Abel Transon

Sur le principe et la règle des signes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 289-298

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__289_0>

SUR LE PRINCIPE ET LA RÈGLE DES SIGNES;

PAR M. ABEL TRANSON.

I.

L'emploi des deux signes de l'addition et de la soustraction pour distinguer les directions opposées suivant lesquelles les segments d'une même ligne peuvent être parcourus, cet emploi est admis sans difficulté dans la Géométrie de Descartes, puisque, dans les équations que comporte cette application de l'Algèbre, il n'est aucun symbole littéral qui, s'il représente une distance mesurée parallèlement à une droite donnée, n'implique à la fois une valeur numérique et un signe, c'est-à-dire une grandeur et une direction.

Le principe des signes n'est pas moins indispensable, ainsi que M. Chasles l'a montré surabondamment, dans les calculs de cette autre Géométrie où le système artificiel des coordonnées est remplacé par la considération directe de segments interceptés sur telle ou telle ligne droite d'une figure par d'autres lignes, droites ou courbes, de la même figure.

Cependant la plupart des géomètres persistent à considérer l'attribution des signes *plus* ou *moins* à des quantités isolées comme étant absolument impossible et absurde, au moins lorsqu'il s'agit des calculs de l'Algèbre proprement dite (*).

Or, il semble naturel de croire que l'usage du principe

(*) *Voir*, à ce sujet, l'ouvrage récent de M. Duhamel : *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e Partie.

des signes, universellement accepté dans la Géométrie analytique, devra tôt ou tard réagir sur la manière de concevoir la théorie des quantités positives ou négatives dans l'Algèbre elle-même. Car il serait au moins étrange qu'un principe reconnu essentiel et indispensable à l'une des applications les plus étendues de la science du calcul lui fût étranger et contradictoire lorsqu'on la considère, cette même science, dans toute sa généralité.

II.

Comme une même distance ou un même chemin peuvent être parcourus en deux sens opposés, on comprend bien qu'il ne saurait être inutile de caractériser le sens de ce parcours par un symbole spécial; mais, qu'on ait affecté à cet emploi les signes préalablement admis pour représenter l'addition et la soustraction, voilà ce qui a besoin d'être expliqué; car l'addition comme la soustraction résultent de la combinaison de deux nombres au moins, et on peut trouver qu'il est contradictoire d'attribuer leurs symboles à des grandeurs isolées.

Cependant il suffit d'un peu de réflexion pour apercevoir la convenance de cette attribution : c'est que la réunion (*adjonction, juxtaposition*) des distances de même sens donne une distance résultante dont la grandeur métrique se forme de la *somme arithmétique* des distances partielles, au lieu que la réunion de deux distances de sens contraire donne une distance résultante numériquement égale à *l'excès arithmétique* de la plus grande sur la plus petite.

Aussi le signe *plus* ou le signe *moins,* attribué au nombre qui mesure une distance, n'implique en aucune façon l'idée d'une addition ou d'une soustraction actuelle, ce qui serait absurde. La présence d'un tel signe indique d'abord et principalement une manière d'être actuelle de la grandeur géométrique, mais aussi, par une circonstance très-heureuse, le rôle qu'une telle grandeur remplira lors de sa réunion, lors de son *addition* avec d'autres grandeurs de même nature et de sens divers.

III.

