NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1867.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

PROUHET,

RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME SIXIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1867.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. SYLVESTER comprenant la règle de Newton sur le nombre des racines imaginaires;

PAR M. A. GENOCCHI.

1. Soit

$$f(x) = 0$$

une équation du degré m; formons avec la fonction entière $f(x)$ et avec ses dérivées la suite

$$(f) \qquad f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\ldots,\quad f^m(x).$$

Formons une autre suite

$$(\mathrm{G}) \qquad \mathrm{G}(x),\quad \mathrm{G}_1(x),\quad \mathrm{G}_2(x),\ldots,\quad \mathrm{G}_m(x),$$

en posant

$$\mathrm{G}(x) = (fx)^2,\quad \mathrm{G}_r(x) = (f^r x)^2 - \gamma_r f^{r-1}x \, . \, f^{r+1}x,$$
$$\mathrm{G}_m(x) = (f^m x)^2,$$

où r désigne les nombres $1, 2,\ldots, m-1$, et γ_r la fraction $\frac{\mu + r - 1}{\mu + r}$, μ étant un nombre fixe quelconque positif ou négatif, mais non compris entre -1 et $-m$. Il faudra comparer les signes de ces deux séries; mais d'abord nous exposerons quelques propriétés des fonctions qui les composent.

§ I. — *Propriétés des fonctions* (f) *et* (G).

2. Les quantités $f^m(x)$, $G_m(x)$ sont constantes; $G_m(x)$ est positive. La fonction $G(x)$ sera aussi positive, tant qu'elle ne s'évanouira pas; $G_r(x)$ sera positive lorsque $f^{r-1}(x)$ et $f^{r+1}(x)$ seront de signes contraires, ou que l'une de ces fonctions s'évanouira, la fonction $f^r(x)$ ne s'annulant pas.

Toutes ces fonctions étant entières et partant continues, si l'une d'elles n'est pas nulle pour une valeur particulière $x = a$, elle conservera dans le voisinage de cette valeur le même signe qu'elle prend lorsqu'on fait $x = a$.

3. Désignons par $\varphi(x)$ une de ces fonctions qui s'annule pour $x = a$, et posons

$$\varphi(x) = (x - a)^n \psi(x).$$

On aura, en prenant les dérivées,

$$\varphi'(x) = n(x - a)^{n-1}\psi(x) + (x - a)^n \psi'(x),$$

et, par conséquent,

$$(x - a)\varphi'(x) = \left[n + \frac{(x - a)\psi'(x)}{\psi(x)}\right]\varphi(x),$$

ou

$$\varepsilon\varphi'(a + \varepsilon) = h\varphi(a + \varepsilon),$$

si l'on fait

$$x = a + \varepsilon, \quad n + \frac{\varepsilon\psi'(a + \varepsilon)}{\psi(a + \varepsilon)} = h.$$

Si ε est suffisamment petit, la quantité h sera finie et positive, puisqu'on peut supposer que $\psi(a)$ soit une quantité finie différente de zéro, n étant un nombre entier positif. On déduit de cette formule le théorème connu, d'après lequel les fonctions $\varphi(a+\varepsilon)$, $\varphi'(a+\varepsilon)$ sont de même signe pour ε positif, et de signes contraires pour ε négatif.

4. Si $f^r(a)$ est nulle, mais que $f^{r-1}(a)$ soit différente de zéro, la fonction $G_r(x)$ aura, dans le voisinage de $x=a$, le signe du produit $-f^{r-1}(x)f^{r+1}(x)$, car on pourra faire (n° 3)

$$\varepsilon f^{r+1}(a+\varepsilon)=hf^r(a+\varepsilon),$$

et, par suite,

$$G_r(a+\varepsilon)=-f^{r-1}(a+\varepsilon)f^{r+1}(a+\varepsilon)\left[\gamma_r-\varepsilon^2\frac{f^{r+1}(a+\varepsilon)}{h^2f^{r-1}(a+\varepsilon)}\right].$$

Il en résulte que dans le voisinage de $x=a$ la fonction $G_r(x)$ changera ou ne changera pas de signe, suivant que la fonction $f^{r+1}(x)$ en changera ou n'en changera pas elle-même.

5. Si $f^{r-1}(a)$ est nulle, la fonction $G_r(x)$ sera toujours positive dans le voisinage de $x=a$. Car, en faisant

$$f^{r-1}(x)=(x-a)^n\varphi(x),$$

on aura

$$f^r(x)=n(x-a)^{n-1}\varphi(x)+(x-a)^n\varphi'(x),$$
$$f^{r+1}(x)=n(n-1)(x-a)^{n-2}\varphi(x)+(x-a)^{n-1}\psi(x);$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ étant deux fonctions entières : il s'ensuit

$$G_r(x)=(x-a)^{2n}\{n(\varphi x)^2[n-(n-1)\gamma_r]+(x-a)F(x)\},$$

$F(x)$ étant aussi une fonction entière. Mais l'expression de γ_r donne

$$n-(n-1)\gamma_r=\frac{n+\mu+r-1}{\mu+r},$$

quantité positive pour $\mu+1>0$ et pour $\mu+m<0$, puisque la plus petite valeur de r est 1, et la plus grande valeur de n est $m - r + 1$. Donc, si x est peu différent de a, la valeur de $G_r(x)$ sera positive.

Le coefficient $n - (n - 1)\gamma_r$ serait nul si l'on avait en même temps

$$\mu = -m \quad \text{et} \quad n = m - r + 1;$$

dans ce cas n serait au moins égal à 2, la plus grande valeur de r étant $m - 1$. Mais, de plus, on aurait

$$f^{r-1}(x) = A(x-a)^n,$$

avec A constant, et il viendrait

$$G_r(x) = 0,$$

quel que soit x.

On ne peut supposer $\mu = -1$, car γ_1 serait infini.

6. En désignant par $G'_r(x)$ la dérivée de $G_r(x)$, on a

$$G'_r(x) = 2f^r x . f^{r+1} x - \gamma_r(f^r x . f^{r+1} x + f^{r-1} x . f^{r+2} x)$$

ou

$$G'_r(x) = (2 - \gamma_r) f^r x . f^{r+1} x - \frac{f^{r+2} x}{f^{r+1} x}[(f^r x)^2 - G_r(x)],$$

ce qui devient

$$G'_r(x) - \frac{f^{r+2} x}{f^{r+1} x} G_r(x) = \frac{fx}{\gamma_{r+1} f^{r+1} x}[(f^{r+1} x)^2 - \gamma_{r+1} f^r x . f^{r+2} x],$$

savoir

$$G'_r(x) - \frac{f^{r+2}(x)}{f^{r+1}(x)} G_r(x) = \frac{f(x)}{\gamma_{r+1} f^{r+1}(x)} G_{r+1}(x),$$

en observant que l'expression de γ_r satisfait à l'équation aux différences finies

$$2 - \gamma_r = \frac{1}{\gamma_{r+1}}.$$

Soit maintenant $x = a$ une valeur qui annule $G_r(x)$;

d'après le n° 3 on aura pour $x = a + \varepsilon$, ε étant suffisamment petit,

$$\varepsilon G'_r(x) = h_r G_r(x),$$

où h_r sera une quantité positive qui ne s'évanouit pas avec ε. En faisant

$$\gamma_{r+1}\left(h_r - \varepsilon \frac{f^{r+2}x}{f^{r+1}x}\right) = \frac{1}{H_r},$$

et substituant dans la formule précédente, il vient

$$G_r(a+\varepsilon) = H_r \varepsilon \frac{f^r(a+\varepsilon)}{f^{r+1}(a+\varepsilon)} G_{r+1}(a+\varepsilon).$$

Si $f^{r+1}(a)$ ne s'annule pas, la quantité H_r sera positive et finie pour des valeurs suffisamment petites de ε, et par suite les rapports $\frac{f^r(a+\varepsilon)}{f^{r+1}(a+\varepsilon)}$, $\frac{G_r(a+\varepsilon)}{G_{r+1}(a+\varepsilon)}$ seront de même signe lorsque ε sera positif, de signes contraires lorsque ε sera négatif.

§ II. — *Théorème de M. Sylvester.*

7. Nous dirons que les suites (f) et (G) présentent une ou plusieurs *doubles permanences*, lorsqu'à deux termes consécutifs de même signe $f^{r-1}(x)$, $f^r(x)$ de la première suite correspondent deux termes $G_{r-1}(x)$, $G_r(x)$ de la seconde, aussi de même signe, et que cette circonstance se vérifie dans un ou plusieurs couples de termes. Le nombre total des doubles permanences ne peut varier que si une ou plusieurs des fonctions (f) ou (G) changent de signes, et cela ne peut arriver que si elles s'évanouissent. Nous supposerons donc que la variable x, en restant réelle et croissant par degrés insensibles, passe par une valeur a qui fait évanouir l'une de ces fonctions, et distinguerons trois cas :

1° L'une des fonctions correspondantes $f^r(x)$, $G_r(x)$

change de signe en s'annulant pour la valeur $x=a$, tandis que l'autre ne s'annule pas.

Soit $f^r(a)=0$, et $G_r(a)$ différente de zéro; aucune des fonctions $f^{r-1}(a)$, $f^{r+1}(a)$ ne sera nulle, et $G_{r-1}(a)$, $G_{r+1}(a)$ seront positives (n° 2). Car, si $f^{r-1}(a)$, $f^{r+1}(a)$ sont de signes contraires, $G_r(a)$ sera positive, et pour ε positif et suffisamment petit, les fonctions $f^{r-1}(a-\varepsilon)$ et $f^r(a-\varepsilon)$, $f^r(a+\varepsilon)$ et $f^{r+1}(a+\varepsilon)$ offriront les mêmes signes (n° 3); donc le groupe

$$(r) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} f^{r-1}(x), & f^r(x), & f^{r+1}(x), \\ G_{r-1}(x), & G_r(x), & G_{r+1}(x), \end{array} \right.$$

présentera une double permanence, tant pour $x=a-\varepsilon$ que pour $x=a+\varepsilon$. Si $f^{r-1}(a)$, $f^{r+1}(a)$ sont de même signe, $G_r(x)$ sera négative, et il n'y aura pas de doubles permanences dans ce groupe, ni pour $x=a+\varepsilon$, ni pour $x=a-\varepsilon$.

Soient, au contraire, $G_r(a)=0$, et $f^r(a)$ différente de zéro: $f^{r-1}(a)$ et $f^{r+1}(a)$ seront aussi différentes de zéro, et seront affectées du même signe, car sans cela on aurait $G_r(a)>0$. Ainsi, dans le groupe (r), les termes de la première ligne conserveront pour $x=a\pm\varepsilon$ les signes qui les affectent pour $x=a$, et si $f^r(a)$ est d'un signe contraire à celui de $f^{r-1}(a)$ et $f^{r+1}(a)$, ce groupe n'offrira pas de doubles permanences dans le voisinage de $x=a$. Si $f^r(a)$ est du même signe que $f^{r-1}(a)$ et $f^{r+1}(a)$, $G_r(a+\varepsilon)$ et $G_{r+1}(a+\varepsilon)$ seront de même signe, et $G_r(a-\varepsilon)$ et $G_{r+1}(a-\varepsilon)$ seront de signes contraires (n° 6); donc, si $G_{r-1}(a)$ est de signe contraire à $G_r(a-\varepsilon)$, on gagnera deux doubles permanences; si $G_{r-1}(a)$ est de même signe que $G_r(a-\varepsilon)$, il y aura une double permanence pour $x=a-\varepsilon$, et une double permanence pour $x=a+\varepsilon$. Si $G_{r-1}(a)=0$, les fonctions $G_{r-1}(x)$, $G_r(x)$ seront de même signe pour $x=a+\varepsilon$, et de signes contraires pour $x = a - \varepsilon$ (n° 6), et l'on gagnera deux doubles permanences dans cet intervalle.

2° Soient

$$f^r(a) = 0 \quad \text{et} \quad G_r(a) = 0:$$

il faudra que l'une au moins des fonctions $f^{r-1}(a)$, $f^{r+1}(a)$ soit nulle. Soient $f^{r+1}(a) = 0$, et $f^{r-1}(a)$ différente de zéro : on aura

$$G_{r-1}(a) > 0 \text{ (n° 2)} \quad \text{et} \quad G_{r+1}(a \pm \varepsilon) > 0 \text{ (n° 5)};$$

en supposant d'ailleurs que $f^r(x)$ change de signe tandis que x passe par a, sa dérivée $f^{r+1}(x)$ n'en changera pas (n° 3), et il en sera de même de la fonction $G_r(x)$ (n° 4). Or, si $G_r(a \pm \varepsilon)$ est négative, le groupe (r) ne présentera pas de doubles permanences pour $x = a \pm \varepsilon$; si $G_r(a \pm \varepsilon)$ est positive, ce groupe présentera une double permanence tant pour $x = a - \varepsilon$ que pour $x = a + \varepsilon$, lorsque $f^{r-1}(a)$ sera de même signe que $f^r(a - \varepsilon)$, et présentera deux doubles permanences pour $x = a + \varepsilon$, aucune pour $x = a - \varepsilon$ dans le cas contraire.

Soit maintenant

$$f^{r-1}(a) = 0;$$

il n'y aura pas de doubles permanences dans le groupe (r) pour $x = a + \varepsilon$ (n° 3). Si $f^{r-2}(a)$ est nulle aussi, les fonctions $G_{r-1}(x)$, $G_r(x)$, $G_{r+1}(x)$ seront toutes positives dans le voisinage de $x = a$ (n° 5), et il y aura deux doubles permanences pour $x = a + \varepsilon$. Il en sera de même si $f^{r-2}(a)$ est de signe contraire à $f^r(a + \varepsilon)$, puisque $G_{r-1}(a + \varepsilon)$, $G_r(a + \varepsilon)$, $G_{r+1}(a + \varepsilon)$ seront encore positives. Enfin, si $f^{r-2}(a)$, différente de zéro, est affectée du même signe que $f^r(a + \varepsilon)$, on aura encore deux doubles permanences dans le cas de $G_{r-1}(a + \varepsilon) > 0$, et l'on en aura une seule dans le cas contraire, car $G_r(a + \varepsilon)$ et $G_{r+1}(a + \varepsilon)$ seront toujours positives (n° 5). Mais, en supposant que $f^r(x)$ change de signe dans le voisinage de $x = a$, la fonction $G_{r-1}(x)$ changera aussi de signe (n° 4); donc, si

$$G_{r-1}(a+\varepsilon) < 0,$$

on aura

$$G_{r-1}(a-\varepsilon) > 0;$$

d'ailleurs $G_{r-2}(a)$ sera positive (n° 2), et $f^{r-2}(a)$, ayant le même signe que $f^r(a+\varepsilon)$, sera aussi de même signe que $f^{r-1}(a \pm \varepsilon)$; par conséquent les couples correspondants

$$f^{r-2}(x),\quad f^{r-1}(x) \quad \text{et} \quad G_{r-2}(x),\quad G_{r-1}(x)$$

présenteront une double permanence pour $x = a - \varepsilon$, aucune pour $x = a + \varepsilon$, de manière qu'en ajoutant les termes $f^{r-2}(x)$, $G_{r-2}(x)$ au groupe (r), on aura une double permanence pour $x = a - \varepsilon$, et une pour $x = a + \varepsilon$.

Si $f^r(x)$ ne change pas de signe en s'évanouissant pour $x = a$, sa dérivée $f^{r+1}(x)$ en changera (n° 3), et, comme on aura

$$f^{r+1}(a) = 0 \quad \text{et} \quad G_{r+1}(a) = 0,$$

on pourra considérer les fonctions $f^{r+1}(x)$, $G_{r+1}(x)$ au lieu de $f^r(x)$, $G_r(x)$.

3° Soit $x = a$ une racine de l'équation $f(x) = 0$. Si cette racine est simple, $f'(a)$ sera différente de zéro, et $G_1(a) = (f'a)^2$ sera positive; ainsi, d'après le n° 3, les premiers deux termes des suites (f) et (G) gagneront une double permanence de $x = a - \varepsilon$ à $x = a + \varepsilon$. Si cette racine est multiple du degré n, les signes des $n + 1$ fonctions

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\ldots,\quad f^{n-1}(x),\quad f^n(x)$$

seront alternés pour $x = a - \varepsilon$, et seront tous égaux pour $x = a + \varepsilon$ en vertu du même théorème; d'ailleurs les termes correspondants de la suite (G) seront toujours positifs dans le voisinage de $x = a$ (n° 5); il y aura donc n doubles permanences gagnées.

Tous ces raisonnements subsistent encore dans le cas d'exception signalé au n° 5, c'est-à-dire lorsqu'on prend $\mu = -m$ et que quelques-unes des fonctions $G_r(x)$ sont identiquement nulles; il suffit, en effet, *que ces fonctions soient censées positives.*

8. Il résulte de tout cela que si la variable x croît de α à β, le nombre total des doubles permanences ne change pas, ou se trouve augmenté d'un nombre pair par l'annulation de termes autres que $f(x)$, et qu'il augmente de n unités dans les $n+1$ premiers termes des deux suites, lorsque la valeur de x est n fois racine de l'équation $f(x) = 0$. En conséquence, *le nombre des doubles permanences gagnées par les suites* (f) *et* (G) *dans le passage de* $x = \alpha$ *à* $x = \beta$ *est égal au nombre des racines réelles de l'équation* $f(x) = 0$, *comprises entre* α *et* β (α *étant* $< \beta$), *ou le surpasse d'un nombre pair d'unités.* C'est le théorème de M. Sylvester.

On peut, en suivant la même marche, et s'appuyant seulement sur le théorème du n° 3, démontrer le théorème de Fourier. Cette démonstration serait, si je ne me trompe, la plus simple de toutes.

On a étendu le théorème de Fourier à des équations transcendantes, en supposant que l'une $f^m(x)$ des dérivées successives ne change pas de signe dans l'intervalle dans lequel on cherche les racines. Le théorème de M. Sylvester est susceptible de la même extension.

9. En prenant un nombre positif L, et faisant $\alpha = -L$, $\beta = 0$, le théorème de M. Sylvester donnera, si L est assez grand, une limite supérieure du nombre total des racines négatives de l'équation $f(x) = 0$. On trouvera de la même manière une limite supérieure du nombre total

des racines positives, en remarquant que celles-ci sont les racines négatives de $f(-x)=0$, et de là on déduira une limite supérieure du nombre total des racines réelles, et par conséquent une limite inférieure des racines imaginaires de l'équation $f(x)=0$. Cette limite inférieure sera le nombre des variations de la suite (G) pour $x=0$.

Si l'on fait $\mu=-m$, on parvient ainsi à la règle de Newton qui forme le sujet de la question 434 des *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XVII, p. 186 (*).

ADDITION A L'ARTICLE PRÉCÉDENT,

PAR M. A. GENOCCHI.

M. Sylvester a donné un nouveau théorème dans le *Philosophical Magazine*; il n'est pas entré dans les détails de la démonstration, qu'il jugeait *nécessairement fastidieux*, et comme on les simplifie beaucoup à l'aide des considérations dont nous avons déjà fait usage, il ne sera pas hors de propos d'en exposer ici la démonstration complète. Nous la ferons précéder de celle du théorème de Fourier, parce qu'on a besoin de préciser mieux l'énoncé de ce théorème, et que, d'ailleurs, elle peut s'achever en peu de mots.

Soit l'équation $f(x)=0$, et soit $x=a$ une valeur particulière, pour laquelle s'évanouit en changeant de signe l'une $f^r(x)$ des fonctions dérivées. Les fonctions voisines $f^{r-1}(x)$ et $f^{r+1}(x)$ ne changeront pas de signe aux environs de cette valeur; si elles sont affectées de signes contraires, le groupe

$$f^{r-1}(x),\quad f^r(x),\quad f^{r+1}(x)$$

(*) J'avais cité le *Calcul différentiel* d'Euler. Je ne sais par quelle méprise on a imprimé au lieu de cela *Introduction au Calcul infinitésimal*.

présentera une variation pour $x = a - \varepsilon$, et une variation pour $x = a + \varepsilon$, le nombre ε étant positif et suffisamment petit. Si les fonctions $f^{r-1}(x)$ et $f^{r+1}(x)$ sont de même signe pour $x = a \pm \varepsilon$, ce groupe présentera deux variations pour $x = a - \varepsilon$, et deux permanences pour $x = a + \varepsilon$. Ainsi, dans le même groupe, il y aura alors deux variations perdues et deux permanences gagnées; ce premier cas ne donne lieu ni à une perte ni à un gain.

Si la valeur $x = a$ est n fois racine de l'équation $f(x) = 0$, les $n + 1$ fonctions

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\ldots,\quad f^{n-1}(x),\quad f^{n}(x)$$

offriront des signes alternés pour $x = a - \varepsilon$, et seront affectées du même signe pour $x = a + \varepsilon$, en sorte qu'il y aura dans ce groupe n variations perdues et n permanences gagnées.

On conclut de là immédiatement le théorème de Fourier. En effet, nommons Δ le nombre des racines réelles de l'équation $f(x) = 0$, comprises entre deux nombres donnés α et β; nommons v le nombre de variations perdues, p le nombre de permanences gagnées dans le passage de $x = \alpha$ à $x = \beta$ $(\beta > \alpha)$, par la suite

$$(f) \qquad f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\ldots,\quad f^{m}(x),$$

m étant le degré de l'équation; enfin supposons qu'il arrive s fois dans le même intervalle qu'un terme de la suite (f) s'annule et change de signe entre deux termes de même signe, en ne comptant pas les cas où, avec un terme $f^{r}(x)$, s'évanouissent tous les termes précédents jusqu'à $f(x)$ inclusivement. Nous avons la formule

$$(\mathrm{A}) \qquad v = p = \Delta + 2s,$$

qui exprime le théorème de Fourier et donne en outre la signification de l'excès $2s$.

Maintenant, avec les suites (f) et (G), dont la formation est connue, formons une nouvelle suite

$$(F) \qquad F(x), \quad F_1(x), \quad F_2(x), \ldots, \quad F_m(x),$$

en posant

$$F(x) = f(x)\,G(x) \quad \text{et généralement} \quad F_r(x) = f(x)\,G_r(x) :$$

les termes de la suite (F) ne pourront changer de signe que si l'une des fonctions (f) ou l'une des fonctions (G) en change elle-même. Nous pouvons distinguer plusieurs cas.

1° Soit $f^r(x)$ une des fonctions (f) qui change de signe dans le voisinage de la valeur particulière $x = a$; soient $f^{r-1}(a)$ et $f^{r+1}(a)$ différentes de zéro. Si ces deux fonctions sont de signes contraires, les autres quantités $G_{r-1}(x)$, $G_r(x)$, $G_{r+1}(x)$ seront positives pour $x = a$, et par suite aussi dans le voisinage de cette valeur. Donc le groupe

$$F_{r-1}(x), \quad F_1(x), \quad F_{r+1}(x)$$

offrira, comme le groupe correspondant des fonctions (f), une variation pour $x = a - \varepsilon$ et une variation pour $x = a + \varepsilon$.

Si les fonctions $f^{r-1}(a)$ et $f^{r+1}(a)$ sont de même signe, parmi les quantités $G_{r-1}(x)$, $G_r(x)$, $G_{r+1}(x)$, la deuxième sera négative et les deux autres seront positives pour $x = a$, et aussi pour $x = a \pm \varepsilon$: d'où l'on déduit que dans le groupe correspondant de trois fonctions (F) il y a deux permanences pour $x = a - \varepsilon$, aucune pour $x = a + \varepsilon$.

Ainsi, lorsque l'une des fonctions (f) s'évanouit entre deux autres qui ne s'évanouissent pas, si celles-ci sont de signes contraires, le groupe correspondant de trois fonctions (F) n'éprouve ni gain ni perte de variations ou permanences; si elles sont de même signe, ce groupe perd deux permanences.

2° Si pour $x = a$ s'évanouissent avec $f^r(x)$ les $n-1$ fonctions dérivées suivantes, les n quantités

$$G_{r+1}(x),\quad G_{r+2}(x)\ldots,\quad G_{r+n-1}(x),\quad G_{r+n}(x),$$

seront positives dans le voisinage de $x = a$, et par conséquent les n autres fonctions

$$F_{r+1}(x),\quad F_{r+2}(x)\ldots,\quad F_{r+n-1}(x),\quad F_{r+n}(x),$$

présenteront les mêmes signes que les fonctions (f) correspondantes; d'où il suit qu'il y aura $n-1$ variations pour $x = a - \varepsilon$, et $n-1$ permanences pour $x = a + \varepsilon$, et qu'ainsi on gagnera $n-1$ permanences.

Remarquons, de plus, que $f^{r-1}(a)$ étant supposée différente de zéro, $G_{r-1}(a)$ sera positive, et $G_r(x)$ aura dans le voisinage de $x = a$ un signe égal à celui de $-f^{r-1}(x)f^{r+1}(x)$, d'après ce que nous avons démontré dans le premier article. Donc $F_{r-1}(x)$ aura le signe de $f^{r-1}(x)$, et $F_r(x)$ aura le même signe que le produit $-f^{r-1}(x)f^r(x)f^{r+1}(x)$, c'est-à-dire un signe égal à celui de $f^{r-1}(x)$ ou $F_{r-1}(x)$ pour $x = a - \varepsilon$, et un signe contraire pour $x = a + \varepsilon$; ainsi il y aura perte d'une permanence entre $F_{r-1}(x)$ et $F_r(x)$; car $f^r(x)f^{r+1}(x)$ est < 0 pour $x = a - \varepsilon$, et > 0 pour $x = a + \varepsilon$.

Mais le nombre n peut être pair ou impair.

