NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J.-J.-A. MATHIEU

Note sur certains paradoxes et solution de la question 705

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 6 (1867), p. 177-180

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1867_2_6__177_1>

NOTE SUR CERTAINS PARADOXES ET SOLUTION DE LA QUESTION 705;

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie.

On emploie souvent avec trop peu de circonspection un genre de raisonnement qui en exige beaucoup, et qui consiste, dans les questions d'analyse appliquée, à juger *à priori* du nombre des conditions géométriques par celui des équations, ou réciproquement.

De l'abus de cette pratique peuvent résulter de nombreux paradoxes dans lesquels la Géométrie est mise en contradiction avec l'Algèbre. Quant à l'erreur, elle vient toujours de ce qu'en toute rigueur il n'est permis de raisonner de la sorte qu'*à posteriori*, c'est-à-dire qu'après une discussion complète des équations, qui peuvent, en se confondant, en se séparant ou en se dédoublant, démentir bien des conclusions prématurées.

Il m'est facile de présenter divers genres d'exemples qui justifieront suffisamment ces réflexions critiques, dont appréciera peut-être l'opportunité le lecteur qui aura été frappé, comme je l'ai été, de voir certaines questions d'examen se jouer trop hardiment du danger que je signale.

On regarde comme généralement déterminé le problème de la construction d'un polygone de n côtés, lorsqu'on a $2n-3$ conditions ou équations; pourvu seulement que les angles, s'ils sont tous connus, ne soient pris que pour $n-1$ conditions, la Géométrie ayant démontré la nécessité de cette restriction. On expliquera, par exemple, que le problème de la construction d'un polygone inscriptible dont les n côtés sont donnés doit être considéré comme déterminé, en disant tout simplement que la sujétion d'inscriptibilité, qui force le cercle de trois sommets à passer par les $n-3$ autres, fournit les $n-3$ équations complémentaires. Cependant ce raisonnement, qui ne trompe pas dans ce cas, conduit à un grossier paradoxe, si l'on remplace la sujétion d'inscriptibilité par celle de circonscriptibilité, susceptible pourtant, comme la première, de fournir $n-3$ équations.

La recherche du lieu du point d'intersection des deux droites de chaque système unissant les quatre points où une conique fixe est rencontrée par les côtés d'un angle variable dont le sommet occupe un point fixe, semble *à priori* une question indéterminée, faute d'un nombre suffisant d'équations. On sait bien cependant que le point dont il s'agit reste sur une droite invariable qu'on a nommée la *polaire du point fixe*.

En ne consultant que le nombre des équations, l'indétermination paraît plus grande encore, si on demande le lieu des centres de toutes les coniques qui peuvent passer par les quatre points où un cercle à centre fixe et à rayon variable rencontre l'une quelconque des courbes d'un système de coniques homothétiques. Ces centres sont cependant tous sur une conique déterminée.

Un exemple très-simple d'un dédoublement d'équation se rencontre, comme on sait, dans la question des coniques équilatères. On voit l'équation qui exprime l'égalité des carrés des axes se dédoubler, et l'Algèbre se mettre d'accord avec la Géométrie, en imposant deux conditions pour que l'ellipse soit équilatère, tandis qu'une seule suffit pour que l'hyperbole le soit (*).

La théorie des surfaces de révolution du deuxième degré fournit un exemple d'une équation dont le dédoublement est plus facile à deviner qu'à opérer. C'est sur cet exemple que j'avais cherché à appeler l'attention des lecteurs des *Annales*, en proposant cette question qui n'a pas été résolue :

Expliquer comment il se fait que deux conditions soient nécessaires pour qu'une surface du deuxième degré soit de révolution, lorsqu'on sait qu'il suffit que l'équation en S *ait deux racines égales.*

On peut, en effet, exprimer qu'une surface du deuxième degré est de révolution en écrivant tout simplement que l'équation en S, prise sous la forme ordinaire des équations du troisième degré, a deux racines égales. On n'obtient ainsi qu'une seule équation entre les coefficients, et on serait exposé à croire qu'il suffit d'une condition pour qu'une surface du deuxième degré soit de révolution, si on ne découvrait par d'autres moyens qu'en réalité il en faut deux. On peut deviner alors que l'équation unique doit se dédoubler; mais saisir la manière dont le dédoublement s'opère n'est pas chose facile. Cette difficulté est précisément ce qui rend le cas intéressant, comme exemple du danger des conclusions prématurées, puisqu'il montre qu'on peut avoir de grandes peines, non-seulement à découvrir *à priori*, mais à vérifier *à posteriori* qu'une équation en se dédoublant équivaut à deux conditions.

(*) Paradoxe expliqué par M. Gerono, t. XVII, p. 77.

Voici maintenant une méthode pour déduire de la théorie des racines égales la double condition qu'on obtient autrement, méthode qui met d'ailleurs bien en évidence la particularité par suite de laquelle l'équation en S a besoin de deux conditions pour avoir deux racines égales.

Je représenterai par

$$F(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) + M(x-\beta)(x-\gamma) + N(x-\alpha)(x-\gamma) + P(x-\alpha)(x-\beta) = 0$$

le type général des équations en S. La seule particularité à remarquer est que les trois coefficients M, N, P sont tous trois de même signe. Je supposerai qu'il n'y en a aucun de nul, pour rester dans le cas général.

Posons maintenant

$$\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma);$$

par dérivation de $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, on obtiendra l'identité

$$F(x)\varphi'(x) - F'(x)\varphi(x)$$
$$= M(x-\beta)^2(x-\gamma)^2 + N(x-\alpha)^2(x-\gamma)^2 + P(x-\alpha)^2(x-\beta)^2.$$

Pour une racine double, a, de $F(x) = 0$, on aura

$$0 = M(a-\beta)^2(a-\gamma)^2 + N(a-\alpha)^2(a-\gamma)^2 + P(a-\alpha)^2(a-\beta)^2.$$

Mais M, N, P étant de même signe, cette égalité ne peut avoir lieu que si deux des différences sont nulles. Soit donc $a = \alpha = \beta$; en substituant dans $F(x)$, il viendra

$$\frac{F(x)}{(x-a)^2} = x - \gamma + P + N + \frac{M(x-\gamma)}{x-a}.$$

Comme $F(x)$ doit être divisible par $(x-a)^2$, et que M n'est pas nul, il faudra que l'on ait encore $a = \gamma$. On trouve donc, finalement, les deux conditions

$$\alpha = \beta = \gamma.$$