NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 219-231

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__219_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 760 *à* 762

(voir 2e série, t. V, p. 240 et 187);

PAR M. G.-B. MAFFIOTTI,
Élève à l'Université de Turin.

M. Painvin, dans un article sur les tétraèdres inséré dans les *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 290, fait usage de formules qui conduisent immédiatement à la solution des questions 760, 761.

760. *Étant donnée une surface du second ordre, dont le centre est* O, *il y aura une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à cette surface et en même temps circonscrits à une sphère dont le centre est un point arbitrairement choisi* C; *si* R *est le rayon de la sphère inscrite, si* I *est le point d'intersection du rayon vec-*

teur OC *avec le plan polaire du point* C *par rapport à la surface, on a la relation*

$$R^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{OI}},$$

$2a$, $2b$, $2c$ *représentant les valeurs algébriques des axes de la surface du second ordre.* (PAINVIN.)

Soient $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$, etc., les sommets du tétraèdre. M. Painvin pose

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \quad a_1=a_2=a_3=a_4=1, \quad \frac{dD}{da_r}=D_r.$$

Alors l'équation du plan d'une quelconque des faces du tétraèdre, celle qui est opposée au sommet $M_r\,(x_r, y_r, z_r)$, sera

$$(1)\qquad x\frac{dD}{dx_r}+y\frac{dD}{dy_r}+z\frac{dD}{dz_r}+D_r=0.$$

En donnant à r les valeurs 1, 2, 3, 4, on obtiendra les équations des quatre faces du tétraèdre.

L'équation de la surface du second ordre rapportée à son centre et à ses axes est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

L'équation du plan polaire du point x_r, y_r, z_r par rapport à cette surface est

$$\frac{xx_r}{a^2}+\frac{yy_r}{b^2}+\frac{zz_r}{c^2}=1.$$

Le tétraèdre étant conjugué, cette équation devra être identique avec l'équation (1). On a donc

$$(2)\qquad \frac{dD}{dx_r}=-D_r\frac{x_r}{a^2},\quad \frac{dD}{dy_r}=-D_r\frac{y_r}{b^2},\quad \frac{dD}{dz_r}=-D_r\frac{z_r}{c^2}.$$

En développant le déterminant D et en tenant compte des équations (2), on a

$$(3)\quad \begin{cases} D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = D, \\ D_1 x_1^2 + D_2 x_2^2 + D_3 x_3^2 + D_4 x_4^2 = -a^2 D, \\ D_1 y_1^2 + D_2 y_2^2 + D_3 y_3^2 + D_4 y_4^2 = -b^2 D, \\ D_1 z_1^2 + D_2 z_2^2 + D_3 z_3^2 + D_4 z_4^2 = -c^2 D; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} D_1 x_1 y_1 + D_2 x_2 y_2 + D_3 x_3 y_3 + D_4 x_4 y_4 = 0, \\ D_1 x_1 z_1 + D_2 x_2 z_2 + D_3 x_3 z_3 + D_4 x_4 z_4 = 0, \\ D_1 y_1 z_1 + D_2 y_2 z_2 + D_3 y_3 z_3 + D_4 y_4 z_4 = 0; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dD}{dx_1} + \dfrac{dD}{dx_2} + \dfrac{dD}{dx_3} + \dfrac{dD}{dx_4} = 0, \\ \dfrac{dD}{dy_1} + \dfrac{dD}{dy_2} + \dfrac{dD}{dy_3} + \dfrac{dD}{dy_4} = 0, \\ \dfrac{dD}{dz_1} + \dfrac{dD}{dz_2} + \dfrac{dD}{dz_3} + \dfrac{dD}{dz_4} = 0. \end{cases}$$

Ces dernières équations expriment que la somme des projections des faces du tétraèdre sur chacun des plans coordonnés est nulle.

