cet avantage consistera à ramener à un même type toutes les expressions algébriques de même forme, c'est-à-dire celles qui ne diffèrent que par le signe de quelques-uns de leurs termes. Toutes les équations du premier degré à une inconnue seront comprises dans la forme $ax = b$; toutes celles qui renferment deux inconnues, dans la forme $ax + by = c$, etc., tandis qu'il aurait fallu sans cela considérer autant de cas que les signes des termes peuvent présenter de combinaisons distinctes.

Si l'on s'interdisait l'emploi des quantités négatives, on serait arrêté à chaque instant dans les transformations. On ne pourrait faire passer un terme d'un membre dans un autre, multiplier ou diviser par une différence $a - b$, etc., avant d'être assuré que les soustractions indiquées peuvent s'effectuer. Non-seulement il faudrait distinguer autant de cas particuliers que l'on peut former de combinaisons en faisant varier les signes, mais encore ces cas se subdiviseraient eux-mêmes en plusieurs autres selon la grandeur relative des quantités dont le calcul conduirait à prendre la différence.

9. Les avantages que l'on retire des quantités isolées affectées d'un signe résultent, dans les problèmes, de la possibilité de traiter par le même raisonnement et par la même formule toutes les questions qui ne diffèrent que par le sens des diverses grandeurs que l'on y considère.

Exemple. — *Un courrier est supposé se mouvoir sur une droite* AB, *depuis un temps indéfini, avec une vitesse dont la grandeur et la direction sont connues. A une* *certaine époque, il se trouvait au point* O. *On demande quelle est la distance qui le sépare du point* O *à une autre époque donnée.*

Soit t la valeur *algébrique* du temps qui sépare les deux époques, c'est-à-dire le nombre d'heures comprises dans cet intervalle, nombre affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que l'époque considérée est postérieure ou antérieure à l'époque initiale.

Soit v la valeur *algébrique* de la vitesse, c'est-à-dire le nombre de kilomètres parcourus dans une heure, nombre affecté du signe $+$ ou du signe $-$, suivant que la vitesse est dirigée de gauche à droite ou dans le sens contraire.

Il est d'abord visible que la distance inconnue est toujours représentée en valeur absolue par le produit vt. Je dis que le signe de ce produit en représente aussi le sens.

En effet, si le courrier marche vers la droite, et que l'époque donnée soit postérieure à l'époque initiale, le produit vt sera positif; mais la distance cherchée est bien à droite du point O. Son signe sera donc celui de vt.

Si le courrier marche vers la droite et que l'époque donnée soit antérieure à l'époque fixe, le produit vt sera négatif; mais la distance cherchée est alors à gauche du point O. Son signe est donc encore celui de vt.

Si le courrier marche vers la gauche et que l'époque donnée soit antérieure à l'époque initiale, le produit vt sera négatif : la distance cherchée, étant évidemment à gauche du point O, a donc le signe de vt.

Si le courrier marche vers la gauche et que t soit négatif, le produit vt est positif, et c'est encore le signe qui convient à la distance cherchée.

On conclut de là qu'en appelant x la valeur algébrique de cette distance, on a dans tous les cas

$$x = vt.$$

Problème des courriers généralisé. — Reprenons maintenant le problème du n° 64 et avec les mêmes notations, mais en laissant indéterminé le sens des vitesses, et en supposant que les lettres b, c, x, y représentent les valeurs algébriques des quantités considérées.

Cela posé, soit t la valeur algébrique du temps qui sépare l'époque de la rencontre de l'époque initiale où les deux courriers étaient simultanément l'un en A, l'autre en B. A étant l'origine de la distance nommée x et B l'origine de la distance nommée y, comptons les x positivement dans le sens AB et les y positivement dans le sens BA, ce qui détermine le signe de chaque vitesse d'après son sens. On aura, d'après le problème précédent et dans tous les cas,

$$x = bt, \quad y = ct,$$

d'où

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}. \tag{1}$$

D'un autre côté, on s'assurera facilement, en examinant les diverses positions relatives du point de rencontre et des points A et B, que l'on a toujours, en tenant compte des signes,

$$x + y = a. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) sont donc les équations les plus générales du problème. On en tirera les formules

$$x = \frac{ab}{b+c}, \quad y = \frac{ac}{b+c},$$

qui résoudront ce problème, quelles que soient les hypothèses faites sur le sens des vitesses données.

Ces exemples suffisent pour montrer que l'emploi des signes + et — permet d'atteindre à un haut degré de généralité. Nous remarquerons que l'on suit quelquefois une marche inverse. On établit les formules pour une hypothèse particulière faite sur le sens des grandeurs; on fait voir ensuite qu'elles s'étendent à tous les cas.

10. La plupart des difficultés auxquelles ont donné lieu les quantités négatives viennent de ce qu'on a souvent confondu leur rôle comme symbole d'impossibilité avec celui qu'elles remplissent quand elles servent à marquer un certain état des grandeurs.

On serait peut-être moins exposé à tomber dans cette confusion d'idées, si, prenant en considération, au début de l'Algèbre, le double aspect des grandeurs (valeur numérique et sens), on établissait dès lors les diverses conventions nécessaires pour en tenir compte dans le calcul. L'esprit, naturellement frappé du principal rôle des quantités négatives, verrait bien qu'elles ne sont qu'accidentellement des caractères d'impossibilité, et qu'en cela elles ne se distinguent pas des quantités positives (*).