L'attribution des signes *plus* ou *moins* à des nombres isolés étant ainsi établie, en tant du moins que de tels nombres représentent des grandeurs linéaires, il est indispensable d'établir ensuite les règles qui sont relatives au produit ou au quotient de tels nombres. Transporter sans explication, comme il me semble qu'on le fait quelquefois, de l'Algèbre pure à la Géométrie analytique, ce qu'on appelle *la règle des signes des monômes*, c'est selon moi commettre, d'après l'état actuel de l'enseignement, une singulière inadvertance. Car, en Algèbre proprement dite, quelle valeur attache-t-on à cette règle des signes des monômes? Uniquement celle d'exprimer d'une manière abrégée le résultat de la combinaison de plusieurs polynômes. « Quand on multiplie deux polynômes l'un par l'autre, dit M. Duhamel, les différents termes du produit sont toujours formés par la multiplication d'un terme du multiplicande par un terme du multiplicateur; le signe de ce terme est + quand les deux termes qu'on a multipliés ont le même signe dans leurs polynômes respectifs; et le signe est — quand ils ont des signes différents.... Cette règle des signes a été démontrée sans difficulté, et nous l'admettrons; mais nous ferons bien observer qu'ELLE N'A DE SENS et qu'elle n'a été démontrée que dans le cas où les termes affectés du signe — sont précédés de termes additifs dont ils doivent être retranchés (*). »

(*) *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e Partie, p. 105.

Et dans la division : « ... Le signe du terme du quotient en résultera (de la règle de la multiplication), et sera + si les deux termes de degré le plus élevé du dividende et du diviseur ont le même signe; il sera — si ces termes sont de signes différents.... Cette proposition n'implique pas que l'on attache un sens à la division de quantités négatives isolées; elle est une simple conséquence des règles démontrées pour la multiplication, et il faut bien prendre garde à ce que le langage abrégé par lequel on énonce cette règle *ne fasse même pas soupçonner que l'on attache un sens* à une quantité isolée précédée du signe —, qui n'indiquerait pas qu'elle doit être retranchée d'une plus grande. Disons même qu'il n'y aurait aucun sens à attacher à une quantité positive isolée; car que signifierait le signe + mis devant une quantité qui ne doit être ajoutée à aucune autre (*)? »

Il est bien certain que si en Algèbre les signes *plus et moins* constituent exclusivement et toujours les symboles de l'addition et de la soustraction, il faut y contester l'existence des quantités positives ou négatives prises isolément. D'autre part on montre cependant que les quantités négatives, quoique insignifiantes par elles-mêmes, étant soumises à des opérations dirigées par des règles convenables conduisent le calculateur à des résultats vrais et utiles (**); mais des opérations effectuées sur des expressions qui ne représentent absolument rien peuvent-elles avoir elles-mêmes une signification quelconque? Il n'y a pas sur cela d'illusion à se faire, et on doit reçonnaître la justesse de l'observation suivante : « *Observation.* Nous ne saurions trop rappeler que dans ce qui précède nous

(*) *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e Partie, p. 107.

(**) *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e Partie, ch. XVI, Génaralisation des formules par l'introduction des quantités négatives, p. 126.

n'avons attaché *aucun sens* aux opérations sur les quantités négatives. Nous ne nous sommes servi des locutions empruntées aux opérations sur les polynômes que pour indiquer d'une manière rapide et commode le moyen de tirer de la formule type tous les cas particuliers possibles.... Il faut bien se garder de prendre le langage dans un autre sens, et de voir, dans ce moyen commode de renfermer toutes les formules dans une seule, de véritables opérations effectuées sur des quantités négatives isolées, opérations dont on a souvent démontré les règles soit en les rattachant vicieusement à celles des polynômes, soit en cherchant à donner une existence à ces êtres fantastiques, et raisonnant comme si cette représentation arbitraire s'appliquait à tout (*). »

Est-ce donc à de telles extrémités que la science serait réduite? Le mécanisme de l'Algèbre comporterait l'emploi de certains êtres ou symboles *fantastiques* absolument dépourvus de signification, et qui, soumis à des opérations qui n'ont *aucun sens*, donneraient néanmoins des résultats utiles!

Cette doctrine prévaut dans l'enseignement, et je reconnais qu'au point de vue où s'est placé l'auteur à qui j'ai emprunté les citations précédentes elle est inévitable. Mais je demande si la Géométrie analytique, si la Géométrie des coordonnées et la Géométrie segmentaire, elles qui attribuent aux quantités précédées du signe *plus* ou du signe *moins* une signification très-précise, si elles peuvent accepter de cette doctrine leurs règles usuelles pour les signes du produit et du quotient.