Maintenant, si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point C, centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre, on aura, en exprimant que ce point est également éloigné de chacune des faces du tétraèdre,

$$\frac{\left(x_0 \dfrac{dD}{dx_1} + y_0 \dfrac{dD}{dy_1} + z_0 \dfrac{dD}{dz_1}\right)^2}{\left(\dfrac{dD}{dx_1}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dy_1}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dz_1}\right)^2} = \frac{\left(x_0 \dfrac{dD}{dx_2} + y_0 \dfrac{dD}{dy_2} + z_0 \dfrac{dD}{dz_2}\right)^2}{\left(\dfrac{dD}{dx_2}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dy_2}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dz_2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x_0 \dfrac{dD}{dx_3} + y_0 \dfrac{dD}{dy_3} + z_0 \dfrac{dD}{dz_3}\right)^2}{\left(\dfrac{dD}{dx_3}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dy_3}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dz_3}\right)^2} = \frac{\left(x_0 \dfrac{dD}{dx_4} + y_0 \dfrac{dD}{dy_4} + z_0 \dfrac{dD}{dz_4}\right)^2}{\left(\dfrac{dD}{dx_4}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dy_4}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dz_4}\right)^2} = R^2.$$

A l'aide des relations (2), ces équations se transforment en celles-ci :

$$R^2\left(\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}\right)=\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}-1\right)^2,$$

$$R^2\left(\frac{x_2^2}{a^4}+\frac{y_2^2}{b^4}+\frac{z_2^2}{c^4}\right)=\left(\frac{x_0x_2}{a^2}+\frac{y_0y_2}{b^2}+\frac{z_0z_2}{c^2}-1\right)^2,$$

$$R^2\left(\frac{x_3^2}{a^4}+\frac{y_3^2}{b^4}+\frac{z_3^2}{c^4}\right)=\left(\frac{x_0x_3}{a^2}+\frac{y_0y_3}{b^2}+\frac{z_0z_3}{c^2}-1\right)^2,$$

$$R^2\left(\frac{x_4^2}{a^4}+\frac{y_4^2}{b^4}+\frac{z_4^2}{c^4}\right)=\left(\frac{x_0x_4}{a^2}+\frac{y_0y_4}{b^2}+\frac{z_0z_4}{c_2}-1\right)^2.$$

Je multiplie la première de ces équations par D_1, la deuxième par D_2, la troisième par D_3, et la quatrième par D_4, et je les ajoute ensuite membre à membre. Le résultat, simplifié à l'aide des relations (3), (4), (5), (6), est

$$R^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1.$$

La droite CO, dont les équations sont

$$X=\frac{x_0}{z_0}Z,\quad Y=\frac{y_0}{z_0}Z,$$

perce le plan polaire

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$$

du point x_0, y_0, z_0, par rapport à la surface du second ordre, en un point I dont les coordonnées sont

$$\frac{x_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}},\quad \frac{y_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}},\quad \frac{z_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}}.$$

Donc

$$\mathrm{CI} = \left(1 - \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}}\right)\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2},$$

$$\mathrm{OI} = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}};$$

par conséquent,

$$\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{OI}} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1.$$

C. Q. F. D.

761. *Si la surface donnée est un paraboloïde et* I *le centre de la section de la surface par le plan polaire du point* C, *on a la relation*

$$\mathrm{R}^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \mathrm{CI},$$

$2p$ et $2q$ étant les paramètres des sections principales.

(Painvin.)

Soit

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0$$

l'équation du paraboloïde. En conservant les notations dont on a fait usage dans la question précédente, les conditions qui expriment, dans notre cas, que le tétraèdre est conjugué au paraboloïde sont

$$(7)\left\{\begin{array}{l} \mathrm{D}_r = x_r \dfrac{d\mathrm{D}}{dx_r}, \quad \dfrac{d\mathrm{D}}{dy_r} = -\dfrac{y_r}{p}\dfrac{d\mathrm{D}}{dx_r}, \quad \dfrac{d\mathrm{D}}{dz_r} = -\dfrac{z_r}{q}\dfrac{d\mathrm{D}}{dx_r}, \\ \qquad\qquad (r = 1, 2, 3, 4). \end{array}\right.$$

Les formules relatives aux déterminants, combinées avec les relations (7), donnent