Dans le cas de n pair, la fonction $f^r(x)$ ne changera pas de signe; si ce signe est le même que celui de $f^{r-1}(x)$, les fonctions $f^{r-1}(x)$ et $f^{r+1}(x)$ seront de signes contraires pour $x = a - \varepsilon$, de même signe pour $x = a + \varepsilon$: par conséquent $F_r(x)$ et $F_{r+1}(x)$ présenteront toujours une variation. Si le signe de $f^r(x)$ est contraire à celui de $f^{r-1}(x)$, les signes de $f^{r-1}(x)$ et $f^{r+1}(x)$ seront égaux pour $x = a - \varepsilon$, contraires pour $x = a + \varepsilon$, et les fonctions $F_r(x)$ et $F_{r+1}(x)$ présenteront toujours une permanence. Ainsi, dans ce cas, le groupe de $n+2$ fonctions $F_{r-1}(x), \ldots, F_{r+n}(x)$ gagnera $n-2$ permanences.

Dans le cas de n impair, la fonction $f^r(x)$ changera de signe, la dérivée suivante $f^{r+1}(x)$ n'en changera pas, et si le signe de $f^{r+1}(x)$ est égal à celui de $f^{r-1}(x)$, les fonctions $F_r(x)$ et $F_{r+1}(x)$ présenteront une permanence pour $x = a - \varepsilon$, une variation pour $x = a + \varepsilon$, en sorte que le groupe de $n+2$ fonctions (F) gagnera $n-3$ permanences. Si $f^{r+1}(x)$ et $f^{r-1}(x)$ sont affectées de signes contraires, les fonctions $F_r(x)$ et $F_{r+1}(x)$ présenteront une variation pour $x = a - \varepsilon$, une permanence pour $x = a + \varepsilon$; et il y aura par suite $n-1$ permanences gagnées dans le groupe total de $n+2$ termes.

Ce groupe gagnera donc, dans l'un et l'autre cas, un nombre pair de permanences (qui pourra aussi être égal à o).

3° Si $f^r(a)$ est différente de zéro, mais que $G_r(x)$ s'évanouisse en changeant de signe pour $x = a$, les fonctions $f^{r-1}(a)$ et $f^{r+1}(a)$ seront aussi différentes de zéro et offriront le même signe; de plus, les rapports $\frac{f^r(x)}{f^{r+1}(x)}$, $\frac{G_r(x)}{G_{r+1}(x)}$ seront de signes contraires pour $x = a - \varepsilon$, de même signe pour $x = a + \varepsilon$, et par conséquent les fonctions $F_r(x)$ et $F_{r+1}(x)$ présenteront une variation pour $x = a - \varepsilon$, une permanence pour $x = a + \varepsilon$. Mais $G_{r-1}(a)$ pourra être nulle aussi : dans ce cas, on trouvera, d'une manière semblable, qu'une autre permanence est gagnée entre $F_{r-1}(x)$ et $F_r(x)$; ainsi le groupe

$$F_{r-1}(x), \quad F_r(x), \quad F_{r+1}(x)$$

gagnera deux permanences. Dans le cas contraire, si

$F_{r-1}(x)$ a le signe de $F_r(a-\varepsilon)$, ces deux fonctions offriront une permanence pour $x=a+\varepsilon$, qui sera perdue pour $x=a+\varepsilon$; si elle a le signe contraire, on gagnera une permanence; donc le nombre des permanences du même groupe ne changera pas ou sera augmenté de deux unités.

4° Enfin, si la valeur $x=a$ est n fois racine de l'équation $f(x)=0$, le groupe de $n+1$ termes

$$F(x),\quad F_1(x),\quad F_2(x),\ldots,\quad F_n(x)$$

gagnera n permanences, car les quantités

$$G(x),\quad G_1(x),\quad G_2(x),\ldots,\quad G_n(x),$$

étant toutes positives dans le voisinage de $x=a$, les $n+1$ fonctions (F) offriront les mêmes signes que les fonctions (f) correspondantes.

Soient donc P le nombre des permanences acquises, V le nombre des variations perdues par la suite (F) dans le passage de $x=\alpha$ à $x=\beta$; soit s' le nombre qui exprime combien de fois un terme de la suite (f) s'évanouit dans cet intervalle entre deux termes différents de zéro et de même signe; soit S un autre nombre entier positif ou nul. On aura $V=P$, et, les autres notations étant retenues, on conclura

$$\text{(B)}\qquad V=P=\Delta-2s'+2S.$$

En combinant les formules (A) et (B), et faisant

$$t=s-s'+S,$$

on déduira une troisième formule qui exprime le nouveau théorème de M. Sylvester

$$\text{(C)}\qquad \frac{V+v}{2}=\frac{P+p}{2}=\Delta+t,$$

où t sera un nombre entier positif ou nul, parce que s n'est pas inférieur à s' (*).

L'illustre auteur a remarqué qu'on peut dans son premier théorème remplacer les *doubles permanences* des suites (f) et (G) par les *variations sur permanences* considérées dans les mêmes suites, ce qui pourra donner une limite plus avantageuse du nombre des racines, et qu'au lieu de ces *variations sur permanences*, on peut considérer les *doubles variations*, pourvu qu'on les compte dans les suites (f) et (F).

Il insiste sur l'importance du paramètre μ arbitraire entre certaines limites et regarde l'introduction d'un tel paramètre dans les *criteria* comme un fait nouveau dans l'histoire de l'Algèbre. J'engage le lecteur à consulter les exemples que M. Sylvester a donnés, et, dans un intérêt purement historique, je me borne à observer qu'un Mémoire d'Euler, *Nova criteria radices æquationum imaginarias dignoscendi*, renferme des règles pour la découverte des racines imaginaires dans lesquelles entre aussi un paramètre arbitraire, quoique Euler détermine ensuite ce paramètre par la condition de rendre le *criterium* le plus avantageux qu'il soit possible. (Voir *Novi Comm. Acad. Petropol.*, 1768, t. XIII, p. 116 et suiv.)

(*) Suivant l'énoncé de M. Sylvester, le nombre t exprimerait combien de fois dans l'intervalle considéré un terme de la suite (G) s'annule entre deux fonctions (F) de même signe. Cela n'est pas toujours vrai, comme on peut s'en convaincre par l'examen du cas expliqué ci-dessus au n° 2°.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. AUG. POULAIN, S. J. (*).

Les questions 777, 778 et 779 répondent à un problème assez général. On peut former avec elles une suite de théorèmes constituant un ensemble, et donnant certains procédés pour obtenir des équations ayant *au plus*, ou ayant *au moins*, autant de racines réelles qu'une équation algébrique donnée (**). C'est cette disposition que nous adopterons.

1. THÉORÈME I. — *Soit k une quantité réelle arbitraire: l'équation*

$$f(x) + kf'(x) = 0 \tag{1}$$

a au moins *autant de racines réelles que* $f(x) = 0$.

Première démonstration. — Soient a, b deux racines réelles consécutives de $f(x)$. Substituées dans le premier membre de (1), elles donnent successivement

$$kf'(a), \quad kf'(b).$$

Ces deux résultats étant, on le sait, de signes contraires, il s'ensuit que l'équation (1) a au moins une racine réelle entre deux consécutives de la proposée. Donc, si cette dernière a n racines réelles, l'équation (1) en a au moins $n-1$. Donc elle en a au moins n; car, dans

(*) Cet article renferme la solution des questions 777 à 779. Il nous a été remis par l'auteur, alors que les solutions insérées au numéro de novembre 1866 étaient sous presse. P.

(**) Nous ne parlons que des équations algébriques à coefficients réels.

deux équations de même degré, le nombre des racines réelles a le même degré de parité.

2. *Deuxième démonstration.* — Posons

$$y = ke^{\frac{x}{k}}.f(x);$$

nous en tirons

$$y' = e^{\frac{x}{k}}[f(x) + kf'(x)].$$

y et y' étant continues, on peut leur appliquer le théorème de Rolle. Soit n le nombre des racines réelles de $f(x)$; $e^{\frac{x}{k}}$ ne pouvant s'annuler, y a précisément n racines réelles. Donc y' et, par là même, le second facteur de y', en a au moins $n-1$. Donc ce facteur en a au moins n, car il est de même degré que $f(x)$.

3. THÉORÈME II. — *L'équation*

$$(2)\quad F(x) = f(x) + af'(x) + a^2f''(x) + \ldots + a^mf^m(x),$$

dans laquelle a est une quantité réelle arbitraire, a au plus *autant de racines réelles que l'équation $f(x) = 0$.*

Ce théorème, qui n'est que la question 777 généralisée, donne une sorte de contre-partie du théorème I.

Première démonstration. — On a évidemment

$$F(x) = f(x) + aF'(x);$$

d'où

$$(3)\qquad f(x) = F(x) - aF'(x).$$

Si $f(x)$ a n racines réelles, je dis que $F(x)$ n'en a pas *plus* de n. Car autrement $F(x) - aF'(x)$ en aurait plus de n, d'après le théorème I. Or cette expression étant précisément égale à $f(x)$, en vertu de l'égalité (3), cette hypothèse est impossible.

Deuxième démonstration. — On raisonne comme au théorème I sur l'expression

$$y = -e^{-ax}\left[\frac{f(x)}{a} + \frac{f'(x)}{a^2} + \ldots + \frac{f^{m}_{(x)}}{a^{m+1}}\right],$$

dont la dérivée est

$$y' = e^{-ax}.f(x).$$

4. Théorème III. (Généralisation du théorème I.) — *Soient*

$$(4) \qquad f(x) = 0$$

une équation algébrique donnée, et

$$(5) \qquad \varphi(z) = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_p z^p,$$

une équation auxiliaire en z, satisfaisant à cette seule condition que toutes ses racines soient réelles. Son degré p peut être quelconque par rapport au degré m de l'équation (4). *Je dis que l'équation*

$$(6) \quad F(x) = f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \ldots + A_p f^p(x) = 0,$$

formée à l'aide des deux précédentes, a au moins *autant de racines réelles que la proposée*

$$f(x) = 0.$$

Je dis que le théorème est vrai dans le cas où l'équation auxiliaire $\varphi(z) = 0$ est de degré p, pourvu qu'il soit vrai lorsqu'on prend à sa place l'équation de degré $p - 1$

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{1 - kz} = 1 + A'_1 z + A'_2 z^2 + \ldots + A'_{p-1} z^{p-1} = 0,$$

$\frac{1}{k}$ étant une des racines de $\varphi(z) = 0$.

En effet, formons l'expression

$$(7)\quad F_1(x) = f(x) + A'_1 f'(x) + A'_2 f''(x) + \ldots + A'_{p-1} f^{p-1};$$

puis cette autre

$$(8)\qquad F_2(x) = F_1(x) - k F'_1(x).$$

Développée, celle-ci donne

$$(9)\left\{\begin{array}{l} F_2(x) = f(x) + \begin{array}{l|l|l|l} A'_1 & f'(x) + A'_2 & f''(x) + \ldots + & f^p \\ -k & \quad -k & \qquad\quad -k & \end{array} \\ \quad = f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \ldots + A_p f^p; \end{array}\right.$$

car il est facile de s'assurer que

$$1,\quad A'_1 - k,\quad A'_2 - k, \ldots,\quad -k$$

sont les coefficients successifs de

$$\varphi_1(z)(1 - kz) = \varphi(z).$$

Par hypothèse, $F_1(x)$ a *au moins* autant de racines réelles que $f(x)$. Mais k étant réel, puisque $\varphi(z) = 0$ n'a que des racines réelles, l'équation (8) montre que $F_2(x)$ a *au moins* autant de racines réelles que $F_1(x)$. Donc....

On voit donc comment, de proche en proche, on est amené à démontrer le théorème dans le cas où l'équation auxiliaire est du premier degré. Mais alors l'énoncé n'est autre que celui du théorème I. Donc....

5. Théorème IV. (Généralisation du théorème II.) — *Soient*

$$(10)\qquad f(x) = 0$$

une équation algébrique donnée,

$$(11)\qquad \varphi(z) = 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_p z^p = 0$$

une équation auxiliaire en z, dont toutes les racines *sont réelles, mais dont le degré p est quelconque par rapport au degré m de $f(x) = 0$,*

(12) $$\psi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots$$

le polynôme obtenu en développant le quotient $\frac{1}{\varphi(z)}$, suivant les puissances croissantes de z : je dis que l'équation

(13) $$F(x) = f(x) + B_1 f'(x) + B_2 f''(x) + \ldots + B_m f^m(x) = 0,$$

formée à l'aide des deux précédentes, a au plus *autant de racines réelles que la proposée.*

Nous avons dit que ce théorème est une généralisation du théorème II. En effet, dans celui-ci on a

$$\psi(z) = 1 + az + a^2 z^2 + \ldots.$$

Ce polynôme est le quotient de 1 par $1 - az$.

Démonstration du théorème. — Montrons 1° que l'équation

(14) $$F(x) = f(x) + S_1 f'(x) + S_2 f''(x) + \ldots + S_m f^m(x)$$

a *au plus* autant de racines réelles que $f(x) = 0$, S_n étant le polynôme homogène complet de p variables et de degré n, formé avec les inverses des racines de $\varphi(z) = 0$, dans lequel tous les termes distincts ont pour coefficient l'unité. En un mot, si on appelle $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \cdots$ les racines de $\varphi(z) = 0$, on a

$$S_1 = \sum a,$$

$$S_2 = \sum a^2 + \sum ab,$$

$$S_3 = \sum a^3 + \sum a^2 b + \sum abc,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Je dis que la proposition est vraie dans le cas où l'équation auxiliaire $\varphi(z) = 0$ est de degré p, pourvu qu'elle soit vraie lorsqu'on prend à sa place l'équation de degré $p - 1$,

$$\varphi_1(z) = \frac{\varphi(z)}{1 - kx} = 0,$$

$\frac{1}{k}$ étant une des racines de $\varphi(z) = 0$.

En effet, S'_1, S'_2,... étant déduites de $\varphi_1(z)$ comme S_1, S_2,... le sont de $\varphi(z)$, formons l'expression

$$(15)\quad F_1(x) = f(x) + S'_1 f'(x) + S'_2 f''(x) + \ldots + S'_m f^m(x),$$

puis cette autre

$$(16)\quad F_2(x) = F_1(x) + kF'_1(x) + k^2 F''_1(x) + \ldots + k^m F^m_1(x).$$

Développée, celle-ci donne

$$\begin{array}{rl|rl|rl|l}
F_2(x) = f(x) & + S'_1 & f'(x) & + S'_2 & f''(x) & + \ldots + S'_m & f^m \\
& + k & & + kS'_1 & & + \ldots + kS'_{m-1} & \\
& & & + k^2 & & + \ldots + k^2 S'_{m-2} & \\
& & & & & + \ldots\ldots\ldots\ldots & \\
& & & & & + k^m &
\end{array}$$

$$= f(x) + S_1 \quad f'(x) + S_2 \quad f''(x) + \ldots + S^m f_m(x).$$

Le reste du raisonnement est tout semblable à celui du théorème III.

Maintenant je dis 2° que le polynôme

$$(17)\qquad \chi(z) = 1 + S_1 z + S_2 z^2 + \ldots$$

n'est autre que le quotient de 1 par $\varphi(z)$.

Montrons encore que si la proposition est vraie pour

$$\chi_1(z) = 1 + S'_1 z + S'_2 z^2 + \ldots,$$

par rapport à $\varphi_1(z)$, il en est de même dans le cas actuel,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(z)} &= \frac{1}{\varphi_1(z)(1-kz)} = \frac{1}{1-kz} + \frac{S'_1 z}{1-kz} + \\ &\frac{S'_2 z^2}{1-kz} + \ldots + \frac{S'_q z^q}{1-kz} + \frac{R_{q+1}}{\varphi_1(z)(1-kz)}, \end{aligned}\right.$$

q étant un nombre quelconque, indépendant du degré p de $\varphi(z)$, et R_{q+1} un reste dont le terme de degré le moins élevé renferme z à une puissance au moins égale à $q+1$. Si l'on désigne par C une certaine quantité qui ne contient pas z, l'équation (18) développée donne

$$\frac{1}{\varphi(z)} = 1 + \begin{array}{l|l|l|l} S'_1 & S'_2 & \ldots + S'_q & \\ +k & +kS'_1 & + \ldots + kS'_{q-1} & \\ & +k^2 & + \ldots\ldots\ldots & \\ & & + \ldots\ldots\ldots & \\ & & + k^q & \end{array} \begin{array}{l} z + \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} z^2 + \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} z^q + \dfrac{Cz^{q+1}}{1-kz} \\ + \dfrac{R_{q+1}}{\varphi(z)} \end{array}$$

$$= 1 + S_1 z + S_2 z^2 + \ldots + S_q z^q + \frac{Cz^{q+1}}{1-kz} + \frac{R_{q+1}}{\varphi(z)}.$$

Si l'on développe les deux dernières fractions, on trouve que tous les termes du développement ont z^{q+1} en facteur ; donc elles n'influent pas sur les coefficients des q premiers termes de $\frac{1}{\varphi(z)}$. Donc la loi est vraie pour les q premiers termes. Mais q est quelconque. Donc....

6. Avant de continuer, il est bon de faire une observation sur les polynômes (11) et (12), c'est-à-dire sur $\varphi(z)$ et $\psi(z)$. Arrêtons ce dernier à $B_q z^q$. Si l'on forme le quotient $\frac{1}{\psi(z)}$, on trouve un développement dont l'ensemble des p premiers termes est $\varphi(z)$, pourvu que q ait été pris supérieur ou égal à p.

En effet, R_{q+1} ayant le même sens que précédemment, nous pouvons poser

$$(19)\qquad \frac{1}{\varphi(z)} = \psi(z) + \frac{R_{q+1}}{\varphi(z)};$$

d'où

$$(20)\qquad \frac{1}{\psi(z)} = \varphi(z) + \frac{R_{q+1}}{\varphi(z)}.$$

Donc, si l'on pousse le quotient $\frac{1}{\psi(z)}$ jusqu'au terme en z^p, on retrouve $\varphi(z)$. On peut même le pousser jusqu'au terme en z^q, seulement les $q-p$ derniers coefficients seront nuls. A partir de z^{q+1}, des termes étrangers commenceraient à apparaître.

Si q a été pris inférieur à p, on peut, en calculant le quotient $\frac{1}{\psi(z)}$, retrouver les q premiers termes de $\varphi(z)$, mais au delà les coefficients peuvent différer. Cela se voit au moyen de l'équation (20).

7. Nous avons donné pour chacun des théorèmes II et III une démonstration directe. Il est facile de montrer que l'un quelconque est la conséquence de l'autre.

Pour cela établissons la proposition suivante :

8. *$f(x)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ étant des polynômes définis comme dans le théorème III, avec cette seule différence que l'équation $\varphi(z)=0$ n'est plus assujettie à aucune condition, si l'on pose*

$$(21)\quad F(z) = f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \ldots + A_m f^m(x),$$

on a inversement

$$(22)\quad f(x) = F(x) + B_1 F'(x) + B_2 F''(x) + \ldots + B_m F^m(x).$$

Dans l'expression (21) nous avons mis en évidence A_m, ce qui semblerait indiquer que $\varphi(z)$ est au moins de degré m; mais c'est uniquement pour introduire plus de symétrie dans les calculs, rien n'empêchant de supposer que A_m, A_{m-1} ...., sont nuls.

Démonstration. — De l'égalité (21) nous tirons successivement

$$(23)\quad \begin{cases} F(x) = f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \ldots + A_m f^m(x), \\ F'(x) = \ldots\ldots\ldots f'(x) + A_1 f''(x) + \ldots + A_{m-1} f^m(x), \\ F''(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f''(x) + \ldots + A_{m-2} f^m(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^m(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots f^m(x). \end{cases}$$

Considérons ces équations comme un système de $m+1$ équations du premier degré propres à donner les $m+1$ inconnues

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\ldots,\quad f^m(x).$$

Tirons la valeur de la première $f(x)$ et constatons qu'elle est identique avec celle donnée par l'égalité (22). Pour y arriver proposons-nous un problème plus général.

9. *On demande de résoudre le système suivant de $m+1$ équations à $m+1$ inconnues :*

$$(24)\quad \begin{cases} C_0 = x_0 + A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_m x_m, \\ C_1 = \ldots\ldots x_1 + A_1 x_2 + \ldots + A_{m-1} x_m, \\ C_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots x_2 + \ldots + A_{m-2} x_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_{m-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_{m-1} + A_1 x_m, \\ C_m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_m. \end{cases}$$

De ce système, on déduit le système équivalent

$$(25)\quad \begin{cases} x_0 = \lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \ldots + \lambda_m C_m, \\ x_1 = \ldots\ldots \lambda_0 C_1 + \lambda_1 C_2 + \ldots + \lambda_{m-1} C_m, \\ x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_0 C_2 + \ldots + \lambda_{m-2} C_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{m-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_0 C_{m-1} + \lambda_1 C_m, \\ x_m = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \lambda_0 C_m. \end{cases}$$

La première de ces équations n'a pas besoin d'être établie; la seconde peut l'être ainsi. On peut considérer x_1 comme l'une des inconnues du système de m équations obtenues en supprimant la première du système (24). Or ce nouveau système peut encore se déduire de l'ancien en permutant circulairement les indices 0, 1, 2,... m, dans les lettres C et x, et remplaçant C_0 par 0. Or cette permutation, effectuée dans la formule qui donne x_0, fournit l'équation cherchée.

On établit de la même manière les autres relations.

Il s'agit maintenant de donner un moyen simple de calculer $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_m$. Les expressions de ces quantités en fonction de $A_1, A_2, \ldots A_m$ sont compliquées. Mais nous allons prouver qu'elles sont égales aux coefficients $1, B_0, B_1, \ldots B_m$ de $\psi(z)$.

En effet, de l'équation (19) nous tirons

$$(26) \qquad 1 - R_{q+1} = \varphi(z).\psi(z).$$

En égalant à zéro les coefficients des mêmes puissances de x, prises dans les deux membres, nous aurons

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = B_m + A_1 B_{m-1} + A_2 B_{m-2} + \ldots + A_m \;.\,1, \\ 0 = \ldots\ldots B_{m-1} + A_1 B_{m-2} + \ldots + A_{m-1}.\,1, \\ 0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B_{m-2} + \ldots + A_{m-2}.\,1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots B_1 + A_1 \;.\,1, \\ 1 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1. \end{array} \right.$$

Si nous comparons ce système au système (24) et que nous appliquions les formules (25), nous trouvons immédiatement, en regardant $B_m, B_{m-1}, \ldots B_1$, 1 comme les inconnues,

$$\left\{ \begin{array}{l} B_m = \lambda_m, \\ B_{m-1} = \lambda_{m-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_1 = \lambda_1, \\ 1 = \lambda_0. \end{array} \right.$$

Donc, etc.

Ayant résolu ainsi le système (24), on résout facilement le système (23) qui n'en est qu'un cas particulier, et l'on trouve l'égalité (21) que l'on cherchait à établir.

10. Théorème VI. — *Réciproquement, si* $F(x)$ *est donné, et que* $f(x)$ *soit défini par l'égalité* (22), $F(x)$ *satisfait à l'égalité* (21).

C'est là une conséquence du théorème précédent, car on a vu (n° 6) que $1, A_1, A_2, \ldots,$ sont les coefficients du développement de $\frac{1}{\psi(z)}$.

11. Ceci posé, il devient facile de montrer que le théorème IV est une conséquence du théorème III. Formons l'égalité (21). Par hypothèse, $F(x)$ a *au moins* autant de racines réelles que $f(x)$. Donc, inversement, $f(x)$ en a *au plus* autant que $F(x)$. Mais, d'après l'égalité (22), $f(x)$ est précisément égal à l'expression qui fait l'objet du théorème IV. Donc, etc.

On démontre de la même manière le théorème IV au moyen du théorème III.

12. Les calculs précédents donnent lieu à quelques remarques que nous indiquerons rapidement.

Remarque I. — Les équations (27) nous donnent sous une forme très-symétrique les relations qui existent entre les coefficients d'un polynôme $\varphi(x)$ et ceux du quotient $\frac{1}{\varphi(x)}$ développé suivant les puissances ascendantes de x.

Remarque II. — Tout polynôme

$$\varphi(x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_m x^m$$

peut être mis sous forme de déterminant de la manière suivante :

$$(28)\qquad \varphi(x) = \begin{vmatrix} 1 & B_1 & B_2 & B_3\ldots & B_m \\ x & 1 & B_1 & B_2\ldots & B_{m-1} \\ x^2 & 0 & 1 & B_1\ldots & B_{m-2} \\ x^3 & 0 & 0 & 1\ \ldots & B_{m-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^{m-1} & 0 & 0 & 0\ \ldots & B_1 \\ x^m & 0 & 0 & 0\ \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

$1, B_1, B_2, \ldots$, étant les coefficients du quotient $\frac{1}{\varphi(x)}$.

En effet, remplaçons les A par des B dans les équations (24), et posons

$$C_0 = 1,$$
$$C_1 = x,$$
$$C_2 = x^2,$$
$$\ldots\ldots,$$

les formules (25) nous donneront

$$x_0 = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots = \varphi(x).$$

Or, si nous étudions directement le système non résolu, nous voyons que le dénominateur de x_0, c'est-à-dire le déterminant du système, est égal à l'unité; donc x_0 est égal simplement à son numérateur. C'est un déterminant qu'on déduit du précédent par une règle connue. On trouve ainsi l'écriture (28).

Remarque III. — Le dernier calcul du n° 5 nous montre les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique quelconque $\varphi(x) = 0$, et les coefficients de $\psi(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$. Si on appelle $a, b, c, \ldots$ ces racines, on a

$$B_1 = \sum \frac{1}{a},$$

$$B_2 = \sum \frac{1}{a^2} + \sum \frac{1}{ab},$$

$$B_3 = \sum \frac{1}{a^3} + \sum \frac{1}{a^2 b} + \sum \frac{1}{abc},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si l'on suppose $\psi(x)$ arrêté au degré m, et qu'on appelle a', b', c',... ses racines, on a, à cause de la réciprocité qui existe entre $\varphi(x)$ et $\psi(x)$,

$$A_1 = \sum \frac{1}{a'},$$

$$A_2 = \sum \frac{1}{a'^2} + \sum \frac{1}{a'b'},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Remarque IV. — La remarque précédente nous apprend à résoudre le système suivant de m équations à m inconnues, dont la solution directe offrirait des difficultés :

$$\sum a = A_1,$$

$$\sum a^2 + \sum ab = A_2,$$

$$\sum a^3 + \sum a^2 b + \sum abc = A_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les inconnues a, b, c,... sont les inverses des racines du polynôme obtenu en poussant jusqu'au degré m le quotient de l'unité par

$$1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 780

(voir 2e série, tome V, page 479);

PAR M. LAISANT,
Officier du génie.

