Nouvelles annales de mathématiques

L. Trouillet

Construction des axes d'une ellipse donnée par deux diamètres conjugués

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 181-182

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__181_0>

CONSTRUCTION DES AXES D'UNE ELLIPSE DONNÉE PAR DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS;

PAR M. L. TROUILLET,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis
(classe de M. Vacquant).

Je rappellerai d'abord les propriétés suivantes de l'ellipse :

1° Un point M d'une droite AB de longueur constante, glissant sur deux axes rectangulaires Ox, Oy, engendre une ellipse dont les axes sont dirigés suivant Ox et Oy, et égaux à 2MA et 2MB.

2° La normale au point M s'obtient en joignant ce point au point P de concours des parallèles menées aux axes par les points A et B.

3° Si AB et A'B' sont deux positions rectangulaires de la droite mobile, les diamètres OM et OM' sont conjugués. En effet, l'égalité des triangles PMA, OA'M' entraîne celle des angles $\widehat{MPA}$ et $\widehat{A'OM'}$, et par suite la perpendicularité de la normale PM sur le diamètre OM'. Donc, si OM'_1 est parallèle à MP et terminée à AB, $MP = OM' = OM'_1$ et l'angle M'_1OM' est droit.

D'où la construction suivante :

Soient OM, OM' les diamètres donnés; je mène sur OM' la perpendiculaire $OM_1 = OM'$: si je décris, du milieu H de MM'_1 pour centre, avec OH pour rayon, une circonférence qui coupe MM'_1 en A et B, les axes seront dirigés suivant OA et OB, et MB, MA seront leurs demi-longueurs.

Remarque. — On a, dans le triangle OMM'_1,

$$2\overline{OH}^2 + 2\overline{MH}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OM'_1}^2,$$

et

$$\overline{MM'_1}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OM'_1}^2 - 2OM.OM'_1 \cos \widehat{MOM'_1}.$$

Posant

$$OM = a', \quad OM'_1 = b',$$
$$MB = a, \quad MA = b, \quad MOM' = \theta,$$

il vient

$$2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a'^2 + b'^2,$$

d'où

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$

et

$$(a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b'\sin\theta,$$

d'où

$$ab = a'b'\sin\theta.$$

(Théorèmes connus.)