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dD}{dx_1}+\frac{dD}{dx_2}+\frac{dD}{dx_3}+\frac{dD}{dx_4}=0,\\
&x_1^2\frac{dD}{dx_1}+x_2^2\frac{dD}{dx_2}+x_3^2\frac{dD}{dx_3}+x_4^2\frac{dD}{dx_4}=0,\\
&y_1^2\frac{dD}{dy_1}+y_2^2\frac{dD}{dy_2}+y_3^2\frac{dD}{dy_3}+y_4^2\frac{dD}{dy_4}=-pD,\\
&z_1^2\frac{dD}{dz_1}+z_2^2\frac{dD}{dz_2}+z_3^2\frac{dD}{dz_3}+z_4^2\frac{dD}{dz_4}=-qD,\\
&x_1y_1\frac{dD}{dx_1}+x_2y_2\frac{dD}{dx_2}+x_3y_3\frac{dD}{dx_3}+x_4y_4\frac{dD}{dx_4}=0,\\
&x_1z_1\frac{dD}{dx_1}+x_2z_2\frac{dD}{dx_2}+x_3z_3\frac{dD}{dx_3}+x_4z_4\frac{dD}{dx_4}=0,\\
&y_1z_1\frac{dD}{dx_1}+y_2z_2\frac{dD}{dx_2}+y_3z_3\frac{dD}{dx_3}+y_4z_4\frac{dD}{dx_4}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

(*Voir* PAINVIN, *loc. cit.*)

On a aussi

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&x_1\frac{dD}{dx_1}+x_2\frac{dD}{dx_2}+x_3\frac{dD}{dx_3}+x_4\frac{dD}{dx_4}=D,\\
&y_1\frac{dD}{dx_1}+y_2\frac{dD}{dx_2}+y_3\frac{dD}{dx_3}+y_4\frac{dD}{dx_4}=0,\\
&z_1\frac{dD}{dx_1}+z_2\frac{dD}{dx_2}+z_3\frac{dD}{dx_3}+z_4\frac{dD}{dx_4}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations qui expriment que le point x_0, y_0, z_0 est le centre d'une sphère de rayon R et inscrite dans le tétraèdre deviennent, en ayant égard aux relations (7),

$$R^2\left(\frac{y_1^2}{p^2}+\frac{z_1^2}{q^2}+1\right)=\left(\frac{y_0y_1}{p}+\frac{z_0z_1}{q}-x_0-x_1\right)^2,$$

$$R^2\left(\frac{y_2^2}{p^2}+\frac{z_2^2}{q^2}+1\right)=\left(\frac{y_0y_2}{p}+\frac{z_0z_2}{q}-x_0-x_2\right)^2,$$

$$R^2\left(\frac{y_3^2}{p^2}+\frac{z_3^2}{q^2}+1\right)=\left(\frac{y_0y_3}{p}+\frac{z_0z_3}{q}-x_0-x_3\right)^2,$$

$$R^2\left(\frac{y_4^2}{p^2}+\frac{z_4^2}{q^2}+1\right)=\left(\frac{y_0y_4}{p}+\frac{z_0z_4}{q}-x_0-x_4\right)^2.$$

J'ajoute ces équations membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{dD}{dx_1}, \frac{dD}{dx_2}, \frac{dD}{dx_3}, \frac{dD}{dx_4}$. En tenant compte des équations (8) et (9), j'obtiens

$$R^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-\frac{y_0^2}{p}+\frac{z_0^2}{q}-2x_0.$$

Le plan polaire du point (x_0, y_0, z_0) est

$$\frac{yy_0}{p}+\frac{zz_0}{q}=x_0+x.$$

Soit I le centre de la section faite par ce plan dans la surface que nous considérons. La droite CI sera, comme on sait, parallèle à Ox, qui est aussi l'axe de la surface. Les équations de CI seront donc $Z=z_0$, $Y=y_0$; les coordonnées de I seront y_0, z_0, $\frac{y_0^2}{p}, \frac{z_0^2}{q}-x_0$; par conséquent,

$$CI=\frac{y_0^2}{p}+\frac{z_0^2}{q}-2x_0.$$

C. Q. F. D.

762. *Le rayon de la sphère inscrite reste constant lorsque le centre de cette sphère se déplace sur une surface parallèle et égale à la première, cette seconde surface s'obtenant en faisant glisser la première parallèlement à son axe.* (PAINVIN.)

L'énoncé de cette question me paraît inexact. Il fallait dire que le rayon de la sphère reste constant lorsque son centre se déplace sur une surface qui est concentrique et homothétique à la surface donnée, s'il s'agit d'une surface à centre; ou bien, s'il ne s'agit pas d'une surface à centre, sur une surface qu'on obtiendra en faisant glisser la surface parallèlement à elle-même le long de son axe.