Soient m *un nombre pair, et l'équation*

$$A_0 x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots - A_{m-1} x + A_m = 0,$$

où $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m$ *sont des nombres positifs.*

Soient H *le plus grand des rapports*

$$\frac{A_1}{A_0}, \quad \frac{A_3}{A_2}, \quad \frac{A_5}{A_4}, \ldots, \quad \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}},$$

et h *le plus petit des rapports*

$$\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{A_4}{A_3}, \quad \frac{A_6}{A_5}, \ldots, \quad \frac{A_m}{A_{m-1}};$$

l'équation proposée aura toutes ses racines comprises entre H *et* h *si l'on a* $H > h$, *et toutes ses racines imaginaires si l'on a* $H = h$ *ou* $< h$. P.

Je réunis les termes $A_0 x^m$ et $A_1 x^{m-1}$ en mettant $A_0 x^{m-1}$ en facteur; je procède d'une façon analogue pour tous les autres groupes de deux termes consécutifs, si bien que l'équation s'écrit

$$A_0 x^{m-1}\left(x - \frac{A_1}{A_0}\right) + A_2 x^{m-3}\left(x - \frac{A_3}{A_2}\right) + \ldots$$
$$+ A_{m-2} x\left(x - \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}}\right) + A_m = 0.$$

Sous cette forme, il est évident que la plus grande valeur H de $\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_3}{A_2}, \ldots$ est une limite supérieure des racines de l'équation, puisque toute valeur de x supérieure à H rend le premier membre positif.

De même j'écris l'équation sous cette autre forme :

$$A_0 x^m - A_1 x^{m-2}\left(x - \frac{A_2}{A_1}\right) - A_3 x^{m-4}\left(x - \frac{A_4}{A_3}\right) - \ldots$$
$$- A_{m-1}\left(x - \frac{A_m}{A_{m-1}}\right) = 0.$$

Toute valeur de x plus petite que la plus petite des valeurs de $\frac{A_2}{A_1}, \frac{A_4}{A_3}, \ldots$, rend le premier membre positif. Donc h est une limite inférieure des racines.

Donc, si $H > h$, toutes les racines réelles de l'équation seront comprises entre ces deux valeurs, si $H < h$, il n'y aura pas une seule racine réelle; et si $H = h$, il en sera de même, car le résultat de la substitution de H ou de h dans le premier membre est certainement positif.

Note. — Autres solutions de MM. Graindorge; Bodemer, professeur au collége de Mulhouse; Maffiotti, élève de M. Genocchi; Besson, élève du lycée de Besançon; Touren, maître répétiteur au lycée de Grenoble.

Question 781

(voir 2e série, t. V, p. 480) ;

PAR M. LAISANT,
Officier de génie.

ÉNONCÉ RECTIFIÉ. — *Soient m un nombre impair, et l'équation*

$$A_0 x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots + A_{m-1} x - A_m = 0,$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_m$ *sont des nombres positifs.*

Soient H *le plus grand et* H′ *le plus petit des rapports*

$$\frac{A_1}{A_0}, \quad \frac{A_3}{A_2}, \quad \frac{A_5}{A_4}, \ldots, \quad \frac{A_m}{A_{m-1}}.$$

Soit h le plus petit des rapports

$$\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{A_4}{A_3}, \ldots, \quad \frac{A_{m-1}}{A_{m-2}};$$

l'équation n'a aucune racine supérieure à H, *ni inférieure à* H′, *et en outre elle ne peut en avoir qu'une seule inférieure à $\frac{h}{2}$. Il en résulte que si* $\mathrm{H} = \frac{h}{2}$ *ou* $< \frac{h}{2}$, *l'équation n'aura qu'une racine réelle.*

Pour prouver ce que j'avance, j'écris l'équation ainsi :

$$A_0 x^{m-1}\left(x - \frac{A_1}{A_0}\right) + A_2 x^{m-3}\left(x - \frac{A_3}{A_2}\right) + \ldots$$
$$+ A_{m-1}\left(x - \frac{A_m}{A_{m-1}}\right) = 0.$$

Si je remplace x par H ou une valeur plus grande, le premier membre sera toujours positif; par H′ ou une valeur plus petite, il sera constamment négatif (les valeurs positives de x sont seules en question, car l'équation n'a évidemment pas de racine négative). Donc toutes les racines sont comprises entre H′ et H.

De plus, il faut montrer qu'au-dessous de $\frac{h}{2}$ il ne peut y avoir qu'une seule racine. Pour cela je considère l'équation dérivée

$$m A_0 x^{m-1} - (m-1) A_1 x^{m-2} + (m-2) A_2 x^{m-3} - \ldots$$
$$- 2 A_{m-2} x + A_{m-1} = 0.$$

Pour avoir une limite inférieure des racines de cette équation, il suffit, d'après le théorème précédent (question 780), de prendre le plus petit des rapports

$$\frac{m-2}{m-1}\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{m-4}{m-3}\frac{A_4}{A_3}, \ldots, \quad \frac{1}{2}\frac{A_{m-1}}{A_{m-2}}.$$

A plus forte raison pourrai-je prendre la plus petite des quantités suivantes :

$$\frac{1}{2}\frac{A_2}{A_1}, \quad \frac{1}{2}\frac{A_4}{A_3}, \ldots, \quad \frac{1}{2}\frac{A_{m-1}}{A_{m-2}},$$

pour limite inférieure. Or la plus petite de ces quantités est évidemment $\frac{1}{2}h$. Ainsi, la dérivée n'a pas de racine inférieure à $\frac{h}{2}$; il en résulte nécessairement que l'équation proposée n'en a pas plus d'une au-dessous de cette valeur.

Cette racine inférieure à $\frac{h}{2}$ ne peut d'ailleurs exister que dans le cas où $\frac{h}{2}$ surpasse H', et c'est entre ces deux dernières valeurs qu'on devra la rechercher s'il y a lieu.

Question 788

(voir 2e série, t. V, p. 528);

PAR M. GAYOU,
Candidat à l'École Normale.

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 désignant les racines, prises dans un ordre quelconque, de l'équation

$$x^5 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,$$

on a

$$\begin{aligned}&x_1^2(x_4x_5 + x_5x_2 + x_2x_3) + x_2^2(x_5x_1 + x_1x_3 + x_3x_4)\\ &+ x_3^2(x_1x_2 + x_2x_4 + x_4x_5) + x_4^2(x_2x_3 + x_3x_5 + x_5x_1)\\ &\qquad + x_5^2(x_3x_4 + x_4x_1 + x_1x_2) = -2r.\end{aligned}$$

(S. REALIS.)

Le premier membre de l'égalité qu'il s'agit de démontrer peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&x_1 x_4 x_5 (x_1 + x_4 + x_5) + x_1 x_2 x_5 (x_1 + x_2 + x_5)\\&+ x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) + x_2 x_3 x_4 (x_2 + x_3 + x_4)\\&+ x_3 x_4 x_5 (x_3 + x_4 + x^5).\end{aligned}$$

Or, dans l'équation, le coefficient de x^4 est nul ; donc

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0,$$

et, par suite, on peut remplacer la somme précédente par la suivante :

$$\begin{aligned}&- x_1 x_4 x_5 (x_2 + x_3) - x_1 x_2 x_5 (x_3 + x_4) - x_1 x_2 x_3 (x_4 + x_5)\\&- x_2 x_3 x_4 (x_1 + x_5) - x_3 x_4 x_5 (x_1 + x_2).\end{aligned}$$

En effectuant les calculs, et réduisant les termes semblables, on obtient l'identité

$$\begin{aligned}-2\,(x_1 x_2 x_4 x_5 + x_1 x_3 x_4 x_5 + x_1 x_2 x_3 x_5\\ + x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 x_5) = -2r.\end{aligned}$$

Note. — La même question a été résolue, à peu près de la même manière, par MM. Laisant, officier du génie; J. Palmade, élève du lycée Napoléon; Louis Mallet, Alfred Giard, du lycée de Douai; Vaison, du lycée Saint-Louis; A. Chauliac, du lycée de Bordeaux; Barnèdes, du lycée Charlemagne; J. Chérot, du lycée Napoléon; A. Soudan et H. Vivarez, de Sainte-Barbe; H. Nouaux, de l'École Sainte-Geneviève; Annequin, du lycée de Grenoble. M. J. Fretz, élève de l'École Polytechnique de Zurich, donne une propriété analogue pour une équation d'un degré quelconque, mais l'énoncé en est trop long pour pouvoir trouver place ici.

Question 789

(voir 2e série, t. V, p. 528) ;

PAR M. H. NOUAUX,
Élève de l'École Sainte-Geneviève (classe du P. Joubert).

On donne une parabole et un cercle ayant pour centre le sommet de la parabole. Chaque point de la pa-

rabole étant pris comme pôle, on trace la polaire correspondante. Déterminer l'enveloppe de cette droite.

(LAISANT.)

Je prends pour axe des ordonnées la tangente au sommet de la parabole, et pour axe des abscisses l'axe de la parabole. L'équation de la polaire d'un point (x_1, y_1) sera

$$(1) \qquad yy_1 = p(x + x_1).$$

Ce point étant sur le cercle, ses coordonnées doivent vérifier l'équation du cercle; donc

$$(2) \qquad x_1^2 + y_1^2 = R^2.$$

Appliquant la méthode générale pour trouver l'enveloppe d'une droite, je considère y_1 comme une fonction de x_1, et je prends les dérivées par rapport à x_1 des équations (1) et (2); on a

$$yy'_1 = p,$$
$$y_1 y'_1 + x_1 = 0.$$

y'_1 désignant la dérivée de y_1 par rapport à x_1, on a

$$y'_1 = \frac{p}{y};$$

donc

$$(3) \qquad py_1 + yx_1 = 0.$$

Pour avoir l'équation de la courbe enveloppe, il suffit d'éliminer x_1 et y_1 entre les équations (1), (2) et (3); or, les équations (1) et (3) étant du premier degré, par rapport à x_1 et y_1, on en conclut

$$y_1 = \frac{pxy}{p^2 + y^2}, \quad x_1 = -\frac{p^2 x}{p^2 + y^2};$$

on aura donc

$$p^2 x^2 y^2 + p^4 x^2 = R^2 (p^2 + y^2)^2,$$

ou, supprimant le facteur $p^2 + y^2$,

$$p^2 x^2 = R^2 (p^2 + y^2),$$

hyperbole ayant pour axe transverse le diamètre du cercle, et dont l'autre axe est le double du paramètre de la parabole.

Note. — Solutions analogues de MM. Soudan et Vivarez, de Sainte-Barbe; Pellet, du lycée de Nîmes; Chérot, du lycée Napoléon; Chauliac, du lycée de Bordeaux; A. Violet, du collége de Sorrèze; E. Martinolli, du collége Chaptal; Sandier, du lycée de Lyon; Watteau, de l'École Centrale; Vaison, du lycée Napoléon; Giard, du lycée de Douai; Gayou, du lycée de Poitiers; Alfred Jalouzet, du lycée Louis-le-Grand; Baer, Houbre, du lycée de Strasbourg; Carriage, du lycée de Besançon; Graindorge. M. Martinolli généralise la question en considérant un cercle dont le centre est sur une conique quelconque. M. Annequin prend aussi une conique quelconque, le centre étant au sommet. M. Paul Capin, maître d'études au lycée de Toulouse, trouve une propriété analogue pour le paraboloïde et la sphère.

Démonstration géométrique et généralisation de la même question;

PAR M. A. DE GROSSOUVRE,
Elève du collége Stanislas (classe de M. Gros).

Le lieu cherché est la polaire réciproque du cercle par rapport à la parabole; or, la polaire réciproque d'une courbe du second degré est une courbe du second degré; le lieu cherché est donc une courbe du second degré.

Pour déterminer cette courbe, je remarque que les tangentes du cercle ont pour pôles les points où l'enveloppe touche les polaires des points de contact.

Si l'on prend les tangentes (A) au cercle parallèles à l'axe de la parabole, les pôles de ces tangentes sont situés à l'infini sur les tangentes (B) à la parabole aux points ou cette courbe est rencontrée par les droites (A). Le lieu est donc une hyperbole. Pour avoir ses asymptotes, je considérerai ces droites comme les tangentes aux points situés à l'infini. Ces asymptotes sont donc les polaires des points où les tangentes (A) touchent le cercle, c'est-à-dire deux droites passant par le point O et parallèles aux droites (B). Par conséquent, les asymptotes sont perpendiculaires aux droites (C) qui joignent le foyer aux points où la directrice de la parabole est rencontrée par les droites (A); par suite, l'angle des asymptotes avec l'axe est complémentaire de l'angle des droites (C) avec l'axe, de sorte que si p et R représentent le paramètre de la parabole et le rayon du cercle, la tangente de l'angle des asymptotes avec l'axe est égale à $\frac{p}{R}$.

L'axe de la parabole est évidemment un axe de l'hyperbole; je dis, de plus, que les points M et N, où le cercle rencontre l'axe, sont les sommets de l'hyperbole. En effet, d'après une propriété connue de la parabole, le point M étant situé sur l'axe a pour polaire une droite perpendiculaire à l'axe, et rencontrant cet axe en un point symétrique du point M, par rapport au sommet de la parabole; donc ce point n'est autre chose que le point N. Donc les points M et N sont les sommets de l'hyperbole.

Dans le cas où le paramètre de la parabole est égal au rayon du cercle, l'hyperbole est équilatère.

Considérons d'une manière générale un cercle situé dans le plan de la parabole; la polaire réciproque de ce cercle, par rapport à la parabole, est une hyperbole ; en effet, les tangentes (A) au cercle, parallèles à l'axe, ont pour pôles des points situés à l'infini sur les tangentes (B) à la parabole, aux points où cette courbe est rencontrée par les droites (A), et les directions des tangentes (B) sont les directions asymptotiques.

En second lieu, déterminons le centre de l'hyperbole : ce point est le point d'intersection des asymptotes, c'est-à-dire le point d'intersection des polaires des points de contact du cercle avec les tangentes (A) ; par suite, ce centre est le pôle de la droite qui joint les points de contact des tangentes (A) avec le cercle : cette droite étant perpendiculaire à l'axe, son pôle se trouve sur l'axe ; donc, quel que soit le cercle considéré, l'hyperbole correspondante a son centre sur l'axe de la parabole, et si l'on considère différents cercles ayant leurs centres sur une même perpendiculaire à l'axe, les hyperboles correspondantes ont le même centre.

Tous les cercles précédents passent par les points circulaires de l'infini ; donc toutes les hyperboles sont tangentes à un système de deux droites imaginaires parallèles à l'axe de la parabole ; les points où ces droites coupent le cercle ont pour polaires des droites imaginaires conjuguées tangentes à l'hyperbole et passant par les points circulaires de l'infini ; ces droites, par leurs intersections, déterminent donc les foyers de l'hyperbole.

Nous avons vu que les directions des tangentes (B) sont les directions asymptotiques ; si l'on suppose que le centre du cercle se déplace sur un diamètre de la parabole, son rayon demeurant constant, les directions des asymptotes des diverses hyperboles que l'on obtiendra en prenant les polaires réciproques de ces cercles seront constamment les mêmes, et, de plus, toutes ces hyperboles seront égales ; car, si l'on déplace le centre du cercle d'une certaine longueur, tous ses points décriront des droites parallèles et égales, et les polaires de ces points se déplaceront en sens contraire de la même longueur.

Note. — M. Barnède donne aussi une solution géométrique par la théorie des polaires réciproques; MM. Niébylowski et Lepage, à l'aide de la même théorie, généralisent la question.

CORRESPONDANCE.

1. *Avis des Rédacteurs.* — Nous prions nos Collaborateurs de vouloir bien se conformer aux indications suivantes : 1° écrire lisiblement et correctement; 2° disposer les calculs avec ordre; 3° donner leur nom, leur qualité et leur adresse, même lorsqu'ils veulent garder l'anonyme devant le public; 4° mettre chaque article sur une feuille séparée, pour que nous puissions réunir les articles émanés de divers Correspondants et relatifs au même objet; 5° placer en tête de chaque question résolue le numéro de la question, le renvoi à la page où elle a été proposée, le nom de l'auteur de la solution et l'énoncé de la question.

En adoptant ces simples mesures, nos Correspondants faciliteront notre travail, bien plus considérable qu'ils ne pensent. Nous recevons quelquefois des articles si remplis d'abréviations, d'incorrections, de ratures, qu'il nous faudrait les recopier en entier, si nous voulions en faire usage. Il n'est pas raisonnable de nous imposer une telle fatigue.

2. *M. Mention, professeur à Paris.* — « La méthode indiquée par M. Roger Alexandre, pour résoudre l'équation du quatrième degré, est répandue depuis longtemps.

Voilà plus de six ans que je la donne aux élèves de divers établissements ; elle était même sur mes feuilles d'interrogation à Sainte-Barbe et à Sainte-Geneviève.

» Je n'ai point, contre mon habitude, nommé l'auteur de cette méthode, parce que je ne la tenais de personne.

» Au surplus, j'en parlerai avec quelque développement dans l'ouvrage qui m'occupe maintenant, un volume de *Mélanges*. »

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Session de juillet 1866.

1re *Question.* — Trouver une courbe plane telle, que la projection de son rayon de courbure sur une droite fixe située dans son plan ait une longueur constante.

2e *Question.* — Trouver dans un plan vertical la courbe sur laquelle doit être assujetti à se mouvoir un point pesant partant d'un point donné, avec une vitesse initiale donnée en grandeur et en direction, pour que la pression du mobile sur cette courbe soit à la composante normale de son poids dans le rapport constant $\frac{k}{1}$.

k est positif ou négatif suivant que la pression et la composante normale du point sont dirigées dans le même sens ou en sens contraire.

On examinera particulièrement les cas suivants :

$$k = 0,\quad k = +1,\quad k = +2,\quad k = +3,\quad k = -1.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (ANNÉE 1866).

Composition de Mathématiques.

Dans une ellipse donnée, on inscrit un parallélogramme ayant pour diagonales deux diamètres conjugués quelconques AA′, BB′.

Aux sommets de ce parallélogramme, on mène les normales à l'ellipe; ces normales forment un second parallélogramme MNM′N′.

1° Démontrer que les diagonales de chacun des deux parallélogrammes ABA′B′, MNM′N′ sont respectivement perpendiculaires aux côtés de l'autre.

2° Trouver le lieu des sommets du parallélogramme MNM′N′, quand on fait varier les diamètres conjugués.

3° Trouver le lieu du point d'intersection de la diagonale NN′ et de la tangente en M au lieu précédent.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (ANNÉE 1866).

Composition de Mathématiques.

Étant données une parabole

$$y^2 = 2px$$

et une hyperbole équilatère

$$xy = m^2,$$

ayant pour asymptotes l'axe et la tangente au sommet de la parabole, on propose :

1° De former l'équation ayant pour racines les abscisses ou les ordonnées des pieds des normales communes aux deux courbes;

2° De déduire de cette équation que le nombre des normales communes réelles est au moins *un* et au plus *trois;*

3° De démontrer que lorsque $7p^4$ est $> 2m^4$, il n'y a qu'une normale commune réelle.

Composition de Géométrie descriptive.

On donne une sphère pleine; on la coupe par un cône. On enlève de la sphère la partie qui est dans l'intérieur du cône. On demande de représenter par ses projections la sphère solide dans laquelle on a pratiqué ainsi une entaille conique. Le centre de la sphère est projeté en (O', O). Les points O' et O sont à 100 millimètres de la ligne de terre. Le rayon de la sphère a 90 millimètres de longueur. La surface conique de l'entaille est engendrée par la droite A'B' qui tourne autour de l'axe EF. Ces deux droites sont dans le plan mené par le centre de la sphère parallèlement au plan vertical de projection. Pour les déterminer, on donne les dimensions suivantes :

$$\begin{aligned} OA &= 60^{mm} \\ OB &= 30 \\ O'D' &= 30 \\ O'C' &= 45 \end{aligned}$$

N. B. — Prendre pour ligne de terre une droite parallèle aux petits côtés de la feuille de dessin et à égale distance de ces côtés.

Calcul trigonométrique.

Étant donnés, dans un triangle ABC, les côtés, savoir :

$$a = 12418^{m},78$$
$$b = 28381,17$$
$$c = 34218,95$$

trouver les trois angles.

Lavis à l'encre de Chine.

Faire le lavis à l'encre de Chine d'une surface cylindrique de 10 centimètres de diamètre sur 15 centimètres de hauteur. Ce cylindre devra se détacher sur un fond formé d'une teinte plate grise ; il reposera sur un socle dont la surface plane sera indiquée par une teinte plate d'une très-faible intensité.

Le modelé de cette surface cylindrique pourra être fait à teintes fondues ou adoucies, ou bien à teintes plates superposées.

On admettra que le rayon de lumière a pour projections horizontale et verticale des lignes inclinées à 45 degrés sur la ligne de terre. Le cadre limitant le dessin aura 24 centimètres de haut sur 18 centimètres de large.

Composition française.

L'éloquence et la poésie élèvent des monuments plus durables que ceux des sculpteurs et des peintres. Nous avons encore les poëmes d'Homère, de Virgile, les discours de Démosthènes, de Cicéron. Où sont les statues d'Achille, d'Ulysse? Quels monuments rappellent les triomphes de Philippe et d'Alexandre? Où est le tombeau de Marcellus?

Développer cette pensée.

QUESTIONS.

791. Si $E(q)$ désigne la partie entière du nombre q; $p_1, p_2, p_3, \ldots$ la suite des nombres premiers $2, 3, 5, 7, \ldots$; $S_{j,n}$ la somme des produits j à j des n nombres $1, 2, 3, \ldots, n$; $F_\omega(x)$ un polynôme du degré ω et à coefficients entiers, on aura

$$S_{j,n} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-j+1)}{p_1^{\varphi_1}\,p_2^{\varphi_2}\,p_3^{\varphi_3}\ldots}\,F_{j-1}(n),$$

l'exposant φ d'un nombre quelconque p étant donné par la formule

$$\varphi = \sum_{\mu=\infty}^{\mu=0} E\,\frac{j}{(p-1)p^{\mu}}.$$

(SYLVESTER.)

792. Quand on change deux cercles en deux autres cercles, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, le rapport du carré de la tangente commune au rectangle des diamètres est le même dans la figure primitive et dans la figure transformée.

(J. CASEY) (*).

793. Déterminer dans un plan deux systèmes de neuf points conjugués

$$\begin{gathered} a_1,\ a_2,\ldots,\ a_8,\ a_9, \\ b_1,\ b_2,\ldots,\ b_8,\ b_9, \end{gathered}$$

jouissant de la propriété qu'étaut pris au hasard deux couples de points correspondants a_i et b_i, a_j et b_j, il existe toujours un autre couple de points correspondants a_k et b_k et un seul tel, que les deux triangles $a_i a_j a_k$ et $b_i b_j b_k$ soient semblables. (LAGUERRE.)

(*) *The educational Times.*

RELATION ENTRE LES RAYONS DE COURBURE D'UNE COURBE ET DE SA POLAIRE RÉCIPROQUE (*);

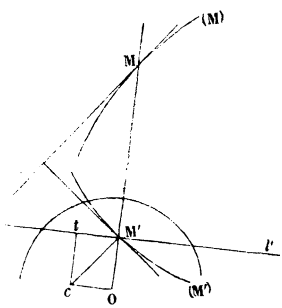
PAR M. CHEMIN,
Élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

Je dirai que deux points sont *correspondants*, quand l'un sera le point de contact de la polaire de l'autre avec son enveloppe.

Je prendrai toujours un cercle pour courbe auxiliaire de transformation.

Soient M un point de la première courbe, $M'l'$ la

FIG. 1.



droite qui lui correspond dans la transformation. On a, entre les points M et M', la relation

$$OM.OM' = a^2,$$

a étant le rayon du cercle de transformation. A chaque

(*) *Voir*, sur le même sujet, un Mémoire de M. Mannheim inséré dans le *Journal de M. Liouville*, 2e série, t. XI (1866), p. 193, intitulé : *Transformation par polaires réciproques des propriétés relatives aux rayons de courbure*. P.

point tel que M répondra un point M′, et le lieu géométrique de tous ces points sera la transformée par rayons vecteurs réciproques de la courbe lieu des points M. Supposons, pour un moment, que nous ayons déterminé cette transformée; alors nous pouvons facilement voir que la courbe polaire réciproque de la courbe (M) pourra être engendrée de la manière suivante : ce sera l'enveloppe du côté $M'l'$ d'un angle droit, se mouvant de manière que l'un de ses côtés passe constamment au point O, centre du cercle de transformation, tandis que son sommet se meut sur la courbe (M′). La considération du centre instantané de rotation nous donne immédiatement le point de contact. Pour cela, menons en M′ la normale à la courbe (M′), en O la perpendiculaire à OM′, et de leur point de rencontre c abaissons la perpendiculaire ct; le point t est le point de contact de $M'l'$ avec son enveloppe. Les deux points t et M sont deux points *correspondants*, d'après la définition donnée plus haut. Notre but est de déterminer la relation qui existe entre les rayons de courbure des deux courbes en ces points, relation qui s'exprime, ainsi qu'on va le voir, par une formule d'une remarquable simplicité.

Dans le cours de cette recherche, nous représenterons constamment par :

ν l'angle formé par la tangente et le prolongement du rayon vecteur, cet angle étant compté dans le sens des angles croissants;

n la normale polaire;

ρ le rayon de courbure;

ds l'élément de courbe;

$d\theta$ l'angle de contingence;

$d\omega$ l'élément d'angle polaire.