Sur ce point les Traités de Géométrie analytique offrent à mon gré une lacune qu'il est d'ailleurs facile de faire disparaître.

(*) *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e Partie, p. 132.

IV.

Le calcul d'une grandeur linéaire se réduit, comme on sait, à la détermination d'une ou de plusieurs quatrièmes proportionnelles ; un tel calcul comporte donc les opérations de la multiplication et de la division. Or, ayant désormais à opérer sur des quantités qui ne sont pas douées seulement d'une grandeur métrique, mais qui sont douées aussi d'une propriété de direction, il est indispensable d'étendre l'idée même de la multiplication. C'est une nécessité analogue à celle qu'on rencontre en Arithmétique lorsqu'on aborde le calcul des nombres non entiers. Autrefois on disait, à cette occasion, que multiplier un nombre par un autre c'est trouver un nombre qui soit composé avec le multiplicande comme le multiplicateur l'est avec l'unité. Les auteurs modernes préfèrent définir la multiplication par un exemple particulier, comme en disant que multiplier un nombre par $\frac{3}{4}$ c'est prendre trois fois le quart de ce nombre. Substituer ainsi un fait particulier à l'énoncé d'une idée générale offre peut-être quelque avantage qui m'échappe. Je m'en tiens pour l'objet actuel à la définition très-claire rapportée ci-dessus.

Or, la grandeur linéaire prise arbitrairement pour unité dans un calcul de distances a nécessairement un sens déterminé. Les distances de même sens qu'elle sont dites positives et sont affectées du signe $+$, tandis que les grandeurs de sens contraire sont négatives et affectées du signe $-$.

Si on applique aux nombres correspondants à ces sortes de grandeurs l'idée générale de la multiplication rappelée ci-dessus, il faudra dire que le produit est de même sens que le multiplicande ou de sens contraire, selon que le multiplicateur a ou n'a pas le même sens ou signe que l'unité. Cela entraîne la règle connue que *le produit est positif quand les deux facteurs sont de même signe, et négatif quand ils sont de signe contraire.*

V.

Dans l'enseignement actuel, l'Algèbre proprement dite ne connaît et ne représente par ses symboles littéraux que ce qu'on appelle des nombres absolus. Elle n'entend pas connaître ou représenter la qualité, particulière aux nombres qui mesurent des distances, de pouvoir s'accroître et se former en deux sens différents. Cependant l'application de l'Algèbre à la Géométrie et aussi à la Mécanique exige impérieusement cette distinction, de sorte qu'en se particularisant la science est obligée d'accepter des symboles et des règles qu'elle ne possède pas quand on l'étudie dans sa généralité. Cela paraît contraire à la logique, et il semblerait plus conforme à une saine philosophie que l'Algèbre attribuât aux grandeurs abstraites qu'elle symbolise toutes les propriétés particulières qu'elle est destinée à rencontrer dans les grandeurs concrètes auxquelles elle peut être appliquée.

Si on n'admet pas ce principe, il sera, je crois, difficile de se refuser au raisonnement suivant.