En effet, on a trouvé pour les surfaces à centre

$$(1)\qquad R^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

x, y, z étant les coordonnées du centre C de la sphère. Soit M le point d'intersection de la droite OC avec la surface donnée, et m le rapport $\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{MO}}\cdot$ L'équation d'une surface concentrique et homothétique à cette surface, et passant par le point C, sera

$$(2)\qquad \frac{x^2}{ma^2}+\frac{y^2}{mb^2}+\frac{z^2}{mc^2}=1.$$

Supposons maintenant que le point C varie de position en se trouvant toujours sur la surface (2). On aura, en différentiant l'équation (1) et l'équation (2) successivement par rapport à x et à y,

$$R\frac{dR}{dx}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{x}{a^2}+\frac{z}{c^2}\frac{dz}{dx},$$

$$R\frac{dR}{dy}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}\frac{dz}{dy},$$

et

$$\frac{x}{ma^2}+\frac{z}{mc^2}\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{y}{mb^2}+\frac{z}{mc^2}\frac{dz}{dy}=0.$$

Donc évidemment

$$\frac{dR}{dx} = 0, \quad \frac{dR}{dy} = 0,$$

ce qui signifie que R est constant.

Dans le cas d'une surface dépourvue du centre, l'équation de la surface sur laquelle doit glisser le centre C pour que le rayon de la sphère reste constant est de la forme

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2(x + \alpha) = 0.$$

La démonstration est analogue à la précédente.

Questions 769 *et* 770;

PAR M. LADISLAS KRETKOWSKI,
Elève externe de l'École impériale des Ponts et Chaussées.

769. *Nommons secteur en général le corps terminé d'une part par une surface conique, de l'autre par une surface quelconque que nous appellerons la* base du secteur. *Tous les secteurs ayant une base commune et des volumes égaux ont leurs sommets situés dans un même plan.* (ZEUTHEN.)

770. *Le plan dont il est parlé dans la question précédente est perpendiculaire à deux plans sur lesquels l'aire de la projection du périmètre de la base commune est nulle.* (Louis OPPERMANN.)

Désignons respectivement par V, dA, p le volume du secteur, l'élément de la surface de sa base et la longueur de la perpendiculaire abaissée du sommet du secteur sur le plan de l'élément dA; on a alors

$$V = \int \frac{p\,dA}{3} = \frac{1}{3}\int p\,dA,$$

l'intégrale s'étendant à toute la base du secteur.

Si l'on déplace le sommet du secteur de façon que la droite qui joint sa position primitive avec la position nouvelle ait une longueur l, le volume V variera de ΔV et la droite p variera de Δp en conservant sa direction; d'où il résulte

$$V + \Delta V = \frac{1}{3}\int (p + \Delta p)\,dA = \frac{1}{3}\int p\,dA + \frac{1}{3}\int \Delta p\,dA,$$

les limites des intégrales étant celles de la base. On a donc

$$AV = \frac{1}{3}\int \Delta p\,dA = \frac{1}{3}\int l\cos(l, p)\,dA = \frac{l}{3}\int \cos(l, p)\,dA,$$

$\cos(l, p)$ désignant les cosinus de l'angle compris entre les droites l et p. Cette forme de la variation du volume du secteur pour un déplacement quelconque de son sommet est un produit de deux facteurs dont un représente l'influence de la grandeur du déplacement, tandis que l'autre représente l'influence de la direction du déplacement.

Considérons trois positions S_1, S_2, S_3 du sommet du secteur telles, qu'en les joignant par trois droites à un point S de la surface de la base, ces droites ne se trouvent pas dans un même plan, ce qui est toujours possible. Il en résulte que si V_1, V_2, V_3 sont les trois volumes des secteurs ayant S_1, S_2, S_3 respectivement pour sommets, et si l'on déplace ces derniers suivant les directions SS_1, SS_2, SS_3, les trois volumes varieront dans le même sens, et on les rendra tous égaux à un même volume V, qu'on choisira différent de celui qui est relatif au cas où le sommet serait en S. Si l'on fait parcourir aux trois sommets S_1, S_2, S_3 respectivement les longueurs

$$\frac{3(V - V_1)}{\int \cos(l_1, p_1)\, dA}, \quad \frac{3(V - V_2)}{\int \cos(l_2, p_2)\, dA}, \quad \frac{3(V - V_3)}{\int \cos(l_3, p_3)\, dA},$$