Chacune des quantités aura l'indice (1) quand elle se rapportera à la courbe M′, l'indice (2) pour la courbe lieu des points t; quant à la courbe M, les quantités qui en dépendent ne seront affectées d'aucun indice.

Nous ferons constamment usage des formules suivantes :

$$(1) \qquad d\theta = d\omega + dv,$$

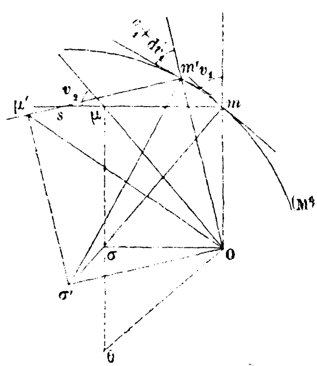
$$(2) \qquad ds = n d\omega = \rho d\theta,$$

$$(3) \qquad v + v_1 = \varpi;$$

leur démonstration étant connue, nous nous dispensons de la rapporter.

Soient, sur la courbe (M'), m et m' deux positions in-

FIG. 2.



finiment voisines du sommet de l'angle droit dont on a parlé plus haut; soient μ et μ' les points de contact avec leur enveloppe des deux côtés correspondants $m\mu$, $m'\mu'$; soient α l'angle $\widehat{\mu O m}$, α_1 l'angle $\widehat{\mu' O m'}$, nous avons immédiatement

$$\widehat{\mu O \mu'} = \alpha_1 - \alpha + d\omega_1 = d\omega_2.$$

Mais

$$d\omega_1 = d\omega; \quad \text{d'où} \quad d\omega_2 = \alpha_1 - \alpha + d\omega.$$

Or

$$\alpha = \frac{\varpi}{2} - v_1, \quad \alpha_1 = \frac{\varpi}{2} - (v_1 + dv_1);$$

donc

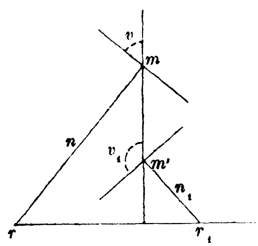
$$d\omega_2 = d\omega - dv_1. \tag{4}$$

L'inspection de la *fig.* 2 montre immédiatement que

$$\widehat{msm'} = d\theta_2 = d\omega.$$

Maintenant cherchons n_2 : c'est la longueur comprise

Fig. 3.



entre le point μ et la perpendiculaire $O\theta$ à $O\mu$. Le triangle rectangle $\mu O\theta$ donne

$$\overline{O\mu}^2 = \overline{\mu\theta} \times \mu\sigma, \quad \text{ou bien} \quad \overline{n_1}^2 = \overline{n_2}\,.\,r;$$

d'où

$$n_2 = \frac{\overline{n_1}^2}{r_1}. \tag{5}$$

De la formule (2) nous déduisons

$$\rho_2 = n_2\,.\,\frac{d\omega_2}{d\theta_2}.$$

Toutes les quantités qui entrent dans le second membre de cette relation sont connues ; nous avons donc

$$\rho_2 = \frac{\overline{n_1}^2}{r_1} \times \frac{d\omega - dv_1}{d\omega}. \tag{6}$$

Mais de la formule (3) nous tirons

$$dv + dv_1 = 0,$$

et portant dans (6)

$$\rho_2 = \frac{\overline{n}_1^2}{r_1} \times \frac{d\omega + dv}{d\omega} = \frac{\overline{n}_1^2}{r_1} \times \frac{d\theta}{d\omega}.$$

Mais

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{n}{\rho}; \quad \text{donc} \quad \rho_2 = \frac{n_1^2}{r_1} \cdot \frac{n}{\rho}.$$

Or on a facilement

$$\frac{n_1}{r_1} = \frac{1}{\sin v_1}, \quad \frac{n}{r} = \frac{1}{\sin v}.$$

Substituant et remarquant que $rr_1 = a_2$, nous arrivons à

$$\rho_2 = \frac{a^2}{\rho \sin^3 v}, \quad \text{ou bien} \quad \rho\rho_2 \sin^3 v = a^2.$$

D'où ce théorème remarquable :

THÉORÈME. — *Le produit des rayons de courbure aux points correspondants de deux courbes polaires réciproques l'une de l'autre, multiplié par le cube du sinus de l'angle formé par la tangente avec le prolongement du rayon vecteur* (angle compté comme on l'a dit plus haut), *est égal au carré du rayon du cercle de transformation.*

Cette relation est réciproque : on voit facilement que l'angle v_2 en μ est égal à l'angle v_1, et comme $v_1 + v = \varpi$, il en résulte que

$$v_2 + v = \varpi \quad \text{ou} \quad \sin v_2 = \sin v.$$

En partant du point μ et en déduisant par polarité réciproque le point M, on obtiendrait la relation

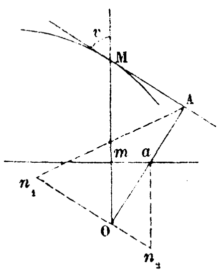
$$\rho_2 \rho_1 \sin^3 \nu_2 = a^2,$$

ou, d'après ce qu'on vient de dire,

$$\rho \rho_2 \sin^3 \nu = a^2.$$

On pourrait arriver à cette relation d'une manière moins directe, mais presque aussi simple, en procédant comme il suit. Soit ma la droite qui correspond au

Fig. 4.



point M de la courbe donnée; menons la tangente MA, nous obtiendrons le point de contact de ma, en prenant son intersection avec la perpendiculaire OA abaissée du point O sur MA. Or on a, par les triangles semblables,

$$\overline{Om} \cdot \overline{OM} = \overline{Oa} \cdot \overline{OA}.$$

Mais

$$\overline{Om} \cdot \overline{OM} = a^2; \quad \text{donc} \quad \overline{Oa} \cdot \overline{OA} = a^2.$$

Donc la courbe polaire réciproque par rapport à un cercle d'une courbe donnée est la transformée par rayons vecteurs réciproques de la podaire de cette même courbe par rapport au centre du cercle de transformation.

A propos de la démonstration de la formule qui lie les rayons de courbure aux points correspondants de deux courbes réciproques,

$$(1)\qquad \frac{n}{\rho}+\frac{n_1}{\rho_1}=2, \qquad \text{(NICOLAÏDÈS)}$$

j'ai énoncé (*Nouvelles Annales*, t. V, 2e série, p. 170) une formule analogue pour les courbes podaires

$$(2)\qquad \frac{1}{\rho_1}=\frac{2}{r}-\frac{\rho}{rn}.$$

Cette formule se ramène aisément à

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{2}{r}-\frac{p\rho}{r^3},$$

p étant la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente à la courbe donnée. Ces deux formules vont nous résoudre la question. Entre les rayons de courbure ρ et ρ_1 en M et A, nous avons

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{2}{r}-\frac{p\rho}{r^3}.$$

Mais

$$\frac{p}{r}=\sin v; \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\rho_1}=\frac{2}{r}-\frac{\rho\sin v}{r^2}.$$

La formule (1) donne

$$\frac{n_1}{\rho_1}+\frac{n_2}{\rho_2}=2.$$

Mais

$$n_1=\mathrm{A}n_1=\mathrm{MO}=r,$$

d'après les propriétés des podaires; donc

$$(3)\qquad \frac{n_1}{\rho_1}=\frac{r_1}{\rho_1}=2-\frac{\rho\sin v}{r}.$$

Mais $n_2=\overline{an_2}$, et des triangles semblables $\mathrm{O}ma$, $\mathrm{O}n_2a$, on déduit

$$n_2 = \frac{\overline{Oa}^2}{Om}.$$

Or

$$Oa = \frac{Om}{\sin v}; \quad \text{d'où} \quad n_2 = \frac{Om}{\sin^2 v}.$$

Et, puisque $OM.Om = a^2$,

$$Om = \frac{a^2}{r};$$

d'où

$$(4) \qquad n_2 = \frac{a^2}{r \sin^2 v} \quad \text{et} \quad \frac{n_2}{\rho_2} = \frac{a^2}{\rho_2 r \sin^2 v}.$$

Donc

$$\frac{n_1}{\rho_1} + \frac{n_2}{\rho_2} - 2 = 0$$

donne, en substituant,

$$\frac{\rho \sin v}{r} - \frac{a^2}{\rho_2 r \sin^2 v} = 0,$$

ou bien, en divisant par r et chassant le dénominateur,

$$\rho\rho_2 \sin^3 v = a^2.$$

C. Q. F. D.

Appliquons à un cas qui puisse fournir une vérification. Une conique étant donnée, si on la transforme au moyen d'un cercle ayant son centre au foyer, on obtient un cercle; donc

$$\rho_2 = \text{const.};$$

par suite,

$$\rho \sin^3 v = \text{const.}, \quad \text{mais} \quad \sin v = \cos i,$$

i étant l'angle formé par la normale et le rayon vecteur issu du foyer; donc

$$\rho \cos^3 i = \text{const.},$$

propriété connue des coniques. Cette même formule permettrait de montrer que la polaire réciproque d'une spirale logarithmique est une courbe du même genre.

On pourrait en déduire beaucoup d'autres conséquences que je développerai peut-être plus tard.

PROPRIÉTÉS DU QUADRILATÈRE CIRCONSCRIPTIBLE A DEUX CERCLES;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

1. Le quadrilatère circonscriptible à deux cercles est un trapèze étoilé, qui est inscriptible dans le cercle construit sur la distance des centres comme diamètre.

Soient O, O′ les centres des deux cercles, R, R′ leurs rayons, et D la distance des centres.

Représentons par a chaque côté transversal du quadrilatère, tangent intérieurement aux deux cercles, et par b chaque côté tangent extérieurement à ces cercles; désignons de plus par x, y les deux diagonales du quadrilatère : elles sont perpendiculaires à la ligne des centres et interceptent sur cette ligne un segment que nous appellerons d.

Indiquons enfin par 2α, 2β les angles compris entre les côtés opposés du quadrilatère, exprimés les uns par a et les autres par b.

2. Nous avons de suite

$$d = a \cos\alpha = b \cos\beta, \tag{I}$$

$$D \sin\alpha = R + R', \quad D \sin\beta = R - R'. \tag{II}$$

La relation (I) exprime que :

Les côtés du quadrilatère circonscriptible à deux cercles sont inversement proportionnels aux cosinus de leurs inclinaisons sur la ligne des centres.

Et les égalités (II) donnent

$$(1)\qquad \sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha = \frac{4RR'}{D^2}.$$

3. Le point de concours I des deux tangentes intérieures et celui E des deux tangentes extérieures divisent la distance des centres $OO' = D$ en parties harmoniques dans le rapport de R à R′; si donc des points I, E nous abaissons les perpendiculaires p, q sur les tangentes qui n'y passent point, et que nous appelions P, Q les pieds de ces perpendiculaires, les points P, E, situés sur b, diviseront harmoniquement, dans le même rapport, l'intervalle $D\cos\beta$ compris entre les points de contact du côté b; et les points I, Q partageront harmoniquement, dans le même rapport de R à R′, la distance $D\cos\alpha$ qui sépare les points de contact du côté a. D'après cela, il est aisé de voir qu'on a la proportion

$$\frac{R-p}{p-R'} = \frac{R}{R'},$$

d'où l'on tire

$$(\text{III})\qquad p = \frac{2RR'}{R+R'} = \frac{2RR'}{D\sin\alpha}.$$

On trouverait de même

$$(\text{IV})\qquad q = \frac{2RR'}{R-R'} = \frac{2RR'}{D\sin\beta}.$$

4. Désignons par a' et a'' les deux segments que détermine le point I sur le côté a; la perpendiculaire p forme

avec les deux tangentes intérieures et le côté b deux triangles rectangles qui donnent

$$p = a' \sin(\alpha - \beta) = a'' \sin(a + \beta),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{a' + a''}{p} = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)} = \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta},$$

ou, en ayant égard à (1) et (III),

$$a = \frac{2\cos\beta \times p\sin\alpha}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta} = 2\cos\beta \times \frac{2RR'}{D} \times \frac{D^2}{4RR'}.$$

On a donc

(V) $$a = D\cos\beta, \quad b = D\cos\alpha.$$

Ainsi, *dans le quadrilatère circonscriptible à deux cercles, chaque côté est égal à la distance des centres projetée sur l'autre côté* (côté adjacent).

Ou encore :

Chaque côté est égal à la distance qui sépare les points de contact situés sur l'autre côté.

5. Dans les expressions (V), mettons à la place de $\cos\beta$, $\cos\alpha$ leurs valeurs tirées des équations (II), et élevons au carré, nous trouvons pour les *carrés des côtés*

(VI) $$\left\{\begin{aligned} a^2 &= (D + R - R')(D + R' - R),\\ b^2 &= (D + R + R')(D - R - R').\end{aligned}\right.$$

6. Les égalités (I) et (V) donnent les relations remarquables

(VII) $$d = D\cos\alpha\cos\beta,$$

(VIII) $$ab = Dd,$$

dont la dernière exprime que :

1° *Le produit des côtés du quadrilatère circonscriptible à deux cercles est égal à la distance des centres multipliée par la distance des diagonales;*

2° *Le produit des deux tangentes, l'une intérieure et l'autre extérieure, est égal à la distance des centres multipliée par la distance des cordes qui joignent les points de concours des tangentes.*

7. Par l'égalité (VIII), on a de suite

$$\text{(IX)}\quad d^2 = \frac{(D+R+R')(D+R-R')(D+R'-R)(D-R-R')}{D^2}.$$

8. Passons aux diagonales. Le quadrilatère considéré comme convexe étant inscriptible, nous avons

$$a \times a = xy + b \times b,$$

d'où

$$\text{(X)}\qquad xy = a^2 - b^2.$$

Donc *le produit des diagonales est égal à la différence des carrés des côtés adjacents.*

9. Les relations (VI) donnent

$$a^2 - b^2 = D^2 - (R - R')^2 - D^2 + (R + R')^2 = 4RR',$$

de sorte que

$$\text{(XI)}\qquad xy = 4RR',$$

c'est-à-dire que :

Le produit des diagonales est égal au produit des diamètres des deux cercles.

10. Par les deux extrémités de la droite qui joint les points de concours des tangentes dans le cercle O', menons des parallèles à la ligne des centres jusqu'à la rencontre

de la droite qui joint les points de concours des tangentes dans le cercle O; nous formons deux triangles rectangles qui donnent

$$(2) \qquad x+y=2a\sin\alpha, \quad x-y=2b\sin\beta,$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad \begin{cases} x=a\sin\alpha+b\sin\beta, \\ y=a\sin\alpha-b\sin\beta, \end{cases}$$

et, en ayant égard aux valeurs (II) et (VI),

$$(\mathrm{XII}) \qquad \begin{cases} x=\dfrac{R+R'}{D}\sqrt{(D+R-R')(D+R'-R)} \\ \qquad +\dfrac{R-R'}{D}\sqrt{(D+R+R')(D-R-R')}, \\ y=\dfrac{R+R'}{D}\sqrt{(D+R-R')(D+R'-R)} \\ \qquad +\dfrac{R'-R}{D}\sqrt{(D+R+R')(D-R-R')}; \end{cases}$$

telles sont les *valeurs des deux diagonales.*

11. Si nous introduisons les valeurs (VI) dans les égalités (2), nous obtenons

$$(4) \qquad \begin{cases} x+y=2D\sin\alpha\cos\beta, \\ x-y=2D\sin\beta\cos\alpha, \end{cases}$$

qui donnent

$$(\mathrm{XIII}) \qquad x=D\sin(\alpha+\beta), \quad y=D\sin(\alpha-\beta);$$

d'où

$$(\mathrm{XIV}) \qquad \frac{x}{y}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},$$

et par suite,

$$(\mathrm{XV}) \qquad \begin{cases} x^2=\dfrac{4RR'\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}, \\ y^2=\dfrac{4RR'\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}. \end{cases}$$

12. Des relations (4) on tire encore

(XVI) $$\frac{x+y}{x-y}=\frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta},$$

qui démontre que :

Dans tout quadrilatère circonscriptible à deux cercles, la somme des deux diagonales est à leur différence comme la tangente du demi-angle des côtés intérieurs est à la tangente du demi-angle des côtés extérieurs.

13. Les mêmes relations (4) donnent aussi

$$x^2-y^2=4D^2\cos\alpha\cos\beta\times\sin\alpha\sin\beta=4Dd\sin\alpha\sin\beta.$$

Or par (II) on a

$$4R^2-4R'^2=4D^2\sin\alpha\sin\beta;$$

il vient donc, en divisant,

(XVII) $$\frac{x^2-y^2}{4R^2-4R'^2}=\frac{d}{D}.$$

Ainsi *la différence des carrés des diagonales est à la différence des carrés des diamètres comme la distance des diagonales est à la distance des centres.*

14. Élevons au carré la seconde des égalités (4), nous obtenons

$$x^2+y^2=2xy+4D^2\sin^2\beta\cos^2\alpha.$$

Substituons les valeurs fournies par (XI) et (II) et nous trouvons, pour la *somme des carrés des diagonales*,

(XVIII) $$x^2+y^2=4R^2(D^2+R'^2-R^2)+4R'^2(D^2+R^2-R'^2);$$

d'où, en vertu de (XI),

(XIX) $$\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{R}{R'}(D^2+R'^2-R^2)+\frac{R}{R'}(D^2+R^2-R'^2).$$

NOTE SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE;

PAR M. E. CATALAN.

Extrait des *Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei.*

PROBLÈME. — *Trouver plusieurs cubes entiers, consécutifs, dont la somme soit un carré* (*).

I.

A cause de la relation

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

on a

$$x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+y-1)^3$$
$$= \frac{y}{8}(2x+y-1)\left[4x^2 + 4(y-1)x + 2y(y-1)\right];$$

ou, en représentant par s la somme des y cubes, et en posant

$$2x + y - 1 = z, \tag{1}$$
$$16s = 2yz(y^2 + z^2 - 1). \tag{2}$$

(*) Cette question m'a été suggérée par la lecture d'un beau Mémoire de M. Angelo Genocchi (*Note sur quelques sommations de cubes*). Bien que ce savant géomètre y donne les solutions *rationnelles* de l'équation *générale*

$$x^3 + (x+r)^3 + (x+2r)^3 + \ldots + (x+nr-r)^3 = y^2,$$

il m'a semblé intéressant de chercher les solutions *entières* de l'équation *particulière*

$$x^3 + (x+1)^3 + \ldots + (x+n-1)^3 = y^2.$$

D'après l'égalité (1), y et z sont de *parités différentes*. Par suite, $2yz$ et y^2+z^2-1 sont divisibles par 4. Donc s sera un carré si le second membre de l'équation (2) est un carré.

Soient

$$(3)\quad 2yz=\alpha,\quad y^2+z^2+1=\beta,\quad y+z=\lambda,\quad z-y=\mu,\quad s=t^2,$$

nous aurons

$$(4)\quad \alpha\beta=16t^2,\quad \alpha+\beta+1=\lambda^2,\quad \beta-\alpha+1=\mu^2.$$

Ainsi la question se réduit à *trouver deux multiples de* 4, α, β, *tels, que* $\alpha\beta$, $\alpha+\beta+1$, $\beta-\alpha+1$ *soient des carrés.*

II.

L'élimination de β, entre la première et la troisième des équations (4), conduit à

$$(5)\qquad 64t^2+(\mu^2-1)^2=(2\alpha+\mu^2-1)^2.$$

Les solutions entières de cette équation sont données par les deux systèmes de formules

$$(6)\quad 2\alpha+\mu^2-1=u^2+v^2,\quad \mu^2-1=u^2-v^2,\quad 4t=uv,$$

$$(6')\quad 2\alpha+\mu^2-1=u^2+v^2,\quad \mu^2-1=2uv,\quad 8t=u^2-v^2;$$

d'où l'on tire, soit

$$(7)\qquad \alpha=v^2,\quad \beta^2=u^2,$$

soit

$$(7')\qquad 2\alpha=(u-v)^2,\quad 2\beta=(u+v)^2.$$

Ainsi, α, β *ou leurs doubles sont des carrés.*

III.

Les équations (7) équivalent à

$$(8)\qquad 2yz=v^2,\quad y^2+z^2-1=u^2.$$

Soit $y = \frac{p}{q} z$, $\frac{p}{q}$ étant irréductible; on déduit de là

$$(9) \qquad y = p\gamma, \quad z = q\gamma,$$

γ étant un nombre entier. De plus, y et z étant de *parités différentes,* il en est de même pour p et q; en outre, γ *est impair.* Enfin, à cause de $2yz = v^2$, $2pq$ *est un carré;* ce qui prouve que *des deux nombres* p, q, *l'un est un carré et l'autre le double d'un carré.*

Au moyen des valeurs (9), la seconde équation (8) devient

$$(10) \qquad (p^2 + q^2)\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Dans chaque cas particulier, l'équation (10) fera connaître les valeurs de γ et de u. On aura ensuite

$$(11) \qquad y = p\gamma, \quad x = \frac{(q-p)\gamma + 1}{2}, \quad s = 2pq\,\frac{\gamma^2 u^2}{16}.$$

IV.

Si l'on répète sur les formules (7′) des calculs analogues aux précédents, on trouve

$$(8') \quad 4yz = (u - v)^2, \quad 2(y^2 + z^2 - 1) = (u + v)^2 = 4u'^2,$$

$$(9') \qquad y = p\gamma, \quad z = q\gamma,$$

$$(10') \qquad (p^2 + q^2)\gamma^2 - 2u'^2 = 1,$$

$$(11') \quad y = p\gamma, \quad x = \frac{(q-p)\gamma + 1}{2}, \quad s = pq\,\frac{\gamma^2 u'^2}{4};$$

cette fois, *p et q sont des carrés, l'un pair, l'autre impair* (*).

(*) Il ne m'a pas été possible de trouver une solution de l'équation (10′). Pourrait-on démontrer qu'elle n'en admet aucune?

V. — Applications.

1° $p=8$, $q=9$. L'équation (10) devient

$$145\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Elle est vérifiée par $\gamma=1$, $u=12$; d'où $x=1$. En laissant de côté cette solution connue, on en trouve une infinité au moyen de la relation

$$u + \gamma\sqrt{145} = (12+\sqrt{145})^{2n+1}.$$

Par exemple, $n=1$ donne

$$u = 6948, \quad \gamma = 577;$$

puis

$$y = 4616, \quad x = 289, \quad s = (3.577.6948)^2.$$

Ainsi

$$289^3 + 290^3 + \ldots + 4904^3 = (3.577.6948)^2.$$

2° $p=2$, $q=25$. L'équation (10) est

$$629\gamma^2 - u^2 = 1.$$

Les valeurs les plus simples sont

$$\gamma = 313, \quad u = 7850 \text{ (*)};$$

d'où

$$y = 626, \quad x = 3600, \quad s = (5.313.3925)^2.$$

On a donc

$$3600^3 + 3601^3 + \ldots + 4225^3 = (5.313.3925)^2$$

3° Si dans la relation

$$u + \gamma\sqrt{629} = (7850 + 313\sqrt{629})^{2n+1},$$

(*) La Table X de Legendre (*Théorie des nombres*, t. Ier) renferme une faute typographique : au lieu de 1850, on doit lire 7850.

on suppose $n = 1$, on trouve

$$u = 7850^3 + 3.7850.313^2.629 = 7850\,(7850^2 + 3.313^2.629),$$
$$\gamma = 3.7850^2.313 + 313^3.629 = 313\,(3.7850^2 + 313^2.629).$$

Or

$$7850^2 = 61622500, \quad 313^2 = 97969,$$
$$3.313^2.629 = 184867503, \quad 313^2.629 = 61622501;$$

donc

$$u = 7850\,(61622500 + 184867503) = 7850.246490003$$
$$= 1934946523550,$$
$$\gamma = 313\,(184867500 + 61622501) = 313.246490001$$
$$= 77151370313.$$

Si ces valeurs sont exactes, on doit avoir

$$629.77151370313^2 - 1934946523550^2 = 1.$$

En effet,

$$77151370313^2 = 5952331941173657717969,$$
$$629.77151370313^2 = 3744018804899823070460 2501,$$
$$1934946523550^2 = 3744018804899823070460 2500,$$

. . . .

Des valeurs précédentes de γ et de u, on tire

$$y = 2\gamma = 154302740626, \quad x = \frac{23\gamma + 1}{2} = 887240758600,$$
$$x + y - 1 = 1041543499225;$$
$$s = \left(\frac{u\gamma}{2}\right)^2 = (967473261775.77151370313)^2.$$

Ainsi

$$887240758600^3 + 887240758601^3 + \ldots + 1041543499225^3$$
$$= (967473261775.77151370313)^2.$$

5.

SUR LES COURBES DU TROISIÈME ORDRE;

PAR M. A. SARTIAUX,
Élève ingénieur des Ponts et Chaussées.

Deux courbes du troisième ordre ont, comme on sait, neuf points communs; ces neuf points ne sont pas distincts, c'est-à-dire qu'il faut un dixième point pour déterminer les courbes passant par ces points. Cela ressort de l'équation générale $s_3 + \lambda s'_3 = 0$ des courbes du troisième ordre passant par l'intersection des courbes $s_3 = 0$ et $s'_3 = 0$.

Cela posé, considérons les intersections d'une courbe du troisième ordre par un triangle, et les courbes du même ordre passant par les points communs. Supposons trois des points, chacun étant pris sur un côté du triangle, en ligne droite, et forçons les courbes passant par ces neuf points à passer par un quatrième point situé sur la ligne droite qui en contient déjà trois; ce qui est toujours possible d'après ce qui a été rappelé plus haut Il est évident alors que la courbe du troisième ordre se décompose en une droite et une conique, c'est-à-dire que les six points restants sont sur une conique. Donc :

1° Si par trois points en ligne droite d'une courbe du troisième ordre on fait passer trois droites, les six autres points d'intersection sont sur une conique.

Comme sur une tangente d'inflexion il y a trois points de la courbe en ligne droite, nous voyons que :

2° Si par un point d'inflexion d'une courbe du troisième ordre on mène trois sécantes, les six points d'intersection sont sur une conique.