Les grandeurs géométriques, comme toutes les grandeurs continues, ont la propriété de se pouvoir diviser indéfiniment, et par là elles donnent lieu aux nombres fractionnaires aussi bien qu'aux nombres entiers. Il est au contraire des grandeurs discontinues dont la pluralité donne lieu exclusivement aux nombres entiers. Si la perfection de l'Algèbre consistait à n'attribuer au nombre abstrait que les propriétés qui se rencontrent universellement dans toutes les grandeurs concrètes, on devrait donc enseigner d'abord une Algèbre où les symboles littéraux ne représenteraient que des nombres entiers. Cependant la plus simple formule pouvant conduire à exprimer une division où le dividende ne serait pas un multiple du diviseur, il faudrait rejeter absolument de telles formules, comme on rejette actuellement, en Algèbre pure, les formules qui conduisent à soustraire un nombre plus grand d'un plus petit. A la vérité, *pour abréger l'expression des résultats* et *pour généraliser les formules,* on pourrait ensuite introduire dans le calcul ces quotients impossibles; mais on conviendrait d'y voir des êtres purement *fantastiques,* et on expliquerait avec le plus grand soin que les opérations à faire sur ces êtres de fantaisie n'auraient par elles-mêmes *aucun sens,* bien qu'elles dussent, étant soumises aux mêmes règles que les quotients de divisions possibles, conduire le calculateur à des résultats vrais et utiles. Après cela il y aurait à enseigner une Algèbre applicable aux grandeurs continues, par conséquent une Algèbre où le symbole de la division représenterait un être réel quand même le dividende ne serait pas un multiple du diviseur; et dans cette Algèbre appliquée il y aurait encore à affirmer le sens des opérations à faire sur ces symboles et à expliquer les règles de ces opérations.

Cependant n'est-il pas à la fois plus rationnel et plus simple d'admettre d'emblée, comme on le fait, que toute grandeur, objet du calcul algébrique, est essentiellement et indéfiniment divisible, sauf à rejeter toute solution non entière dans les applications du calcul aux grandeurs discontinues, c'est-à-dire aux grandeurs mesurées par une unité naturellement indivisible.

Pareillement, ne serait-il pas rationnel et simple d'attribuer d'emblée à toute grandeur abstraite, objet de l'Algèbre proprement dite, non-seulement la valeur métrique (numérique) que tous les géomètres lui accordent, mais aussi cette propriété directive que Kant appelle une *qualité* (par opposition à la *quantité* qui est exprimée par le nombre absolu), propriété que Cauchy à son tour appelle, dans ses *Leçons d'Analyse*, un *adjectif du nombre*, ce qui revient précisément à l'idée de Kant.

Il semble que ce serait là un moyen assuré de clore le trop long débat relatif à la théorie des quantités négatives. Car premièrement il n'y aurait plus lieu au malentendu de ceux qui s'arrêtent toujours à voir dans le signe attribué à une quantité isolée le symbole d'une opération. D'ailleurs, comme il arrive dans la réunion des quantités que le signe si heureusement choisi pour marquer la direction peut à volonté se changer en un symbole d'opération et réciproquement, la généralité des formules serait évidente *à priori*. En effet, en partant des équations les plus générales, on verrait que les transformations successives n'altéreraient pas plus le signe d'un des éléments du calcul qu'elles n'altèrent sa valeur numérique, puisque l'un et l'autre, le signe et la valeur, seraient défendus de toute atteinte, étant ensemble comme enveloppés dans le symbole littéral.

Et alors on passerait de plain-pied de la pratique d'une Algèbre vraiment générale à toutes ses applications sans avoir connu des symboles qui ne représentent rien et des opérations qui n'ont aucun sens! Étant bien entendu d'ailleurs que dans les applications à une sorte de grandeur concrète qui n'admettrait pas le double état direct et inverse des nombres, on regarderait toute solution négative comme l'indice d'une impossibilité.

VI.

Mais des nombres abstraits dont les uns seront *directs* et les autres *inverses!* Ce serait de la MÉTAPHYSIQUE, dira quelqu'un.

Je demande si, concevoir que l'unité abstraite est divisible, ce n'est pas aussi de la métaphysique. D'ailleurs, j'admets absolument cette appréciation; car je crois depuis longtemps qu'on ne fait pas de mathématiques sans faire de la métaphysique; et je crois de plus qu'il faut le savoir. Toute science, disait Descartes, n'est que PHYSIQUE ou que MÉTAPHYSIQUE.