les diverses notations ayant les mêmes significations que précédemment, et les indices étant ceux du sommet auquel elles se rapportent. Cela est toujours possible, car les trois intégrales ne sont pas nulles, à cause de ce que, pour ces directions des déplacements des sommets, les volumes V_1, V_2, V_3 varient nécessairement, et si les intégrales étaient nulles, on verrait, en se reportant à la forme de ΔV trouvée précédemment, que, contrairement à ce qu'on vient d'observer, les variations des volumes seraient nulles. Ces trois positions des sommets que nous désignerons par Σ_1, Σ_2, Σ_3 existent donc effectivement, et comme elles ne sont pas sur une droite, elles définissent un plan $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$.

Considérons deux positions du sommet du secteur, pour lesquelles les volumes sont égaux. La variation du volume, en passant d'une position à l'autre, est donc nulle, et par suite, pour cette direction du déplacement du sommet du secteur et ses parallèles, on a

$$\frac{l}{3} \int \cos(l, p)\, dA = 0.$$

l désignant la distance de deux positions du sommet, $\frac{l}{3}$ n'est pas nul par conséquent; donc, pour cette direction et ses parallèles, on a

$$\int \cos(l, p)\, dA = 0.$$

On en conclut que le déplacement du sommet suivant ces directions ne fait pas varier le volume du secteur. Il s'ensuit que les déplacements suivant les directions définies par deux quelconques des points Σ_1, Σ_2, Σ_3 et leurs parallèles ne font pas varier le volume du secteur, ou, ce qui revient au même, le déplacement suivant le plan $\Sigma_1\,\Sigma_2\,\Sigma_3$ ou suivant un des plans parallèles à ce dernier ne fait pas varier le volume du secteur; comme d'ailleurs chacune des directions SS_1, SS_2, SS_3 ou $S\Sigma_1$, $S\Sigma_2$, $S\Sigma_3$ rencontre les plans dont il vient d'être question, et que le déplacement du sommet suivant chacune de ces droites fait varier le volume du secteur, donc tous les secteurs de même base et de volumes égaux ont leurs sommets sur un plan. C'est le théorème de M. Zeuthen.

Le déplacement suivant le plan $\Sigma_1\,\Sigma_2\,\Sigma_3$, ou suivant un des plans parallèles à ce dernier, ne faisant pas varier le volume, on a, par suite, pour deux directions dans un de ces plans,

$$\int \cos(l_1, p_1)\,d\mathrm{A} = 0, \qquad \int \cos(l_2, p_2)\,d\mathrm{A} = 0,$$

ce qui veut dire que ces directions sont telles, que les projections orthogonales de la base sur deux plans perpendiculaires à ces directions, et par suite au plan $\Sigma_1\,\Sigma_2\,\Sigma_3$ sont nulles; ou, ce qui revient au même, que le plan $\Sigma_1\,\Sigma_2\,\Sigma_3$ est perpendiculaire aux deux plans sur lesquels les aires des projections orthogonales du périmètre de la base commune sont nulles. C'est le théorème de M. Louis Oppermann, de Copenhague.

Nous ajouterons que pour toute surface non fermée, il existe une direction telle :

1° Que les aires des projections orthogonales de cette surface ou les aires des projections de son périmètre sur les plans parallèles à cette direction sont nulles;

2° Que les aires analogues relatives aux plans également inclinés sur cette direction sont égales;

3° Que ces aires augmentent avec les inclinaisons des plans sur cette direction;

4° Que l'aire la plus grande possible correspond aux plans de projection perpendiculaires à cette direction.

Pour s'en assurer, il suffit de considérer un point comme sommet du secteur ayant la surface donnée pour base, dont le volume est désigné par V_1, et un plan qui serait le lieu des sommets des secteurs de volume V_2 différent de V_1, car on a alors pour l'expression des aires en question, l étant la distance des sommets,

$$\int \cos(l, p)\, dA = \frac{3(V_1 - V_2)}{l},$$

qui permet de tirer les conclusions ci-dessus.

Note. — La même question a été traitée par M. Laisant, capitaine du Génie, et par M. Pellet, du lycée de Nîmes. M. Dennery, du lycée de Metz, a traité la question 769.