Supposons enfin que les trois droites coïncident, et nous arrivons à cette conclusion :

3° Si l'on mène par un point d'inflexion d'une courbe du troisième ordre une sécante, on peut mener une conique ayant aux deux points d'intersection un contact du deuxième ordre avec la courbe.

Si donc nous voulons avoir le nombre des coniques qui ayant en un point donné d'une courbe du troisième ordre un contact du second ordre, ont aussi en un autre point un contact du second ordre, il suffit de remarquer qu'il y a autant de ces coniques que de droites joignant le point donné aux points d'inflexion de la courbe. Or une courbe du troisième ordre a en général *neuf* points d'inflexion ; on a donc ce théorème :

I. *Parmi les coniques qui ont avec une courbe du troisième ordre un contact du second ordre en un point donné de cette courbe, il y en a en général* neuf *qui ont encore avec la courbe un contact du second ordre en un autre point.*

Trois de ces coniques seulement sont réelles, puisque trois seulement des points d'inflexion sont réels. On voit par l'application du théorème 1° :

Que les points de contact des coniques correspondantes à trois points d'inflexion en ligne droite sont sur une même conique ayant avec la courbe un contact du second ordre au point donné.

Il suffit pour le voir de faire concourir au point donné les trois sécantes passant par les points d'inflexion en ligne droite. Par les neuf points d'inflexion passent, comme on sait, douze droites sur lesquelles ces points sont distribués par groupes de trois. Ainsi les neuf points de contact des neuf coniques ayant avec la courbe deux contacts du second ordre, dont l'un en un point donné, sont distribués sur douze coniques ayant entre elles et avec la courbe un contact du second ordre au point donné. Lorsque la courbe du troisième ordre a un point double, le nombre des points d'inflexion se réduit à trois; on n'a plus que trois coniques qui correspondent aux points d'inflexion. Lorsque la courbe a un point de rebroussement, il n'y a plus qu'un point d'inflexion et par suite une conique. C'est le théorème I énoncé par M. de Jonquières (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. IV, p. 508) (*).

II. Nous avons vu que si de trois points en ligne droite d'une courbe du troisième ordre on mène trois sécantes, les six points d'intersection sont sur une conique. Supposons, comme application de ce théorème, que des trois points d'intersection de la courbe avec une tangente on mène trois sécantes, que l'une d'elles soit tangente à la courbe en un point et que les deux autres sécantes qui sont confondues passent par ce point de contact, la conique passant par les six points sera une conique ayant avec la courbe un contact du troisième ordre en un point, du premier en un autre. Donc :

III. *Si d'un point d'une courbe du troisième ordre on mène les quatre tangentes distinctes de la tangente au point donné, on peut mener trois coniques ayant en l'un des points de contact un contact du troisième ordre avec la courbe et qui touchent la courbe en un autre point.*

C'est le théorème II énoncé à l'endroit cité. Ce deuxième point de contact s'obtient en joignant le point de contact de l'une des tangentes aux points de contact des trois autres tangentes et prenant le troisième point

(*) On ne tient pas compte, en énonçant ces résultats, des solutions singulières qn'introduit la présence soit d'un point double soit d'un point de rebroussement.

d'intersection de ces sécantes avec la courbe. Comme un point double diminue la classe de deux unités, un point de rebroussement de trois, il ne reste dans ces cas qu'une de ces coniques ou aucune.

Revenons au cas général et considérons les points de contact des coniques ayant un contact du troisième ordre avec la courbe en l'un des points de contact des quatre tangentes menées d'un point O de la courbe; ces points sont par groupes de deux sur des droites qui concourent au point O. En effet, les points de contact des quatre tangentes sont sur la conique polaire du point O, conique tangente en O à la courbe. Si l'on prend les intersections avec la courbe de la tangente au point O, de la sécante joignant deux des points de contact des tangentes et de celle qui joint les deux autres, les trois points d'intersection sont en ligne droite, d'après la réciproque évidente du théorème I. Ce résultat ressortait encore du théorème de M. Chasles cité au bas de la page 505, en considérant parmi les coniques passant par les quatre points de contact des tangentes : 1° la conique polaire; 2° les coniques composées de deux droites joignant deux à deux les points de contact des tangentes. On peut encore appliquer le théorème 1°, et l'on a cet énoncé :

IV. *Supposons que d'un point* O *d'une courbe du troisième ordre on mène les quatre tangentes distinctes de la tangente au point* O. *On peut, en chacun des points de contact de ces tangentes, mener une conique ayant en ce point un contact du quatrième ordre avec la courbe; ces coniques la rencontrent encore en un sixième point. Ces points, joints aux points de contact correspondants, forment quatre droites qui passent par le point où la tangente au point* O *rencontre la courbe du troisième ordre.*

V. On peut encore tirer du théorème 1° la conclusion connue qui suit :

Les vingt-sept points de contact des tangentes menées des points d'inflexion à la courbe jouissent de cette propriété qu'une conique peut y avoir avec la courbe un contact du cinquième ordre.

Nota. — On pouvait encore arriver à trouver le nombre des coniques ayant avec une courbe du troisième ordre deux contacts du second ordre dont l'un en un point donné. Il suffit de rappeler que lorsqu'une sécante rencontre une courbe algébrique, si ρ est rayon de courbure en un des points d'intersection, α l'angle de la sécante avec la normale, on a

$$\sum \frac{1}{\rho \cos^3 \alpha} = 0.$$

(Mannheim.)

Si la sécante passe par un point d'inflexion et que l'on imagine, ce qui est toujours possible, une conique osculatrice en l'un des points d'intersection et tangente en l'autre, cette conique sera, d'après la relation, osculatrice au second point. On tirera les mêmes conclusions que précédemment.

On peut enfin déduire de cette étude une propriété des surfaces du troisième ordre.

Par une droite donnée on mène les douze plans tangents à une surface du troisième ordre. Il existe pour chaque point de contact onze surfaces du second ordre osculatrices en ce point à la surface, tangentes en un autre et telles, que suivant les trois droites qui joignent le point de contact aux points d'intersection de la surface avec la droite donnée, les deux surfaces ont un contact du troisième ordre.

Les seconds points où les surfacee se touchent s'obtiennent en prenant les intersections avec la surface des droites joignant deux points de contact des plans tangents.

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 751

(voir 2ᵉ série, t. V, p. 48);

PAR M. ARMAND LEVY,
Élève du lycée de Metz.

La surface de révolution engendrée par une ellipse de Cassini tournant autour de son axe non focal est coupée par un plan bitangent suivant deux cercles.

En général, *si l'on coupe le tore par un plan parallèle à l'axe du tore, la surface engendrée par la révolution de la section plane ainsi obtenue autour de son axe* (parallèle à celui du tore) *sera coupée par un plan bitangent suivant deux cercles.* (DARBOUX.)

L'ellipse de Cassini est une courbe du quatrième degré ayant deux points doubles, les points où tous les cercles de son plan rencontrent la droite de l'infini; ces deux points, considérés comme symétriques par rapport à l'axe non focal, engendreront, par la rotation de la courbe, un parallèle double, courbe d'intersection de toutes les sphères avec le plan de l'infini. La section du tore par un plan bitangent a quatre points doubles, à savoir deux points sur le cercle de l'infini et les deux points de tangence; par ces quatre points et par un point quelconque de la courbe faisons passer une conique : elle coupe la courbe en un point, plus en quatre points doubles, c'est-à-dire en neuf points. Or une conique ne peut couper une courbe du quatrième degré qu'en huit points, à moins d'en faire partie; donc la conique fait partie de la section. La courbe étant du quatrième degré contient encore une autre conique ayant deux points sur le cercle de l'infini. La section est donc composée de deux coniques rencontrant la droite de l'infini aux mêmes points que tous les cercles du plan, c'est-à-dire de deux cercles.

Coupons le tore par un plan parallèle à son axe, la surface engendrée par la révolution de la section plane ainsi obtenue autour de son axe (parallèle à celui du tore) a un parallèle double à l'infini. Par la même démonstration que la précédente, on peut faire voir que la surface ainsi obtenue est coupée par un plan bitangent suivant deux cercles.

Note. — Autres solutions de MM. Marques Braga, Viant, élèves de l'École Polytechnique; Renaud, élève du lycée Louis-le-Grand.

Question 763;

PAR M. FERDINAND ROUX,
Élève du lycée de Nîmes.

Trouver la forme générale d'une fonction telle, que

$$(1)\quad \varphi(x+y)\varphi(x-y) = [\varphi(x)+\varphi(y)][\varphi(x)-\varphi(y)].$$

(J.-CH. DUPAIN.)

Si l'on différentie cette égalité par rapport à x, il vient

$$\varphi(x+y)\varphi'(x-y) + \varphi'(x+y)\varphi(x-y) = 2\varphi(x)\varphi'(x).$$

Différentiant celle-ci par rapport à y, on a

$$\varphi(x+y)\varphi''(x-y) - \varphi''(x+y)\varphi(x-y) = 0;$$

d'où

$$\frac{\varphi''(x-y)}{\varphi(x-y)} = \frac{\varphi''(x+y)}{\varphi(x+y)} = \text{const.}$$

Toute fonction qui vérifie l'équation (1) est donc du nombre de celles qui ont un rapport constant avec leurs dérivées secondes.

1° Celles pour lesquelles ce rapport est zéro sont de la forme

$$\lambda x + \mu,$$

puisque

$$\varphi'' = 0;$$

d'ailleurs une telle fonction vérifie l'équation (1) si $\mu = 0$.

2° Si u et v sont deux fonctions qui satisfassent à la condition

$$\varphi''(x) = a\varphi(x),$$

$\lambda u + \mu v$ la vérifiera évidemment; ce sera donc la forme la plus générale des fonctions qui la vérifient, puisque cette condition ne laisse indéterminés que deux coefficients de leurs développements en séries, à savoir $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.

Or on connaît deux solutions immédiates $e^{x\sqrt{a}}$, $e^{-x\sqrt{a}}$, donc

$$\varphi(x) = \lambda e^{x\sqrt{a}} + \mu e^{-x\sqrt{a}}.$$

Substituons cette valeur dans l'équation (1), en posant

$$e^{(x+y)\sqrt{a}} = p, \quad e^{(x-y)\sqrt{a}} = q,$$

il vient, après réduction,

$$(\lambda\mu + \lambda^2)\frac{p}{q} + (\lambda\mu + \mu^2)\frac{q}{p} = 0,$$

ce qui ne peut se réduire à une identité que si l'on a

$$\text{ou} \quad \lambda = 0 \quad \text{et} \quad \mu = 0, \qquad \text{ou} \quad \lambda = -\mu;$$

donc la forme générale qui résout le problème est

$$\lambda\left(e^{x\sqrt{a}} - e^{-x\sqrt{a}}\right).$$

Elle se décompose en deux autres : pour a positif $= m^2$,

$$\lambda\left(e^{mx} - e^{-mx}\right);$$

pour a négatif $= -m^2$, d'après le théorème d'Euler,

$$2\lambda\sqrt{-1}\sin mx.$$

On a donc les trois types

$$\lambda x, \quad \lambda\left(e^{mx} - e^{-mx}\right), \quad \lambda \sin mx.$$

Note. — Cette question, qui dépend au fond de l'intégration d'une équation aux différentielles partielles, a été résolue en outre à peu près de la même manière par MM. Niébylowski, élève de l'École Normale; Haag, ingénieur des Ponts et Chaussées; Bignon, de Lima. M. C. Laduron, de Liége, emploie le développement en série, et n'obtient sous forme finie qu'une solution particulière.

Question 778;

PAR M. G.-R. MAFFIOTTI,
Élève de M. Genocchi, à Turin.

Si l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de celle-ci

$$af(x) + bf'(x) + cf''(x) + \ldots = 0,$$

les constantes a, b, c étant telles, que l'équation

$$a + bz + cz^2 + \ldots = 0$$

n'ait que des racines réelles.

On sait que si les racines de $\varphi(x) = 0$ sont toutes réelles, l'équation

$$\varphi(x) - \alpha\varphi'(x) = 0$$

n'aura que des racines réelles, α étant une quantité réelle arbitraire. J'applique ce théorème à l'équation $f(x) = 0$, en donnant à α la valeur x_1, et j'obtiens l'équation

$$f(x) - x_1 f'(x) = 0,$$

qui aura toutes ses racines réelles; le même principe appliqué à cette dernière équation, en donnant à α la valeur x_2, donne l'équation

$$f(x) \left.\begin{array}{l} -x_1 \\ -x_2 \end{array}\right| f'(x) + x_1 x_2 f''(x) = 0,$$

qui aura aussi toutes ses racines réelles. On obtient avec le même procédé, en donnant à α la valeur x_3, l'équation à racines réelles

$$f(x) \left.\begin{array}{l} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{array}\right| f'(x) \left.\begin{array}{l} +x_1 x_2 \\ +x_1 x_3 \\ +x_2 x_3 \end{array}\right| f''(x) - x_1 x_2 x_3 f'''(x) = 0,$$

et ainsi de suite. La loi d'après laquelle se forment les coefficients de $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$ dans ces équations et dans celles qu'on en déduirait en appliquant successivement le théorème énoncé ci-dessus est évidente. Ces coefficients sont ceux qu'aurait une équation dont les racines seraient $x_1, x_2, x_3, \ldots$. De sorte que, après avoir appliqué m fois le théorème [je supposerai que m est le degré de $f(x)$], j'arriverai à une équation de la forme

$$f(x) - \Sigma x_1 f'(x) + \Sigma x_1 x_2 . f''(x) - \ldots \pm x_1 x_2 \ldots x_m f^m(x) = 0,$$

et cette équation aura toutes ses racines réelles. Il est clair maintenant que pour rendre cette équation identique avec l'équation (1) il suffit que les quantités arbitraires x_1, x_2,..., x_m soient prises égales aux réciproques des m racines de l'équation (2). Le théorème est donc démontré.

Question 779;

PAR M. G.-R. MAFFIOTTI,
Élève de M. Genocchi, à Turin.

Supposant toujours que l'équation

$$(1) \qquad a + bz + cz^2 + \ldots = 0$$

ait toutes ses racines réelles, je fais

$$\frac{1}{a + bz + cz^2 + \ldots} = A + Bz + Cz^2 + \ldots;$$

cela admis, je dis que si l'équation $f(x) = 0$ *a toutes ses racines imaginaires, il en est de même de*

$$(2) \qquad Af(x) + Bf'(x) + Cf''(x) + \ldots = 0.$$

Si $f(x) = 0$ a toutes ses racines imaginaires, on sait qu'il en est de même de

$$f(x) + \alpha f'(x) + \alpha^2 f''(x) + \ldots + \alpha^m f^m(x) = 0$$

(c'est la question 777).

En suivant la même méthode que j'ai suivie dans la question précédente, j'applique à l'équation $f(x) = 0$ le théorème susdit, en prenant pour α la valeur x_1; j'applique ensuite le même théorème à l'équation résultante, en prenant pour α la valeur x_2, et ainsi de suite. Après m de ces opérations [m étant le degré de $f(x)$], j'arriverai à une équation qui aura toutes les racines imaginaires, et qui sera de la forme

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} f(x)+S_1 f'(x)+[S(x_1 x_2)+S_2]f''(x) \\ \qquad +[S(x_1 x_2 x_3)+S(x_1^2 x_2)+S_3]f'''(x)+\ldots=0, \end{array}\right.$$

où $S_p = x_1^p + \ldots + x_m^p$, et $S(x_1 x_2)$, $S(x_1 x_2 x_3)$, $S(x_1^2 x_2)\ldots$ sont les fonctions symétriques à deux, trois,... lettres de x_1, $x_2,\ldots,x_m$.

On démontrerait simplement cette formule, si cela était nécessaire, en faisant voir qu'elle est vraie pour $n+1$ facteurs, si elle est vraie pour n; cela suffirait, puisqu'elle est vérifiée pour $n=1, 2,\ldots.$

Voyons maintenant s'il est possible de trouver pour x_1, $x_2,\ldots, x_m$ des valeurs réelles telles, que les coefficients de l'équation (3) soient identiques avec les coefficients de l'équation (2).

Si z_1, $z_2,\ldots, z_m$ sont les m racines de l'équation (1), on aura par hypothèse

$$\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\ldots(z-z_m)} = A + Bz + Cz^2 + \ldots.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{1}{z-z_1} = -\frac{1}{z_1}\left(1+\frac{1}{z_1}z+\frac{1}{z_1^2}z^2+\ldots\right),$$

$$\frac{1}{z-z_2} = -\frac{1}{z_2}\left(1+\frac{1}{z_2}z+\frac{1}{z_2^2}z^2+\ldots\right),$$

$$\frac{1}{z-z_3} = -\frac{1}{z_3}\left(1+\frac{1}{z_3}z+\frac{1}{z_3^3}z^2+\ldots\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{z-z_m} = -\frac{1}{z_m}\left(1+\frac{1}{z_m}z+\frac{1}{z_m^2}z^2+\ldots\right).$$

Donc, en multipliant membre à membre,

$$\begin{aligned}
&A + Bz + Cz^2 + \ldots \\
&= \frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_m} \left\{ 1 + zS_1 + z^2 \left[S\left(\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}\right) + S_2 \right] \right. \\
&\qquad \left. + z^3 \left[S\left(\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}\frac{1}{z_3}\right) + S\left(\frac{1}{z_1^2}\frac{1}{z_2}\right) + S_3 \right] + \ldots \right\}.
\end{aligned}$$

Cette équation devant être identique, puisque les deux membres représentent également le développement d'une même fonction suivant les puissances ascendantes de la variable, on aura

$$A = \frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_m},$$

$$B = \frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_m} S_1,$$

$$C = \frac{1}{z_1 z_2 \ldots z_m} \left[S\left(\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}\right) + S_2 \right], \ldots,$$

d'où l'on conclut que pour rendre l'équation (3) identique avec l'équation (2) il suffit de prendre pour x_1, $x_2, \ldots, x_m$ les réciproques des m racines de l'équation (1).

C. Q. F. D.

Note. — Les questions 778 et 779 ont aussi été résolues par M. de Grossouvre.

Questions 782, 783 *et* 784

(voir 2ᵉ série, t. V, p. 480);

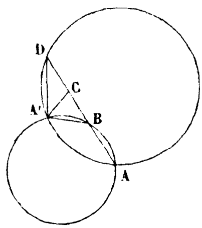
PAR M. ROBERT DURAND,

Élève du lycée de Caen (classe de M. Toussaint).

783. *Si une figure qui reste toujours semblable à une figure donnée se meut de manière que trois de ses droites passent par des points fixes, toute autre droite de la figure passera aussi par un point fixe.* (PETERSEN.)

LEMME. — *Si l'on prend sur une droite* ABD, *assujettie à passer par un des points* A *d'intersection de deux circonférences, un point* C *tel, que ses distances* CD, CB *aux points* B, D *où la droite coupe les deux circonférences soient dans un rapport constant k, ce point décrira une circonférence.*

FIG. 1.



En effet, soit A′ le second point d'intersection; menons A′D, A′C, A′B, on a

$$\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CD}} = k;$$

d'où

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}} = k + 1.$$

Le triangle A′BD étant toujours semblable à lui-même, puisque les angles A′DB, A′BD sont constants, donne

$$(2)\qquad \frac{\mathrm{A'D}}{\mathrm{BD}} = k',$$

et, en multipliant les égalités (1) et (2),

$$\frac{\mathrm{A'D}}{\mathrm{CD}} = (k+1)k' = \mathrm{C}.$$

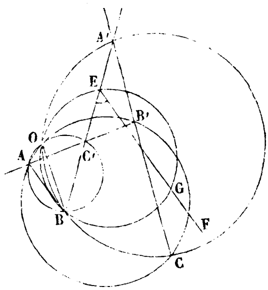
Ainsi le triangle A′CD a un angle constant A′DC compris entre deux côtés dont le rapport est constant : il est toujours semblable à lui-même ; par suite, l'angle A′CB est constant, et le point C décrit une circonférence de cercle passant par les points A, A′ communs aux deux premières circonférences, ce qui démontre le lemme.

Considérons maintenant trois droites A′C′, B′C′, A′B′ d'une figure satisfaisant aux conditions de l'énoncé, qui passent par trois points fixes B, A, C.

Dans le mouvement, le triangle formé par ces droites reste semblable à lui-même; les angles sont donc constants et ses sommets décrivent trois circonférences qui se coupent au point O.

En effet, soit O le point d'intersection des circonfé-

FIG. 2.



rences décrites sur AB, AC comme cordes, on a

$$\begin{aligned} AOB &= AC'B, \\ AOC &= AB'C, \\ \hline \text{retranchons} \quad BOC &= BA'C; \end{aligned}$$

donc O appartient à la circonférence décrite sur BC.

Une quatrième droite EF de la figure sera déterminée par le point E où elle coupe A′C′ et par l'angle C′EF qu'elle fait avec cette droite.

Or le rapport $\frac{EC'}{EA'}$ est invariable; donc, en vertu du lemme précédent, E décrit une circonférence passant par O et par B. Soit G le point où elle rencontre EF; l'arc BG mesure le double de l'angle constant C′EF : le point G est donc fixe et le théorème se trouve démontré.

2° En transformant la figure par la méthode des polaires réciproques, on obtient le théorème 782, savoir :

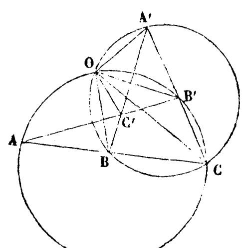
782. *Si une figure qui reste toujours semblable à une figure donnée se meut de manière que trois points décrivent des lignes droites, tout autre point de la figure décrira une ligne droite.* (Petersen.)

3° Si nous supposons les trois points A, B, C en ligne droite, la figure représente un quadrilatère complet et trois cercles circonscrits à trois des quatre triangles qui le composent : ces trois cercles passent par un même point. On en conclut par analogie que le cercle circonscrit au quatrième triangle B′C′A′ passe aussi par ce point. On pourrait le démontrer directement de cette manière

$$OB'C' = OB'A = OCA = OCB = OA'B = OA'C' ;$$

le quadrilatère OA′B′C′ est donc inscriptible; donc, etc. Les triangles qui ont pour sommet O et pour bases deux

Fig. 3.



côtés opposés du quadrilatère sont semblables puisqu'ils ont deux angles égaux chacun à chacun $OBC' = OCA'$, $OC'A' = OB'A'$ comme inscrits dans les mêmes segments. De là le théorème suivant :

784. *Si l'on ôte à un quadrilatère complet successivement chacun de ses côtés, les cercles circonscrits aux quatre triangles qu'on obtient passeront par un même point, et les triangles qui ont pour sommet ce point et pour bases les deux côtés opposés du quadrilatère seront semblables.* (PETERSEN.)

Note. — La question 784 a été résolue en outre par MM. Laisant; Driant; Victor Strekaloff, de l'Université de Saint-Pétersbourg; Lamiche, Laugier, du lycée Louis-le-Grand; Paul Besson, du lycée de Besançon; Moreau, du lycée Saint-Louis; Paul Vivier, du lycée de Strasbourg; de Villepin, du collége Stanislas; Welsch, du lycée de Metz; Thomas, du collége de Melun.

CORRESPONDANCE.

1. *M. Ch. Ruchonnet, de Lausanne.* — « Dans votre numéro de septembre dernier, vous avez publié un travail sur l'approximation, dans lequel l'auteur annonce : 1° *que la connaissance des m premiers chiffres d'un nombre suffit toujours pour en calculer la racine carrée avec m chiffres exacts quand la première tranche n'a qu'un chiffre, et, quand elle a deux chiffres, toutes les fois que le premier n'est point inférieur à* 4; 2° *que cette même connaissance suffit toujours pour calculer avec m chiffres exacts la racine cubique quand la première tranche a moins de trois chiffres, et, quand elle en a trois, toutes les fois que le premier n'est pas inférieur à* 3. Mais il y a moyen d'établir une formule de laquelle se déduisent *tous* les cas où l'on peut se borner à *m* chif-

fres du nombre considéré, ceux où il suffit d'en calculer $m - 1$, etc., en supposant toujours que la racine soit demandée avec m chiffres exacts. Cette formule est applicable d'ailleurs aux racines de tous les degrés.

» Remarquons d'abord que l'erreur relative qui affecte la racine $n^{ième}$ d'un nombre approché par excès est moindre que la $n^{ième}$ partie de l'erreur relative du nombre lui-même. Désignons ce dernier par a, et soit α l'erreur absolue qui affecte sa valeur approchée, laquelle sera par conséquent $a + \alpha$, puisque nous la supposons approchée par excès : l'erreur relative de la racine $n^{ième}$ est égale à

$$\frac{\sqrt[n]{a + \alpha} - \sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a}}.$$

Désignant $\sqrt[n]{a + \alpha}$ par x, $\sqrt[n]{a}$ par y, et multipliant haut et bas par la somme

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + y^{n-1},$$

le numérateur devient α; quant au dénominateur, il prend une valeur plus grande que na, et qui se réduit à na quand on fait $\alpha = 0$. L'erreur relative de $\sqrt[n]{a + \alpha}$ est donc moindre que $\frac{\alpha}{na}$, c'est-à-dire que la $n^{ième}$ partie de l'erreur relative de la valeur approchée de $a + \alpha$.

» Remarquons ensuite que l'erreur qui affecte la valeur approchée d'un nombre décimal est moindre qu'une unité de l'ordre de son $m^{ième}$ chiffre, lorsque l'erreur relative est inférieure à $\frac{1}{k \cdot 10^{m-1}}$, k désignant ce que devient le nombre quand on place la virgule à la suite de son premier chiffre significatif. Cela est évident. Concevons qu'on ait partagé a, à partir de la virgule, en tranches de n chiffres, et désignons par H ce que devient a quand on transporte la virgule à la suite de la première tranche à gauche, laquelle peut avoir moins de n chiffres : $\sqrt[n]{\mathrm{H}}$ est ce que devient $\sqrt[n]{a}$ quand on en transporte la virgule à la suite du premier chiffre significatif, et, par suite, l'erreur qui affecte la valeur approchée de $\sqrt[n]{a}$ est moindre qu'une unité de l'ordre de son $m^{ième}$ chiffre, si son erreur relative est inférieure à $\frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{H}}.10^{m-1}}$. Donc, d'après le théorème de tout à l'heure, pour que $\sqrt[n]{a}$ puisse être connu avec m chiffres exacts, il suffit que α satisfasse à l'inégalité

$$\frac{\alpha}{na} < \frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{H}}.10^{m-1}}.$$

» Elle a toujours lieu, si l'on a calculé $m+1$ chiffres de a; car alors $\frac{\alpha}{a}$, et à plus forte raison $\frac{\alpha}{na}$, est moindre que $\frac{1}{10^m}$, tandis que le second membre est plus grand que $\frac{1}{10^m}$, puisque $\sqrt[n]{\mathrm{H}}$ est plus petit que 10. Il suffit donc toujours de connaître $m+1$ chiffres d'un nombre pour calculer sa racine $n^{ième}$ avec m chiffres exacts. Cherchons les cas où l'on peut se borner à en calculer m, ou $m-1$, ou etc.

» Appelons p l'exposant de la puissance de 10 à laquelle appartiennent les plus hautes unités de a : p est positif ou négatif, selon que a est plus grand ou plus petit que l'unité, et il est égal à zéro, si a est compris entre 1 et 10. Il suffira des m premiers chiffres de a pour avoir $\sqrt[n]{a}$ avec m chiffres exacts, si l'inégalité précédente subsiste quand on y remplace α par 10^{p-m+1}, car cette puissance de 10 est une unité de l'ordre de celles que représente le $m^{ième}$ chiffre de a. Effectuant la substitution, puis multipliant les deux membres par 10^{m-1}, notre inégalité devient

$$\frac{10^p}{na} < \frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{H}}},$$

ou, en désignant par h la valeur que prend a quand on transporte la virgule à la suite du premier chiffre significatif,

$$\frac{1}{nh} < \frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{H}}}.$$

Chassant les dénominateurs et élevant les deux membres à la puissance n, on arrive à ce résultat que la connaissance des m premiers chiffres de a suffit toutes les fois qu'on a l'inégalité

$$(nh)^n > \mathrm{H}.$$

» Considérons en particulier les racines du second degré; il faut alors faire $n = 2$. La première tranche de a contient soit un, soit deux chiffres. Si elle n'en contient qu'un, on a

$$\mathrm{H} = h,$$

et l'inégalité précédente, résolue par rapport à h, devient

$$h > \frac{1}{4},$$

condition toujours satisfaite, puisque h est compris entre 1 et 10. Si la première tranche de a renferme deux chiffres, alors $\mathrm{H} = 10h$, et notre inégalité devient

$$h > \frac{10}{4} = 2,5.$$

Donc : *la connaissance des m premiers chiffres de a suffit toujours pour obtenir $\sqrt{a}$ avec m chiffres exacts lorsque la première tranche à gauche n'a qu'un chiffre,* *et, lorsqu'elle en a deux, toutes les fois que le nombre qu'elle forme n'est pas inférieur à* 25.

» Pour les racines cubiques, il faut faire $n = 3$, et la première tranche de a peut avoir un, deux ou trois chiffres. Si elle ne contient qu'un chiffre, on a $H = h$, et l'on a $H = 10h$ si elle en contient deux. L'inégalité ci-dessus, résolue par rapport à h, donne, dans le premier cas,

$$h > \sqrt{\frac{1}{27}},$$

et, dans le second,

$$h > \sqrt{\frac{10}{27}}.$$

Or, h étant par définition plus grand que 1, ces deux inégalités ont toujours lieu. Si la première tranche est formée de trois chiffres, alors $H = 100h$, et il vient

$$h > \frac{10}{\sqrt{27}} = 1,924\ldots\ldots$$

» Donc : *la connaissance des m premiers chiffres de a suffit pour obtenir* $\sqrt[3]{a}$ *avec m chiffres exacts lorsque la première tranche à gauche contient moins de trois chiffres, et, lorsqu'elle en contient trois, toutes les fois que le nombre formé par les premiers chiffres de a est, abstraction faite des virgules, supérieur à* $\frac{10}{\sqrt{27}}$, *soit à* 1924......

» Dans les racines des degrés supérieurs, il arrive souvent qu'on peut opérer avec moins de m chiffres de a. Par un raisonnement en tout semblable au précédent, on démontrera que la connaissance des $m-1$ premiers chiffres de a est suffisante pour obtenir $\sqrt[n]{a}$ avec m chiffres exacts lorsqu'on a l'inégalité

$$\left(n\frac{h}{10}\right)^n > \mathrm{H}.$$

Déjà, dans les racines de troisième degré, cette inégalité a lieu toutes les fois que la première tranche de a ne renferme qu'un chiffre, et que le nombre formé par les premiers chiffres de a est, abstraction faite des virgules, supérieur à $\sqrt{\frac{10}{27}}$, soit à 6085......

» Il faut remarquer que, puisque c'est une valeur de a approchée par excès qu'on emploie, quand on aura calculé les m premiers chiffres de sa racine $n^{\text{ième}}$, il n'y aura pas lieu d'augmenter le dernier chiffre d'une unité. »

2. *M. H. Picquet, sous-lieutenant du génie.* — « Dans l'article que vous avez inséré sous mon nom dans votre numéro du mois d'avril dernier, j'indiquais un moyen de simplifier quelquefois le résultat d'une transformation polaire, lorsque par suite de la transformation d'un cercle en une conique les énoncés venaient à perdre tout l'intérêt de la simplicité. Au lieu d'introduire cette conique dans le nouvel énoncé, le moyen consistait à introduire le cercle décrit sur le grand axe de cette conique comme diamètre, lequel satisfaisait à certaines conditions résultant de celles qui étaient imposées à la conique; j'ai donné des exemples d'une pareille simplification. J'ai résolu à ce propos une question donnée par M. Mannheim, qui me fait remarquer une chose bien évidente, c'est que :

» *Un cercle a pour polaire réciproque par rapport à un cercle une conique dont le cercle podaire par rapport au foyer résulte aussi de la transformation du premier cercle par rayons vecteurs réciproques.*

» Il n'est donc pas étonnant de voir des cercles ayant même centre radical se transformer en d'autres cercles jouissant de la même propriété dans la méthode de transformation que j'exposais. Dès lors, voici comment il faudra résoudre la question de M. Mannheim. Transformons toujours par polaires réciproques la propriété suivante :

» *Toutes les circonférences circonscrites aux triangles conjugués à une conique ont pour centre radical commun le centre de cette conique.*

» Les transformées de toutes ces circonférences seront des coniques confocales inscrites respectivement dans les triangles conjugués à une conique fixe; les cercles podaires de ces coniques par rapport au foyer commun seront les transformés par rayons vecteurs réciproques des premiers cercles, donc ils auront même centre radical, d'où suit l'énoncé de M. Mannheim. Quant à la détermination de ce point, elle reste toujours la même (2e série, t. V, p. 152). La démonstration n'exigeait donc pas la connaissance de la propriété suivante (2e série, t. V, p. 149) :

» *L'angle sous lequel on voit du foyer commun de deux coniques confocales les points de contact d'une tangente commune est égal à l'angle sous lequel se coupent les cercles décrits sur leurs grands axes respectifs comme diamètres.*

» Ce théorème n'en persiste pas moins comme propriété curieuse, et les considérations qui précèdent en donnent l'explication philosophique. La méthode de transformation persiste aussi, mais simplifiée, puisqu'on n'aura qu'à transformer par rayons vecteurs réciproques les propriétés des cercles considérés, pour avoir les propriétés correspondantes des cercles ayant pour diamètres les grands axes des coniques obtenues par transformation polaire. Tout ceci s'étend naturellement à l'espace.

» Pour faire voir combien la considération de la podaire d'une conique par rapport à un foyer simplifie quelquefois les questions, même sans l'intervention d'aucune transformation polaire, je pourrai, par exemple, résoudre la question suivante proposée dans le numéro de juillet dernier :

» *Les axes des paraboles qui ont pour foyer un point donné et qui passent par deux autres points donnés sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole qui a pour foyers les deux derniers points donnés et qui passe par le premier point.*

» Il a été démontré (p. 146) que lorsqu'une conique a pour foyer un point F et passe par deux points A et B, sa podaire par rapport au point F est tangente aux cercles décrits sur FA et sur FB comme diamètres. En supposant que la conique soit une parabole, on voit :

» 1° *Qu'il y a quatre paraboles ayant pour foyer un point donné et passant par deux points donnés : deux sont imaginaires, puisque les cercles se coupant au point* F *n'ont que deux tangentes communes ;* 2° *que les axes des deux paraboles réelles sont parallèles aux rayons de ces cercles qui aboutissent aux points de contact des tangentes communes.*

» Soient

$$\widehat{COO'} = \alpha, \quad OO' = d,$$

on a

$$\cos\alpha = \frac{R - r}{d}, \quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{d^2 - (R - r)^2}}{R - r}.$$

Considérons maintenant l'hyperbole ayant pour foyers les points A et B et qui passe par le point F ; elle a son centre en I, et l'angle que forment ses asymptotes avec AB est donné par

$$\tang\beta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{a}.$$

Or sa distance focale est $2d$, son grand axe $2(R - r)$; donc

$$\tang\beta = \frac{\sqrt{d^2 - (R - r)^2}}{R - r} = \tang\alpha, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \beta.$$

C. Q. F. D. »

PUBLICATIONS RÉCENTES.

(Tous les ouvrages annoncés se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

Note du Rédacteur. — Sous ce titre, nous nous proposons de donner la liste des ouvrages qu'on veut bien nous adresser et dont nous ne pouvons donner un compte rendu détaillé. Nous reviendrons, s'il y a lieu, sur quelques-uns de ces ouvrages dans notre Bulletin bibliographique, que nous reprendrons aussitôt que nous en aurons le loisir. Nous ferons connaître les titres des Mémoires insérés dans les Recueils scientifiques à partir du 1er janvier 1867. P.

PAINVIN. — *Théorie des surfaces polaires d'un plan.* In-8 de 198 pages; 1866. (Extrait des *Mémoires de la Société de Lille.*)

PONCELET. — *Traité des propriétés projectives des figures*, t. II. In-4 de VIII-452 pages; 6 planches; 1866.

Ce volume, qui termine la collection des œuvres de Mathématiques pures de l'illustre auteur, comprend : *Théorie des centres des moyennes harmoniques. — Théorie générale des polaires réciproques. — Analyse des transversales appliquée* *aux courbes et aux surfaces géométriques.* — *Divers Mémoires extraits du* Recueil de Gergonne, etc.

Poudra. — *Mémoire sur les trigones, tétragones, hexagones, etc.* In-8 de IV-32 pages; 1865.

Il s'agit des polygones curvilignes formés par les intersections mutuelles de diverses courbes d'un faisceau de courbes du même degré.

Poudra. — *Des réseaux.* In-8 de 16 pages; 1865.

Poudra. — *Théorie générale des faisceaux et des involutions, avec des applications aux tracés des courbes de différents ordres.* In-8 de 60 pages; 1865.

Poudra. — *Perspective-relief.* In-8 de 36 pages; 1 pl.; 1866.

Poudra. — *De l'involution plane.* — *Propriétés du tétraèdre polaire.* In-8 de IV-20 pages; 1866.

Castelnau. — *Cours de Mathématiques appliquées,* à l'usage des candidats aux emplois d'agents secondaires et de conducteurs des Ponts et Chaussées. Leçons préparatoires renfermant toutes les matières exigées, etc. — *Théorie.* 2 vol. gr. in-8 de XXIV-120 pages et de IV-208 pages. — *Pratique.* 2 vol. gr. in-8 de IV-60 pages et de IV-116 pages; 1866.

De Fabry, ancien élève de l'École Polytechnique. — *Discussion sur la manière dont est présenté ordinairement le premier principe du calcul différentiel, et proposition d'une explication nouvelle de ce principe.* In-8 de IV-76 pages; 1866.

L'auteur de cette brochure ne veut pas que la tangente soit la limite de la sécante, parce que, « pour qu'il y ait vraiment une variable avec une limite, il faut qu'il y ait entre la variable et sa limite une différence vraiment essentielle; de sorte qu'il y aurait contradiction à ce que l'une se confondît avec l'autre. »

Pour M. de Fabry, la dérivée est le quotient des valeurs zéro de Δy et Δx qui satisfont à l'équation

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0.$$

Delsaux, de la Compagnie de Jésus. — *Résumés de Physique mathématique : 1° Capillarité ; 2° Optique géométrique*. In-8 de x-64 pages et de viii-120 pages ; 1865-66.

Commencement d'une suite de monographies concises sur les principaux points de la Physique mathématique.

Ruchonnet. — *Exposition géométrique des propriétés générales des courbes ;* 2e édit. suivie d'un *Traité sur le calcul des incommensurables*. In-8 de 96 pages ; 4 pl. ; 1866.

QUESTIONS.

794. Démontrer qu'on a identiquement

$$X^2 Y + Y^2 Z + Z^2 U + U^2 X = 0,$$

en prenant

$$\begin{aligned} X &= x(xy - z^2) \\ Y &= x^3 - zy^2, \\ Z &= -y(xy - z^2), \\ U &= -(y^3 - zx^2). \end{aligned}$$

(Hermite.)

795. Soit

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots 2n} + \ldots,$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{x}{1.2.3} + \frac{x^2}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots 2n+1} + \ldots,$$

on propose de démontrer qu'en faisant successivement

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{x}[\varphi(x) - \varphi_1(x)],$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{x}[\varphi_1(x) - 3\varphi_2(x)],$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{x}[\varphi_2(x) - 5\varphi_3(x)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi_{i+2}(x) = \frac{1}{x}[\varphi_i(x) - (2i+1)\varphi_{i+1}(x)],$$

la fonction $\varphi_i(x)$ ne contiendra que des puissances positives de la variable, et d'en trouver l'expression.

(HERMITE.)

796. On propose de démontrer que la circonférence de l'ellipse, dont les axes sont $2a$ et $2b$, est égale à la circonférence du cercle dont le rayon R est déterminé par la formule

$$\begin{aligned} 4R = &\sqrt{a^2(2+\sqrt{2}) + b^2(2-\sqrt{2})} \\ &+ \sqrt{a^2(2-\sqrt{2}) + b^2(2+\sqrt{2})}, \end{aligned}$$

en négligeant seulement la huitième puissance de l'excentricité, et l'on demande de construire R.

(HERMITE.)

797. Démontrer que tout quadrilatère dans lequel les diagonales sont entre elles comme les produits des côtés qui comprennent ces diagonales est inscriptible dans un cercle.

798. Trouver dans une sinusoïde (transformée d'une ellipse quand on déroule un cylindre sur un plan) des arcs à différence rectifiable. Quelle est la courbe qui

pour la sinusoïde joue le même rôle que l'ellipse homofocale dans la théorie des arcs elliptiques à différence rectifiable.

799. L'enveloppe des droites coupant une cycloïde sous un angle constant est une cycloïde égale.

(Fouret.)

800. L'enveloppe des droites coupant une épicycloïde sous un angle constant est une épicycloïde semblable.

(Fouret.)

801 (*). Si $p_0, p_1, p_2, \ldots, q_0, q_1, q_2, \ldots$ sont des nombres entiers tels, que $\frac{p_n}{q_n}$ ait une limite finie ou nulle, la limite de la série $\frac{p_0}{q_0} - \frac{p_1}{q_0 q_1} + \frac{p_2}{q_0 q_1 q_2} - \ldots$ est une quantité incommensurable.

(G.-C. de Morgan, M. A.)

802. p et q désignant des nombres premiers respectivement des formes $18n + 5$ et $18n + 11$, il est impossible de décomposer en deux cubes, soit entiers, soit fractionnaires, aucun des nombres suivants :

$$p, \ 2p, \ 4p^2,$$
$$q^2, \ 2q^2, \ 4q.$$

(Sylvester.)

(*) Tiré du journal anglais *The educational Times*.

MOUVEMENTS RELATIFS A LA SURFACE DE LA TERRE;

PAR M. C.-E. PAGE,
Professeur à l'École d'Artillerie de Vincennes.

La terre tourne autour d'un axe ayant lui-même un mouvement de translation dans l'espace.

Nous savons que dans ce cas l'accélération relative d'un point en mouvement par rapport à la terre est la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération d'entraînement prise en signe contraire, enfin de l'accélération centrifuge composée.

Il nous faut d'abord déterminer l'accélération d'entraînement, c'est-à-dire l'accélération d'un point en repos par rapport à la terre. Cette accélération est la résultante de l'accélération centripète due au mouvement de rotation et d'une composante égale et parallèle à l'accélération dont l'axe est animé dans son mouvement de translation.

Or, les forces qui agissent sur tous les points de la terre et qui déterminent le mouvement de translation agissent nécessairement sur le point que l'on considère. Par suite, la composante due au mouvement de translation entre à la fois dans l'accélération absolue et dans l'accélération d'entraînement; cette dernière étant prise en signe contraire, la composante due au mouvement de translation disparaît. D'où l'on conclut que dans les mouvements relatifs à la surface de la terre on peut faire complétement abstraction du mouvement de translation. L'accélération d'entraînement se trouve réduite à l'accélération centripète, qui, prise en signe contraire, donne l'accélération centrifuge.

Le mouvement de rotation de la terre donne donc naissance à l'accélération centrifuge et à l'accélération centrifuge composée.

Toute accélération nous représente l'effet d'une force à laquelle elle est proportionnelle; par conséquent à toutes les autres forces qui sollicitent un corps en mouvement.

Sur la terre, il faut joindre deux nouvelles forces qui sont : la force centrifuge et la force centrifuge composée.

En appelant m la masse du corps, h la perpendiculaire abaissée du centre de gravité sur l'axe, la force centrifuge est dirigée suivant le prolongement de cette perpendiculaire et égale à $m.h.\omega^2$.

En appelant v la vitesse relative du corps, α l'angle que cette vitesse relative fait avec l'axe, $v.\sin\alpha$ est la composante de la vitesse perpendiculaire à l'axe, la force centrifuge composée est égale à $2.\omega.v.\sin\alpha$: elle est perpendiculaire à la fois à l'axe de rotation et à la composante $v.\sin\alpha$.

Pour bien préciser le sens dans lequel elle agit, couchez-vous suivant l'axe, les pieds au pôle sud, la tête au pôle nord : la terre tourne autour de vous de droite à gauche. Transportez-vous parallèlement à vous-même, de manière que vos pieds coïncident avec le centre de gravité du mobile, regardez dans le sens de la composante $v.\sin\alpha$: la force centrifuge composée est dirigée de gauche à droite.

Il nous reste à déterminer la vitesse angulaire ω. C'est la vitesse du point dont la distance à l'axe est de 1 mètre. La durée d'une révolution de la terre est ce qu'on nomme le *jour sidéral*, qui est de $23^h\,56^m\,4^s,1$ ou $86164^s,1$, d'où

$$\omega = \frac{2.\pi}{86164,1} = 0^m,000073.$$

Pesanteur.

La pesanteur est la force qui fait tomber les corps à la surface de la terre : c'est la résultante de l'attraction exercée par la terre et de la force centrifuge.

L'attraction varie avec la distance au centre de la terre ; la force centrifuge varie avec le rayon du parallèle : donc la pesanteur doit varier en grandeur et en direction avec le déplacement du corps.

Mais la distance moyenne de la surface au centre de la terre est d'environ 6376000 mètres; le rayon du parallèle, pour les points suffisamment éloignés du pôle, est aussi très-grand. Ainsi, à la latitude de Paris, il est d'environ 4780000 mètres; les déplacements que nous observons à la surface de la terre sont généralement très-petits relativement à ces dimensions. Par suite, nous pouvons admettre que dans toute l'étendue du déplacement la pesanteur conserve une intensité constante et une direction fixe.

Nous avons vu que, à toutes les autres forces qui agissent sur le mobile, il faut joindre la force centrifuge et la force centrifuge composée. Or, la combinaison de la force centrifuge avec la force d'attraction donne la pesanteur : donc, quand on tient compte de sa pesanteur, il suffit d'ajouter à toutes les autres forces la force centrifuge composée.

En appelant p le poids du corps, la force centrifuge composée a pour valeur

$$\frac{2.\omega.p}{g}.v.\sin\alpha = \frac{2.0,000073}{9,81}.p.v.\sin\alpha$$
$$= 0,0000148.p.v.\sin\alpha.$$

Ainsi, pour un corps pesant 1 kilogramme, la force centrifuge composée est égale à un poids de 148 dix-milligrammes multiplié par la composante $v.\sin\alpha$. En supposant cette composante de 500 mètres, ce qui est à peu près la plus grande vitesse que l'on imprime aux projectiles de l'artillerie, la force centrifuge composée est de $7^{gr},40$ par kilogramme.

Il ne faut pas oublier que dans tout ce qui précède on a supposé que le mobile était assez éloigné du pôle pour que les variations de la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité sur l'axe de rotation fussent négligéables; mais si l'on était très-rapproché du pôle, il faudrait tenir compte de ces variations. Nous reviendrons sur cette observation importante dans la discussion des problèmes.

Mouvement d'un corps assujetti à rester sur un plan horizontal.

Prenons pour axe des x une horizontale dirigée de l'ouest vers l'est;

Pour axe des y la trace horizontale du plan méridien dirigée du nord vers le sud;

Pour axe des z une verticale dirigée dans le sens de la pesanteur.

Représentons par λ la latitude : c'est l'angle que le plan horizontal fait avec l'axe de rotation.

En supposant le corps soumis seulement à l'action de la pesanteur et de la force centrifuge composée, les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega.\cos\lambda.\frac{dz}{dt} - 2\omega.\sin\lambda.\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega.\sin\lambda.\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -2\omega.\cos\lambda.\frac{dx}{dt} + g.$$

Le corps étant assujetti à rester sur le plan horizontal, on doit avoir

$$\frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

En représentant par R la résistance normale du plan, les équations deviennent

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega.\sin\lambda.\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega.\sin\lambda.\frac{dx}{dt},$$

$$0 = -2\omega.\cos\lambda.\frac{dx}{dt} + g - \frac{R}{m}.$$

Multipliant la première par dx, la seconde par dy, et ajoutant, il vient

$$\frac{dx}{dt}.d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}.d\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0.$$

Intégrant et déterminant la constante par la condition que la vitesse initiale soit égale à V, on a

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = V^2.$$

En intégrant chacune des deux premières équations séparement, et représentant par ψ l'angle que la vitesse initiale V fait avec l'axe des x, on a

$$\frac{dx}{dt} = V.\cos\psi - 2\omega.\sin\lambda.y,$$

$$\frac{dy}{dt} = V.\sin\psi - 2\omega.\cos\lambda.x.$$

Éliminant $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ entre ces deux équations et la précédente, on en tire

$$\left(y - \frac{V.\cos\psi}{2\omega.\sin\lambda}\right)^2 + \left(x + \frac{V.\sin\psi}{2\omega.\sin\lambda}\right)^2 = \frac{V^2}{4\omega^2.\sin^2\lambda};$$

c'est l'équation d'une circonférence dont le rayon est égal à

$$\frac{V}{2\omega.\sin\lambda},$$

et dont le centre a pour coordonnées

$$y_1 = \frac{V.\cos\psi}{2\omega.\sin\lambda}, \quad x_1 = -\frac{V.\sin\psi}{2\omega.\sin\lambda}.$$

En prenant $\sin\lambda = 0,75$, ce qui est à très-peu près la valeur correspondant à la latitude de Paris, on a

$$\frac{V}{2\omega.\sin\lambda} = \frac{V}{0,0001095} = 9132.V.$$

Par conséquent, sous la latitude de Paris, une bille lancée sur un billard de marbre, avec une vitesse de 1 mètre, au lieu de se mouvoir en ligne droite, tend à décrire une circonférence de 9132 mètres de rayon.

Si nous appelons ω' la vitesse angulaire avec laquelle le rayon tourne autour du centre, il est facile de voir que nous aurons

$$\omega' = 2\omega.\sin\lambda = 0,0001095.$$

Cette vitesse angulaire ω' est indépendante de la vitesse initiale V; de sorte qu'en supposant que le mouvement puisse se continuer, le corps décrirait toujours la circonférence entière dans le même temps et reviendrait au point de départ au bout de 57376 secondes.

En représentant par E le chemin parcouru dans le sens de la vitesse initiale V au bout du temps t;

Par d la déviation latérale à droite au bout du même temps t, nous aurons

$$E = \frac{V}{2\,\omega.\sin\lambda}.\sin\omega'.t, \quad d = \frac{V}{2\,\omega.\sin\lambda}(1 - \cos\omega' t).$$

Tant que l'arc $\omega'.t$ reste très-petit, nous pouvons développer $\sin\omega'.t$ et $\cos\omega'.t$ en séries très-convergentes. Si nous prenons le premier terme de chaque série, nous avons

$$E = V.t, \quad d = V.\omega\sin\lambda.t^2, \quad d = \frac{\omega.\sin\lambda}{V}E^2;$$

la force constante qui pousse le mobile vers la droite est

$$m.2\,\omega.\sin\lambda.v = \frac{2\,\omega.\sin\lambda}{g}.p.v = 0{,}0000111.p.v;$$

la troisième équation

$$0 = -2\,\omega.\cos\lambda.\frac{dx}{dt} + g - \frac{R}{m}$$

fait voir que la résistance R, c'est-à-dire la pression exercée par le mobile sur le plan horizontal, varie avec la direction de la vitesse. Lorsque le corps marche dans le sens du méridien, la pression R est justement égale au poids p; mais lorsqu'il marche de l'est à l'ouest, la pression est augmentée et devient

$$p\left(1 + \frac{2\,\omega.\cos\lambda}{g}.V\right).$$

Elle est diminuée de la même quantité quand le corps marche de l'ouest à l'est.

Sous l'équateur, $\sin\lambda = 0$; la force centrifuge composée devient perpendiculaire au plan horizontal; elle ne peut engendrer aucune déviation latérale, elle produit seulement des différences de pression suivant le sens du mouvement.

Au pôle, $\cos\lambda = 0$, la force centrifuge composée est dirigée dans le plan horizontal ; mais les formules trouvées en supposant le déplacement du corps insensible relativement à la longueur de la perpendiculaire abaissée de son centre de gravité sur l'axe ne sont plus applicables. Il faut nécessairement tenir compte des variations de la force centrifuge.

Prenant pour origine le pôle même ; pour axe des z, l'axe de la terre ; pour axes des x et des y, deux axes rectangulaires quelconques situés dans le plan horizontal, les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dy}{dt} + \omega^2.x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\frac{dx}{dt} + \omega^2.y,$$

$$0 = g - \frac{R}{m}.$$

Multipliant la première par dx, la seconde par dy, et ajoutant, il vient

$$\frac{dx}{dt}d.\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}d.\left(\frac{dy}{dt}\right) = \omega^2(x\,dx + y\,dy).$$

En intégrant et représentant par V la vitesse initiale, on a

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = V^2 + \omega^2(x^2 + y^2).$$

Multipliant la première par y, la seconde par x, puis retranchant la première de la seconde, on a

$$x\frac{d^2y}{dt} - y\frac{d^2x}{dt} = 2\omega(x\,dx + y\,dy);$$

en intégrant

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \omega(x^2 + y^2),$$

nous avons donc les deux équations

$$dx^2 + dy^2 = [V^2 + \omega^2 (x^2 + y^2)].dt^2,$$
$$x\,dy - y\,dx = \omega (x^2 + y^2).dt.$$

Éliminant dt entre ces deux équations, il vient

$$\frac{\omega (x\,dx + y\,dy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{V (x\,dy - y\,dx)}{x^2 + y^2}.$$

Cette équation s'intègre immédiatement. En remarquant que la direction de l'axe des x étant arbitraire, on peut toujours supposer qu'elle coïncide avec la direction de la vitesse initiale, on a

$$\omega \sqrt{x^2 + y^2} = V.\text{arc.}\left(\text{tang} = \frac{y}{x}\right).$$

C'est l'équation d'une spirale engendrée par un point glissant sur une droite, avec une vitesse constante V, tandis que cette droite tourne autour d'un point avec la vitesse angulaire constante ω.

En représentant par E le chemin parcouru dans le sens de la vitesse initiale au bout du temps t, par d la déviation à droite au bout du même temps, on a

$$E = V.t.\cos\omega.t, \quad d = V.t.\sin\omega.t.$$

En employant la formule trouvée précédemment, on aurait, pour les valeurs de ces mêmes quantités,

$$E = \frac{V}{2\omega}\sin 2\omega.t, \quad d = \frac{V}{2\omega}(1 - \cos 2\omega.t).$$

Tant que l'arc ωt est assez petit pour qu'on puisse se borner à prendre le premier terme du développement du sinus et du cosinus, on trouve dans les deux cas les mêmes valeurs pour E et pour d.

Mouvement d'un corps entièrement libre.

La force centrifuge composée étant toujours perpendiculaire à l'axe de rotation, on rendra les calculs plus faciles en prenant :

Pour axe des z une parallèle à l'axe de la terre dirigée du sud au nord ;

Pour axe des y le rayon du parallèle prolongé ;

Pour axes des x une horizontale dirigée de l'ouest à l'est.

En représentant toujours par λ l'angle que la verticale fait avec le plan du parallèle, les composantes de la pesanteur seront :

Suivant l'axe des y . . . . . $g.\cos\lambda$;
Suivant l'axe des z . . . . . $g.\sin\lambda$.

Le mobile étant entièrement libre et soumis seulement à l'action de la pesanteur et de la force centrifuge composée, on aura les équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega.\frac{dy}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega.\frac{dy}{dt} - g.\cos\lambda, \tag{2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g.\sin\lambda. \tag{3}$$

Ces trois équations s'intègrent immédiatement, et, en représentant par U, U_1, U_2 les trois composantes de la vitesse initiale, on a

$$\frac{dx}{dt} = U - 2\omega.y,$$

$$\frac{dy}{dt} = U_1 + 2\omega.x - g.\cos\lambda.t,$$

$$\frac{dz}{dt} = U_2 - g.\sin\lambda.t.$$

Cette dernière équation s'intègre une seconde fois et donne

$$z = U_2 . t - \frac{1}{2} g . \sin\lambda . t.$$

Multipliant l'équation (1) par dx, et l'équation (2) par dy, puis ajoutant, il vient

$$\frac{dx}{dt} . d\left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt} . d\left(\frac{dy}{dt}\right) = - g . \cos\lambda . dy;$$

en intégrant,

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = U^2 + U_1^2 - 2g . \cos\lambda . y.$$

Remplaçant $\frac{dx}{dt}$ par sa valeur $(U - 2\omega . y)$, on en tire

$$dt = \frac{dy}{\sqrt{U_1^2 + 2(2\omega U - g . \cos\lambda) y - 4\omega^2 . y^2}}.$$

Pour intégrer cette expression, posons

$$2\omega . U - g . \cos\lambda = n$$

et

$$U_1^2 + 2n . y - 4\omega^2 . y^2 = (a + 2\omega y) . (b - 2\omega y),$$

puis

$$(a + 2\omega . y) = (b - 2\omega . y) . z^2,$$

nous aurons

$$\omega . dt = \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

En intégrant et posant

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = k,$$

il vient

$$\omega . t = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = z) - \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = k),$$

d'où

$$z^2 = \frac{(k + \operatorname{tang} \omega . t)^2}{(1 - k . \operatorname{tang} \omega . t)^2}.$$

Remplaçant z^2 par sa valeur, on en tire

$$2\omega . y = \frac{n}{2\omega} . (1 - \cos 2\omega . t) + U_1 \sin 2\omega . t).$$

Mettant cette valeur de $2\omega . y$ dans l'équation

$$\frac{dx}{dt} = U - 2\omega y,$$

et intégrant, on a

$$x = V . t - \frac{n}{2\omega}\left(t - \frac{\sin 2\omega . t}{2\omega}\right) + U_1 (\cos 2\omega . t - 1).$$

Le problème est complétement résolu, car, en remplaçant n par sa valeur, nous avons les coordonnées du mobile en fonction du temps au moyen des trois équations

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{4\omega^2}[g . \cos\lambda . (2\omega . t - \sin 2\omega . t) \\ &\qquad + 2\omega U \sin 2\omega . t + 2\omega U_1 (\cos 2\omega . t - 1)], \\ y &= \frac{1}{4\omega^2}[g . \cos\lambda . (\cos 2\omega . t - 1) \\ &\qquad + 2\omega U_1 \sin 2\omega . t - 2\omega U (\cos 2\omega . t - 1)], \\ z &= U_2 . t - \frac{g . \sin\lambda . t^2}{2}. \end{aligned}\right.$$

Il ne reste plus qu'à discuter ces équations.

Mouvement d'un corps tombant librement sans vitesse initiale.

En faisant $U = 0$, $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, les équations (A) se réduisent à

$$x = \frac{g.\cos\lambda.(2\omega.t - \sin 2\omega.t)}{4\omega^2},$$

$$y = \frac{g.\cos\lambda.(\cos 2\omega.t - 1)}{4\omega^2},$$

$$z = -\frac{g.\sin\lambda.t^2}{2}.$$

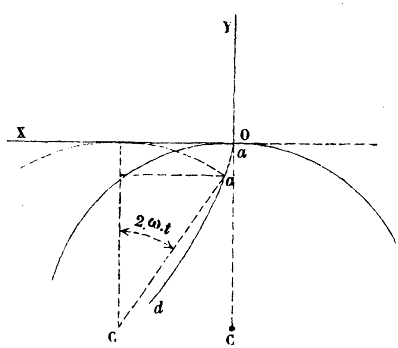
Les deux premières font voir que :

Quand un corps tombe librement, sans vitesse initiale, sa trajectoire relative se projette sur le plan du parallèle suivant un arc de cycloïde.

En effet, sur le prolongement de l'axe OY prenons une longueur

$$aC = \frac{g.\cos\lambda}{4\omega^2};$$

du point C comme centre, avec Ca pour rayon, décrivons une circonférence, puis faisons rouler cette circonférence sur l'axe OX avec une vitesse angulaire 2ω.



Le point a, fixe sur la circonférence et qui à l'origine coïncidait avec le point O, décrit la cycloïde ad, et au bout du temps t, les coordonnées du point a sont

$$x = \frac{g.\cos\lambda}{4\omega^2}.(2\omega.t - \sin 2\omega.t),$$

$$y = \frac{g.\cos\lambda}{4\omega^2}(\cos 2\omega.t - 1).$$

La seconde et la troisième équation représentent la projection de la trajectoire relative sur le plan du méridien.

Les composantes de la vitesse sont

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g.\cos\lambda}{2\omega}(1 - \cos 2\omega.t),$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{g.\cos\lambda}{2\omega}.\sin 2\omega.t,$$

$$\frac{dz}{dt} = -g.\sin\lambda.t.$$

En faisant usage de ces formules, il ne faut pas perdre de vue que les équations différentielles sont établies dans l'hypothèse d'un déplacement assez petit relativement aux dimensions de la terre, pour que l'intensité de la pesanteur puisse être regardée comme invariable dans l'étendue de ce déplacement. Il est nécessaire de déterminer les limites entre lesquelles cette hypothèse peut être admise.

D'après une formule connue, en représentant par R le rayon de la terre, par h la différence de hauteur, la variation de g correspondant à la hauteur h est donnée par l'expression

$$g.\frac{2h}{R}.$$

Or, la valeur moyenne de R est 6366000 mètres : il s'ensuit que pour une différence de hauteur de 3000 mètres, la valeur de g varie de près de $\frac{1}{1000}$.

En calculant pour la latitude de Paris le rayon de la circonférence qui engendre la cycloïde, on trouve

$$\frac{g.\cos\lambda}{4\omega^2} = 303743650 \text{ mètres.}$$

Cette circonférence roule avec la vitesse angulaire 2ω double de celle de la terre; elle ferait donc un tour entier en 43082 secondes. Par conséquent, elle décrit un quart de degré en $29^s,918$. Cette durée correspond à une hauteur de chute de 4380 mètres. Il s'ensuit que les formules ne doivent jamais être appliquées que pour des valeurs de t bien inférieures à 30 secondes.

La longueur de l'arc $2\omega.t$ doit donc toujours être moindre que $0^m,00438$.

L'arc $2\omega.t$ étant toujours très-petit, $\cos 2\omega.t$ et $\sin 2\omega.t$ peuvent être développés en séries très-convergentes. Nous arrêtant au terme

$$\frac{(2\omega.t)^5}{1.2.3.4.5},$$

nous aurons des valeurs exactes jusqu'à la vingt-sixième décimale; multipliant par le rayon qui est un nombre de neuf chiffres, nous pourrons pousser l'exactitude jusqu'à la seizième décimale.

En effectuant les développements, on a

$$x = \frac{g.\cos\lambda.\omega t^2}{3},$$

$$y = -\frac{g.\cos\lambda.t^2}{2} + \frac{g.\cos\lambda.\omega^2.t^4}{2.3},$$

$$z = -\frac{g.\sin\lambda.t^2}{2}.$$

Changeons les axes, et prenons :

Le nouvel axe des z dirigé suivant la verticale en sens contraire de la pesanteur ;

Le nouvel axe des y dirigé suivant la méridienne et du nord au sud;

L'axe des x restant le même.

Représentons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées rapportées aux nouveaux axes, nous avons

$$x_1 = x,$$
$$y_1 = y.\sin\lambda - z.\cos\lambda,$$
$$z_1 = z.\sin\lambda + y.\cos\lambda;$$

d'où

$$x_1 = \frac{1}{2}.g.t^2.\frac{2}{3}.\cos\lambda.\omega.t,$$

$$y_1 = \frac{1}{2}.g.t^2.\frac{1}{3}.\sin\lambda.\cos\lambda.\omega^2.t^2,$$

$$z_1 = -\frac{1}{2}.g.t^2\left(1 - \frac{1}{3}\cos^2.\lambda.\omega^2.t^2\right).$$

Le facteur $\frac{1}{2}.g.t^2$ est la hauteur de chute correspondant à l'hypothèse de l'immobilité de la terre. On voit qu'en tenant compte de la rotation, cette hauteur doit être un peu diminuée.

Le mobile est dévié vers l'est et vers le sud; mais cette dernière déviation est beaucoup plus faible que la première.

Pour la latitude de Paris et pour $t = 20$ secondes, on a

$$\frac{1}{2}g.t^2 = 1971^{\text{m}},60,$$
$$x_1 = 0,1266555,$$
$$y_1 = 0,0006931,$$
$$z_1 = 1971,5993900$$

NOTE SUR LA DIMINUTION DE LA CLASSE D'UNE COURBE;

Par M. L. PAINVIN.

1. Je ne m'occuperai, dans cette Note, que des points doubles.

Lorsque le point double est un point double ordinaire, c'est-à-dire ayant deux tangentes distinctes, la classe de la courbe se trouve diminuée de *deux* unités, et de deux unités seulement.

Lorsque le point double est un point de rebroussement, c'est-à-dire lorsque les deux tangentes coïncident, la diminution de la classe est, dans le cas le plus général, de *trois* unités; mais elle peut être supérieure à ce nombre.

Voici la proposition qu'on peut énoncer :

« Si la tangente de rebroussement a avec la » un contact proprement dit de l'ordre p, c'est-à-dire si » elle rencontre la courbe en $(p+2)$ points coïncidant » avec le point de rebroussement; si, en même temps, » cette tangente a, avec la première polaire d'un point » quelconque, un contact effectif de l'ordre $(p-k)$, » c'est-à-dire si elle rencontre la première polaire » en $(p-k+1)$ points coïncidents, la classe de la » courbe sera diminuée de

$$(p-k+2) \text{ unités};$$

» le nombre entier k peut varier depuis o jusqu'à $(p-1)$. »

Ainsi, lorsque la tangente de rebroussement a avec la courbe un contact effectif de l'ordre p, la diminution de la classe peut varier de 3 à $(p+2)$ unités. Je remarquerai que, lorsque la tangente de rebroussement a avec la courbe un contact effectif de l'ordre p, elle est en même temps tangente multiple de l'ordre p de multiplicité; dans le cas actuel, tous ses points de contact coïncident avec le point de rebroussement.

2. Pour établir cette proposition, je rappellerai d'abord que les points de contact des tangentes qu'on peut mener d'un point à une courbe sont donnés par les intersections de la courbe avec la première polaire du point; et lorsque la courbe possède un point double, les droites qui passent par le point double ne sont pas, quoique satisfaisant à la condition analytique du contact, des tangentes proprement dites.

Prenons le point de rebroussement pour origine et la tangente pour axe des y, puis rendons homogène l'équation de la courbe en représentant les coordonnées d'un point par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$. Nous admettrons que le terme en z^{m-p-1} soit le premier à partir duquel tous les termes renferment, jusqu'au dernier, le facteur x; le dernier terme sera $z^{m-2}x^2$, puisque l'origine O est le point de rebroussement et que la tangente est Oy. Nous supposerons, en second lieu, que le terme en $z^{m-p+k-1}$ soit le premier à partir duquel le facteur x entre dans tous les termes, jusqu'au dernier, avec un exposant au moins égal à 2; le terme qui précède, en $z^{m-p+k-2}$, ne contient le facteur x qu'à la première puissance; quant aux termes qui précèdent celui-ci, ils renferment le facteur x à des puissances quelconques égales ou supérieures à l'unité. En mettant ces diverses circonstances en évidence, l'équation de la courbe pourra s'écrire :

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
C = {} & \varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x, y) + \ldots + z^{m-p-2}\varphi_{p+2}(x, y) \\
& + z^{m-p-1}x^i\varphi_{p-i+1}(x, y) + z^{m-p}x^j\varphi_{p-j}(x, y) + \ldots \\
& + z^{m-p+k-2}x\varphi_{p-k+1}(x, y) \\
& + z^{m-p+k-1}x^{i_1}\varphi_{p-k-i_1+1}(x, y) \\
& + z^{m-p+k}x^{i_2}\varphi_{p-k+i_2}(x, y) + \ldots \\
& + z^{m-4}x^{i_h}\varphi_{4-i_h}(x, y) + z^{m-3}x^2(Ax + By) \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + z^{m-2}x^2 = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les fonctions φ_i sont des fonctions homogènes en x et y et de degré i ; les exposants i, j de x, dans la seconde ligne, ont des valeurs égales ou supérieures à l'unité ; les exposants $i_1, i_2, \ldots i_h$ ont des valeurs égales ou supérieures à 2.

Le nombre entier k peut varier depuis zéro jusqu'à $(p - 1)$. Lorsque $k = 1$, tous les termes, à partir du terme en z^{m-p-1} exclusivement, renferment x avec un exposant au moins égal à 2 ; lorsque $k = p - 1$ l'avant-dernier terme ne contient le facteur x qu'à la première puissance.

Il est visible, d'après l'équation (1), que l'origine O est un point double de rebroussement pour la courbe C ; en outre, la tangente de rebroussement rencontre la courbe en $(p + 2)$ points coïncidant avec le point O, car pour $x = 0$ le premier membre de l'équation (1) est divisible par y^{p+2} ; et, comme l'origine O est un point double, la *tangente de rebroussement aura donc avec la courbe un contact effectif de l'ordre p*.

La première polaire d'un point (α, β, γ) du plan a pour équation

$$
\alpha\frac{dC}{dx} + \beta\frac{dC}{dy} + \gamma\frac{dC}{dz} = 0,
$$

c'est-à-dire

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{P} = 0 = & \left[\alpha \frac{d\varphi_m}{dx} + \beta \frac{d\varphi_m}{dy} + \varphi\varphi_{m-1}(x,y)\right] + \ldots \\
& + \left[\alpha \frac{d\varphi_{p+2}}{dx} + \beta \frac{d\varphi_{p+2}}{dy} + (m-p-1)\, x^i \varphi_{p-i+1}(x,y)\right] z^{m-p-2} \\
& + z^{m-p-1}\left[\alpha x^i \frac{d\varphi_{p-i+1}}{dx} + \beta x^i \frac{d\varphi_{p-i+1}}{dy} + \gamma(m-p)\, x^j \varphi_{p-j}(x,y)\right. \\
& \qquad\qquad \left. + i\alpha x^{i-1} \varphi_{p-i+1}(x,y)\right] + \cdots \\
& + z^{m-p+k-2}\left[\alpha x \frac{d\varphi_{p-k+1}}{dx} + \beta x \frac{d\varphi_{p-k+1}}{dy}\right. \\
& \qquad\qquad + \gamma(m-p+k-1)\, x^{i_1} \varphi_{p-k+i_1+1}(x,y) \\
& \qquad\qquad \left. + \alpha \varphi_{p-k+1}(x,y)\right] \\
& + z^{m-p+k-1}\left[\alpha x^{i_1} \frac{d\varphi_{p-k-i_1+1}}{dx} + \beta x^{i_1} \frac{d\varphi_{p-k-i_1+1}}{dy}\right. \\
& \qquad\qquad + \gamma(m-p+k)\, x^{i_2} \varphi_{p-k-i_2}(x,y) \\
& \qquad\qquad \left. + i_1 \alpha x^{i_1-1} \varphi_{p-k-i_1+1}(x,y)\right] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + z^{m-4}\left[\alpha x^{i_h} \frac{d\varphi_{4-i_4}}{dx} + \beta x^{i_h} \frac{d\varphi_{4-i_h}}{dy} + \gamma(m-3)\, x^2(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)\right. \\
& \qquad\qquad \left. + i_h \alpha x^{i_h-1} \varphi_{4-i_4}(x,y)\right] \\
& + z^{m-3}[\alpha x^2.\mathrm{A} + \beta x^2.\mathrm{B} + \gamma(m-2)\, x^2 + 2\alpha x(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y)] + z^{m-2}.2\alpha x.
\end{aligned}
\right.
$$

Le point O est un point simple pour la première polaire d'un point *quelconque*, la tangente est la droite Oy. En faisant $x = 0$, on constate que le premier membre de l'équation (2) est divisible par y^{p-k+1} ; car le terme du moindre degré en y provient de $\varphi_{p-k+1}(0, y)$; et, d'après les hypothèses admises, $\varphi_{p-k+1}(x, y)$ ne renferme pas le facteur x. Ainsi la droite Oy rencontre la première polaire en $(p-k+1)$ points coïncidant avec le point O; *la tangente de rebroussement a donc avec la première polaire d'un point quelconque un contact effectif du* $(p-k)^{ième}$ *ordre.*

Il est facile de voir que, si à partir du terme en z^{m-p-1} inclusivement, tous les termes de l'équation (1) renferment le facteur x avec un exposant au moins égal à 2, la droite Oy a, avec la première polaire P, un contact effectif du $p^{ième}$ ordre ; car alors le dernier terme $\varphi_{p-k+1}(x,y)$ de la troisième ligne disparaîtra, et tous les termes de l'équation (2) s'annuleront jusqu'au terme en z^{m-p+2} exclusivement.

Ce cas particulier se déduit évidemment de l'expression précédente $(p-k)$, en y supposant $k=0$; on peut ainsi regarder le nombre entier k comme variant de zéro à $(p-1)$.

Il résulte de ces considérations que la courbe C et la première polaire P ont $(p-k+2)$ points communs coïncidant avec le point O, savoir : deux points provenant de ce que la polaire P passe par le point double de la courbe, et $(p-k)$ points provenant de l'ordre du contact, c'est-à-dire $(p-k)$ points communs consécutifs sur la direction Oy.

Donc, *le nombre des tangentes proprement dites ou la classe de la courbe de* C *est diminuée de*

$$(p-k+2) \text{ unités.}$$

3. J'ai dit que *la tangente de rebroussement, qui a avec la courbe un contact effectif de l'ordre p, était une tangente multiple de l'ordre p de multiplicité.*

Pour le démontrer, rappelons la définition des tangentes multiples :

Une tangente est multiple de l'ordre p lorsque, parmi les tangentes menées à la courbe d'un point *quelconque* de cette droite, il y a toujours p tangentes coïncidant avec la droite considérée.

Déterminons ce nombre dans le cas de la tangente Oy; pour cela, il nous faut étudier l'intersection de la courbe C avec la première polaire d'un point quelconque de la droite Oy. Or, la première polaire d'un point quelconque de Oy se déduira de l'équation (2) en y supposant $\alpha = 0$; on trouve ainsi

$$
\left\{
\begin{aligned}
P' = 0 = & \left[\beta \frac{d\varphi_m}{dy} \gamma \varphi_{m-1}(x, y)\right] + \ldots \\
& + \left[\beta \frac{d\varphi_{p+2}}{dy} + (m-p-1)\, x^i \varphi_{p-i+1}(x, y)\right] z^{m-p-2} \\
& + z^{m-p-1}\left[\beta x^i \frac{d\varphi_{p-i+1}}{dy} + \gamma (m-p)\, x^j \varphi_{p-j}(x, y)\right] + \ldots \\
& + z^{m-p+k-2}\left[\beta x \frac{d\varphi_{p-k+1}}{dy} + \gamma (m-p+k-1)\, x^{i_1} \varphi_{p-k-i_1+1}(x, y)\right] \\
& + z^{m-p+k-1}\left[\beta x^{i_1} \frac{d\varphi_{p-k-i_1+1}}{dy} + \gamma (m-p+k)\, x^{i_2} \varphi_{p-k+i_2}(x, y)\right] \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + z^{m-4}\left[\beta x^{i_h} \frac{d\varphi_{4-i_4}}{dy} + \gamma (m-2)\, x^2 (Ax + By)\right] \\
& + z^{m-3}[\beta B + \gamma (m-2)]x^2.
\end{aligned}
\right. \tag{3}
$$

Le point O est aussi un point de rebroussement pour la polaire P′, et Oy est la tangente de rebroussement.

Pour reconnaître quel est le nombre des points coïncidant avec O et communs aux deux courbes C ou (1) et P′ ou (3), rappelons d'abord ce fait dont il est facile de se rendre compte :

Si deux courbes ont un point double commun et les mêmes tangentes distinctes en ce point double; si, en outre, ces tangentes ont, avec l'une des courbes, la première un contact effectif de l'ordre I, la deuxième un contact effectif de l'ordre J, et que, pour les branches correspondantes de la seconde courbe, les ordres de contact effectif de ces tangentes soient au moins égaux à I et J, les deux courbes en question auront

$$(4 + \mathrm{I} + \mathrm{J})$$

points communs et coïncidant avec le point double.

Prenons maintenant deux courbes ayant en commun un point *double ordinaire* avec tangentes communes, et donnant comme cas particuliers les deux courbes (C) et (P'); puis cherchons le nombre des points communs à ces deux courbes et coïncidant avec l'origine.

Or, les équations des deux courbes (C) et (P') seront évidemment données par les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_1 = 0 = {} & \varphi_m(x, y) + z\varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + z^{m-p-2}\varphi_{p+2}(x, y) \\
& + z^{m-p-1} x^i \varphi_{p-i+1}(x, y) + z^{m-p} x^j \varphi_{p-j}(x, y) + \ldots \\
& + z^{m-p+k-2} x \varphi_{p-k+1}(x, y) \\
& + z^{m-p+k-1} x^{i_1-1}(x - \lambda y)\varphi_{p-k-i_1+1}(x, y) \\
& + z^{m-p+k}(x^{i_2-1}(x - \lambda y)\varphi_{p-k-i_2}(x, y) + \ldots \\
& + z^{m-4} x^{i_h-1}(x - \lambda y)\varphi_{4-i_h}(x, y) \\
& + z^{m-3} x(x - \lambda y)\mathrm{A}x + \mathrm{B}y) + z^{m-2} x(x - \lambda y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}'_1 = 0 = {} & \left[\beta \frac{d\varphi m}{dy} + \gamma\varphi_{m-1}(x,y)\right] + \ldots \\
& + \left[\beta \frac{d\varphi_{p+2}}{dy} + (m - p - 1)x^i \varphi_{p-i+1}(x,y)\right] z^{m-p-2} \\
& + z^{m-p-1}\left[\beta x^i \frac{d\varphi_{p-i+1}}{dy} + \gamma(m - p)x^j \varphi_{p-j}(x, y)\right] + \ldots \\
& + z^{m-p+k+2}\left[\beta x \frac{d\varphi_{p-k+1}}{dy}\right. \\
& \qquad \left. + \gamma(m - p + k - 1)x^{i_1-1}(x - \lambda y)\varphi_{p-k-i_1+1}(x, y)\right]
\end{aligned}$$

$$+ z^{m-p+k-1}\left[\beta x^{i_1-1}(x-\lambda y)\frac{d\varphi_{p-k-i_1+1}}{dy}\right.$$
$$\left.+\gamma(m-p+k)x^{i_2-1}(x-\lambda y)\varphi_{p-k-i_2}(x,y)\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ z^{m-4}\left[\beta x^{i_h-1}(x-\lambda y)\frac{d\varphi_{4-i_h}}{dy}\right.$$
$$\left.+\gamma(m-2)x(x-\lambda y)(Ax+By)\right]$$
$$+ z^{m-3}[\beta B+\gamma(m-2)]x(x-\lambda y),$$

en y supposant λ nul.

Mais les deux courbes C_1 et P'_1 ont un point double commun, et les deux tangentes communes $x=0$, $x-\lambda y=0$. La première tangente $x=0$ a, avec la courbe C_1, un contact effectif de l'ordre p, et, avec la courbe P'_1, un contact effectif de l'ordre $(p-1)$; la deuxième tangente $x-\lambda y=0$ a, avec la courbe C_1, un contact effectif de l'ordre $(p-k)$, car elle la rencontre en $(p-k+2)$ points coïncidents, et, avec la courbe P'_1, un contact effectif de l'ordre $(p-k-1)$, car elle la rencontre en $(p-k+1)$ points coïncidents. Ainsi, dans le cas actuel, $I=p-1$, $J=p-k-1$; donc les deux courbes C_1 et P'_1 ont $(4+I+J)$ ou $(2p-k+2)$ points communs coïncidant avec l'origine O. J'ajouterai qu'il n'est pas possible de former les équations de deux courbes, telles que C_1 et P'_1, ayant un point double commun et même tangente, et possédant plus de $(2p-k+2)$ points communs coïncidant avec le point double, lorsqu'on impose en même temps à ces deux courbes la condition de donner, comme cas particulier, les courbes C et P'. Car la tangente $x=0$ a d'abord, avec les courbes C_1 et P'_1, le même contact respectif qu'avec les courbes C et P; quant à la tangente $x - \lambda y = 0$, elle ne peut pas avoir avec la courbe C_1 un contact d'ordre supérieur à $(p - k)$; car il faudrait pour cela introduire le facteur $(x - \lambda y)$ dans la fonction $\varphi_{p-k+1}(x, y)$; et alors, en supposant $\lambda = 0$, on trouverait x^2 comme facteur dans le terme en $z^{m-p+k-2}$, ce qui serait contraire aux hypothèses admises. On raisonnerait de même par la courbe P'_1.

Nous conclurons de là, en supposant $\lambda = 0$, que les deux courbes C et P' ont $(2p - k + 2)$ points communs coïncidant avec le point O.

Ainsi, le nombre des tangentes, distinctes de Oy, qu'on peut mener à la courbe d'un point quelconque de Oy, est diminué de $(2p - k + 2)$ unités; et si, de ce dernier nombre, nous retranchons le nombre $(p - k + 2)$ des tangentes non effectives qui correspondent à un point quelconque du plan, il reste p, c'est-à-dire que, parmi les tangentes effectives qu'on peut mener à la courbe d'un point quelconque de l'axe Oy, il y en a p qui coïncident avec la droite Oy. Donc la tangente de rebroussement est une tangente multiple de l'ordre p de multiplicité. Il est visible d'ailleurs que l'ordre de multiplicité ne peut pas être supérieur à p, puisque cette tangente n'a, avec la courbe C, qu'un contact effectif de l'ordre p.

4. Une remarque analogue se présente lorsqu'on suppose la classe de la courbe invariable, c'est-à-dire lorsqu'on se donne l'*équation tangentielle* de la courbe. Dans ce cas, c'est l'ordre de la courbe qui se trouve diminué par la présence d'une tangente double.

Une tangente double ordinaire, c'est-à-dire une tangente double dont les deux points de contact sont distincts, diminue l'ordre de la courbe de *deux* unités, et de deux unités seulement.

Lorsque les deux points de contact coïncident, c'est-à-dire lorsque la tangente double est une tangente d'inflexion, on peut énoncer la proposition suivante :

« Si, parmi les tangentes qu'on peut mener du point » d'inflexion à la courbe, il y en a $(p+2)$ coïncidant » avec la tangente d'inflexion (alors le point d'inflexion » est en même temps un point de rebroussement d'or- » dre p pour la courbe C); si, en outre, parmi les tan- » gentes qu'on peut mener du point d'inflexion de C à la » *première polaire d'une droite quelconque*, il y en » a $(p-k+1)$ coïncidant avec la tangente d'inflexion » (alors le point considéré est un point de rebroussement » d'ordre $(p-k)$ et non d'inflexion pour cette pre- » mière polaire), l'ordre de la courbe sera diminué de

$$(p-k+2) \text{ unités};$$

» le nombre entier k peut varier depuis zéro jusqu'à » $(p-1)$. »

Pour établir les diverses parties de cette proposition, il suffira d'interpréter les calculs précédents dans le système des équations tangentielles ; et nous considérerons x, y, z comme les distances d'une tangente quelconque de la courbe C aux trois sommets d'un triangle abc. Dans ce système, l'équation

$$\alpha\frac{dC}{dx}+\beta\frac{dC}{dy}+\gamma\frac{dC}{dz}=0$$

représente la première polaire d'une droite quelconque (α, β, γ) du plan.

Cette interprétation repose sur le théorème suivant, analogue à celui que j'ai démontré dans la théorie des surfaces polaires d'un plan, et que je ne ferai qu'énoncer :

« Le nombre des points de rencontre d'une droite » (α,β,γ) avec une courbe, donnée par son équation tan-

» gentielle, est égal au nombre des tangentes communes
» à la courbe et à la première polaire de la droite; ces
» tangentes touchent la courbe aux points où elle est
» rencontrée par la droite considérée. »

Ceci posé, nous voyons, par l'équation (1), que le sommet a du triangle abc appartient à la courbe C; que la droite ab ($x = 0$, $y = 0$) est une tangente double dont les deux points de contact coïncident, c'est-à-dire une tangente d'inflexion; et enfin que, par le point a, passent $(p + 2)$ tangentes coïncidant avec la droite ab.

L'équation (2) nous montre que le point a appartient aussi à la première polaire de la droite quelconque (α, β, γ); que la droite ab est une tangente simple, et enfin que par le point a passent $(p - k + 1)$ tangentes à la première polaire coïncidant avec la droite ab.

Or, les deux équations (1) et (2) ont en commun $(p - k + 2)$ solutions nulles ($x = 0$, $y = 0$); on peut se rendre compte de ce fait en se plaçant de nouveau dans le système des *coordonnées-point*.

Donc la courbe C et la première polaire P d'une droite quelconque ont $(p - k + 2)$ tangentes communes coïncidant avec la droite ab. Par conséquent, le point où la droite quelconque (α, β, γ) rencontre la ligne ab équivaut à $(p - k + 2)$ points d'intersection de cette droite avec la courbe C; mais ces points, quoique satisfaisant aux conditions analytiques qui expriment qu'un point appartient à une courbe, ne sont pas, à proprement parler, des points de la courbe C.

Donc, *l'ordre de la seconde courbe* C *est diminué de* $(p - k + 2)$ *unités*.

Je remarquerai, en outre, que le point a est un point de rebroussement d'ordre p pour la courbe C.

En effet, l'équation (3) est la première polaire d'une droite quelconque $(0, \beta, \gamma)$ passant par le point a; et comme, d'après la discussion du n° 3, les équations (1) et (3) ont en commun $(2p-k+2)$ solutions nulles $(x=0, y=0)$, il en résulte que cette droite rencontre la courbe C en $(2p-k+2)$ points coïncidant avec le point a. Mais, si de $(2p-k+2)$ on retranche $(p-k+2)$ (nombre des points improprement dits de la courbe auquel équivaut chaque point de la droite ab), il reste p; p est donc le nombre des points effectifs de la courbe coïncidant avec le point a. Ainsi, une droite quelconque passant par le point a y rencontre la courbe en p points effectifs coïncidents; d'ailleurs, la tangente est unique; le point a est donc un point de rebroussement d'ordre p pour la courbe C; il est en même temps un point d'inflexion.

Le même raisonnement, appliqué à la courbe P, nous montre que le point a est, pour la première polaire P, un point de rebroussement d'ordre $(p-k)$; mais il n'est plus, pour la courbe P, un point d'inflexion, car la droite ab est alors une tangente simple.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 673

(voir 2e série, tome II, page 479);

PAR M. LAISANT,
Lieutenant du génie.

Inscrire dans une parabole un triangle abc semblable à un triangle donné ABC, *et dont un des sommets a soit situé en un point donné sur la courbe. Cas particulier où le triangle* ABC *est équilatéral.*

Soit a le point donné sur la parabole donnée (*). J'appelle AB le plus petit des deux côtés AB, AC, et je mène par a une corde quelconque $a\beta$ que je considère comme homologue de AB. Je construis sur $a\beta$ un triangle semblable à ABC. Le problème a deux solutions et me donne deux sommets γ, γ_1 homologues à C. L'intersection des lieux géométriques de ces points γ, γ_1 avec la parabole fournira la solution de la question. Or, l'angle $\beta a \gamma$ est constant; le rapport $\frac{a\gamma}{a\beta} = \frac{AC}{AB}$ l'est aussi. Donc on obtient le lieu du point γ en réduisant tous les rayons $a\beta$ dans un même rapport et en faisant tourner tout d'une pièce la courbe obtenue de l'angle a, laquelle courbe est nécessairement une parabole. De même, le lieu de γ_1 est une parabole égale qui aurait tourné du même angle en sens contraire. Notre intention n'est point ici de développer le calcul, assez fastidieux du reste, auquel donne lieu la recherche des points communs. Nous ferons seulement observer que, suivant la position du point a sur la parabole donnée, et les valeurs de l'angle a et du rapport $\frac{AC}{AB}$, les paraboles γ, γ_1 peuvent couper chacune la parabole donnée en trois ou deux points, ou en un seul point (non compris le point a nécessairement commun). Le cas de deux points communs est particulier, car il suppose un contact. En résumé, le problème peut avoir depuis six solutions jusqu'à deux. Il peut même n'en avoir qu'une, s'il s'agit d'un triangle isocèle, et que l'angle $c_1 a c_2$, formé par les deux solutions obtenues, soit égal à l'angle A. Cela arrive lorsque le point a est le sommet.

Les paraboles γ, γ_1 sont plus petites que la parabole

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

donnée dans l'hypothèse $AC < AB$. Elles lui deviennent égales dans le cas d'un triangle isocèle. Dans le cas du triangle équilatéral, on a en outre $A = 60$ degrés; de sorte que les éléments du calcul sont fixés. Comme nous n'avons pu trouver de forme simple pour ce calcul, ni dans l'exposition, ni dans les résultats, nous nous arrêtons ici, ayant simplement montré à quelle question peut se ramener le problème.

Note. — Une remarque analogue à celle que fait M. Laisant servirait à mettre en équation le problème plus général : *Inscrire dans une courbe donnée un triangle semblable à un triangle donné.* Dans quel cas le problème relatif à la parabole est-il susceptible d'une construction par la règle et le compas? P.

Question 773

(voir 2ᵉ série, t. V, p. 884);

PAR M. ALFRED GIARD,
Elève du collége de Douai (classe de M. Painvin).

Étant donnée une équation réciproque $f(x) = 0$, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation en y, obtenue en posant

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

soit elle-même réciproque?

Je rappellerai d'abord que si l'on pose $x + \frac{1}{x} = y$, on a la relation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x^n + \frac{1}{x^n} &= y^n - ny^{n-2} + n\frac{n-3}{2}y^{n-4} - n\frac{(n-4)(n-5)}{2.3.}y^{n-6} + \ldots \\ &+ (-1)^p n\frac{(n-p-1)(n-p-2)\ldots(n-2p+1)}{2.3.p}y^{n-2p} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Cette formule a été établie dans les *Nouvelles Annales*, t. XX, 1861, p. 155.

Cela posé, considérons une équation de degré pair, dont les coefficients des termes équidistants des extrêmes soient égaux et de mêmes signes. Les autres cas se ramèneront au précédent par la suppression des racines $+1$ ou -1.

Soit donc l'équation

$$A_0 x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_{n-1} x^{n+1} + A_n x^n$$
$$+ A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0.$$

Divisons par x^n,

$$A_0\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) + A_1\left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) + \ldots + A_{n-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + A_n = 0.$$

Si l'on pose $x + \frac{1}{x} = y$, et que l'on développe les binômes de la forme $x^n + \frac{1}{x^n}$ d'après la formule (1), l'équation en y est

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + (A_2 - nA_0) y^{n-2} + [A_3 - (n-1)A_1] y^{n-3}$$
$$+ \left[A_4 - (n-2)A_2 + n\frac{n-3}{2}A_0\right] y^{n-4}$$
$$+ \left[A_5 - (n-3)A_3 + (n-1)\frac{n-4}{2}A_1\right] y^{n-5}$$
$$+ \left[A_6 - (n-4)A_4 + (n-2)\frac{n-5}{2}A_2 - n\frac{(n-4)(n-5)}{2.3}A_0\right] y^{n-6}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$
+\left\{\begin{aligned}
&A_{2k-1}-(n-2k+3)A_{2k-3}+(n-2k+5)\frac{n-2k+2}{2}A_{2k-5}\\
&\quad-(n-2k+7)\frac{(n-2k+2)(n-2k+3)}{2.3.}A_{2k-7}+\ldots\\
&\quad+(-1)^r(n-2k+2r+1)\\
&\qquad\times\frac{(n-2k+2)(n-2k+3)\ldots(n-2k+r)}{2.3\ldots r}A_{2k-2r-1}\pm\ldots\\
&\quad\pm(-1)^{k-2}(n-3)\frac{(n-2k+2)(n-2k+3)\ldots(n-k-2)}{2.3\ldots(k-2)}A_3\\
&\quad+(-1)^{k-1}(n-1)\frac{(n-2k+2)\ldots(n-k-1)}{2\ldots(k-1)}A_1
\end{aligned}\right\}y^{n-2k+1}
$$

$$
+\left\{\begin{aligned}
&A_{2k}-(n-2k+2)A_{2k-2}+(n-2k+4)\frac{n-2k+1}{2}A_{2k-4}\\
&\quad-(n-2k+6)\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{2.3}A_{2k-6}+\ldots\\
&\quad+(-1)^r(n-2k+2r)\\
&\qquad\times\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)\ldots(n-2k+r-1}{2.3\ldots r}A_{2k-2r}+\ldots\\
&\quad+(-1)^{k-1}(n-2)\frac{(n-2k+1)(n-2k+2)\ldots(n-k-2}{2.3\ldots(k-1)}A_2\\
&\quad+(-1)^k n\frac{(n-2k+1)\ldots(n-k-1)}{2\ldots k}A_0
\end{aligned}\right\}y^{n-2k}
$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$
\begin{aligned}
&+[A_{n-1}-3A_{n-3}+5A_{n-5}-7A_{n-7}+\ldots\\
&\quad+(-1)^r(2r+1)A_{n-2r-1}+\ldots\pm(n-3)A_3\mp(n-1)A_1]y\\
&+[A_n-2A_{n-2}+2A_{n-4}\ldots+(-1)^rA_{n-2r}+\ldots\pm2A_2\mp2A_0]=0.
\end{aligned}
$$

Pour écrire les derniers termes nous avons supposé n pair. Si n était impair, on aurait :

$$
\begin{aligned}
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+[A_{n-1}-3A_{n-3}+5A_{n-5}+\ldots\\
&\quad+(-1)^r(2r+1)A_{n-2r-1}+\ldots\pm(n-2)A_2\mp nA_0]y\\
&+[A_n-2A_{n-2}+2A_{n-4}\ldots\\
&\qquad+(-1)^r2A_{n-2r}+\ldots\pm2A_3\mp2A_1]=0.
\end{aligned}
$$

Pour exprimer que cette équation est réciproque si elle est de degré impair, nous écrirons que les coefficients des termes équidistants des extrêmes sont égaux et de mêmes signes, ou égaux et de signes contraires. Si elle est de degré pair, nous écrirons que ces coefficients sont égaux et de même signe, ou que le terme du milieu est nul et que les coefficients équidistants sont égaux et de mêmes signes, ou égaux et de signes contraires.

1. Soit $n = 2p$. Alors le nombre des termes est $2p+1$, il y a un terme du milieu en y^{n-p} et l'on a les conditions :

$$\begin{aligned} A_0 = A_n - 2A_{n-2} + 2A_{n-4}\ldots \\ + (-1)^r A_{n-2r} + \ldots \pm 2A_2 \mp 2A_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 = A_{n-1} - 3A_{n-3} + 5A_{n-5}\ldots \\ + (-1)^r A_{n-2r-1} + \ldots \pm (n-3) A_3 \mp (n-1) A_1, \end{aligned}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left\{\begin{aligned} & A_{p-1} - (n-p+3) A_{p-3} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (-1)^r (n-p+2r+1) \frac{(n-p+2)\ldots(n-p+r)}{2\ldots r} A_{p-2r-1} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \pm (n-3) \frac{(n-p+2)(n-p+3)\ldots\left(n-\dfrac{p}{2}-2\right)}{2.3\ldots\left(\dfrac{p}{2}-2\right)} A_3 \\ & \mp (n-1) \frac{(n-p+2)(n-p+3)\ldots\left(n-\dfrac{p}{2}-1\right)}{2.3\ldots\left(\dfrac{p}{2}-1\right)} A_1 \end{aligned}\right\}$$

$$
=\left\{\begin{array}{l}
A_{p+1}-(n-p+1)A_{p-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+(-1)^r(n-p+2r-1)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots(n-p+r-2)}{2\ 3\ldots r}A_{p-2r+1} \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm(n-3)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots\left(n-\frac{p}{2}-3\right)}{2.3\ldots\left(n-\frac{p}{2}-1\right)}A_3 \\
\mp(n-1)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots\left(n-\frac{p}{2}-2\right)}{2.3\ldots\frac{p}{2}}A_1
\end{array}\right\}.
$$

Pour écrire la dernière égalité nous avons supposé p pair, de sorte que $\frac{p}{2}$ est un nombre entier. Si p était un nombre impair, on aurait :

$$
\left\{\begin{array}{l}
A_{p-1}-(n-p+3)A_{p-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+(-1)^r(n-p+2r+1)\dfrac{(n-p+2)\ldots(n-p+r)}{2\ldots r}A_{p-2r-1} \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm(n-2)\dfrac{(n-p+2)\ldots\left(n-\frac{p+3}{2}\right)}{2\ldots\frac{p-3}{2}}A_2 \\
\mp n\dfrac{(n-p+2)\ldots\left(n-\frac{p+1}{2}\right)}{2\ldots\frac{p-1}{2}}A_0
\end{array}\right\}
$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} A_{p+1} - (n-p+1)\,A_{p-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \ldots\ldots\ldots \\ \quad + (-1)^r (n-p+2r-1\ \dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots(n-p+r-2)}{2.3\ldots r}\ A_{p-2r+1} \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \pm (n-2)\,\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots\left(n-\dfrac{p+5}{2}\right)}{2.3\ldots\dfrac{p-1}{2}}\,A_2 \\ \quad \mp n\,\dfrac{(n-p)(n-p+1)\ldots\left(n-\dfrac{p+3}{2}\right)}{2.3\ldots\dfrac{p+1}{2}}\,A_0 \end{array} \right\}.$$

p étant impair, $\dfrac{p-1}{2}, \dfrac{p+3}{2}, \ldots$ sont des nombres entiers.

Si on exprime que le terme du milieu est nul, on pourra mettre le double signe devant les seconds membres des relations précédentes, et l'on aura de plus la condition :

Si p est pair,

$$\begin{array}{l} A_p - (n-p+2)\,A_{p-2} + (n-p+4)\,\dfrac{n-p+1}{2}\,A_{p-4} - \ldots \\ \quad + (-1)^r (n-p+2r)\,\dfrac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots(n-p+r-1)}{2.3\ldots r}\,A_{p-2r} + \ldots \\ \qquad \pm (n-2)\,\dfrac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots\left(n-\dfrac{p}{2}-2\right)}{2.3\ldots\left(\dfrac{p}{2}-1\right)}\,A_2 \\ \qquad \mp n\,\dfrac{(n-p+1)\ldots\left(n-\dfrac{p}{2}-1\right)}{2\ldots\dfrac{p}{2}}\,A_0 = 0. \end{array}$$

Si p est impair,

$$A_p - (n-p+2)A_{p-2} + (n-p+4)\frac{n-p+1}{2}A_{p-4} + \ldots$$
$$+ (-1)^r(n-p+2r\frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots(n-p+r-1)}{2.3\ldots r}A_{p-2r} + \ldots$$
$$\pm(n-3)\frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots\left(n-\frac{p+5}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{p-3}{2}}A_3$$
$$\mp(n-1)\frac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots\left(n-\frac{p+3}{2}\right)}{2.3\ldots\frac{p-1}{2}}A_1 = 0.$$

2. Supposons maintenant n impair : soit $n = 2p+1$; alors le nombre des termes est $2p+2$, les deux termes du milieu sont de degré $n-p$ et $n-p-1$, et l'on a les conditions :

$$A_0 = \pm[A_n - 2A_{n-2} + 2A_{n-4}\ldots$$
$$+ (-1)^r 2A_{n-2r} + \ldots \pm 2A_3 \mp 2A_1],$$
$$A_1 = \pm[A_{n-1} - 3A_{n-3} + 5A_{n-5}\ldots$$
$$+ (-1)^r(2r+1)A_{n-2r-1} + \ldots \pm (n-2)A_2 \mp nA_0]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\left\{\begin{array}{l}
A_p - (n-p+2)A_{p-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (-1)^r(n-p+2r)\dfrac{(n-p+1)\ldots(n-p+r-1}{2\ldots r}A_{p-2r} \\
+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm(n-2)\dfrac{(n-p+1)(n-p+2)\ldots\left(n-\frac{p}{2}\right)}{2.3\ldots\left(\frac{p}{2}-1\right)}A_2 \\
\mp n\dfrac{(n-p+1)\ldots\left(n-\frac{p}{2}-1\right)}{2\ldots\frac{p}{2}}A_0
\end{array}\right\}$$

$$
=\mp\left\{
\begin{array}{l}
A_{p+1} - (n-p+1)A_{p-1} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+(-1)^r(n-p+2r-1)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\dots(n-p+r-2)}{2.3\dots r}A_{p-2r+1} \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\pm(n-3)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\dots\left(n-\frac{p}{2}-3\right)}{2.3\dots\left(\frac{p}{2}-1\right)}A_3 \\
\mp(n-1)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\dots\left(n-\frac{p}{2}-2\right)}{2.3\dots\frac{p}{2}}A_1
\end{array}
\right\}.
$$

En écrivant la dernière égalité nous avons supposé p pair; si p était impair on aurait:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
A_p - (n-p+2)A_{p-2} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+(-1)^r(n-p+2r)\dfrac{(n-p+1)\dots(n-p+r-1)}{2\dots r}A_{p-2r} \\
+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\pm(n-3)\dfrac{(n-p+1)(n-p+2)\dots\left(n-\frac{p+5}{2}\right)}{2.3\dots\frac{p-3}{2}}A_3 \\
\mp(n-1)\dfrac{(n-p+1)(n-p+2)\dots\left(n-\frac{p+3}{2}\right)}{2.3\dots\frac{p-1}{2}}A_1
\end{array}
\right\}
$$

$$
=\pm\left\{\begin{array}{l}
A_{p+1}-(n-p+1)A_{p-1}+\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
+(-1)^r(n-p+2r-1)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\dots(n-p+r-2)}{2.3\dots r}A_{p-2r+1}\\
+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\pm(n-2)\dfrac{(n-p)(n-p+1)\dots\left(n-\dfrac{p+5}{2}\right)}{2.3\dots\dfrac{p-1}{2}}A_2\\
\mp n\dfrac{(n-p)(n-p+1)\dots\left(n-\dfrac{p+3}{2}\right)}{2.3\dots\dfrac{p+1}{2}}A_0
\end{array}\right\}.
$$

Si l'on suppose $A_0=1$ dans le cas où n est pair et lorsqu'il y a un terme du milieu, on a $\frac{n}{2}$ égalités pour déterminer $A_1, A_2, \dots, A_n$; il reste donc $\left(n-\frac{n}{2}\right)$ ou $\frac{n}{2}$ coefficients arbitraires.

Si l'on suppose qu'il n'y a pas de terme du milieu, c'est-à-dire si l'on écrit que le coefficient de ce terme est nul, on aura $\frac{n}{2}+1$ ou $\frac{n+2}{2}$ égalités; il restera donc $\left(n-\frac{n+2}{2}\right)$ ou $\frac{n-2}{2}$ coefficients indéterminés.

Si n est impair, on aura $\frac{n+1}{2}$ égalités, et il n'y aura plus que $\left(n-\frac{n+1}{2}\right)$ ou $\frac{n-1}{2}$ coefficients arbitraires.

La question se traiterait de la même manière si l'équation donnée en x n'avait pas de terme du milieu. Si, le terme du milieu manquant, les coefficients des termes équidistants des extrêmes étaient égaux et de signes contraires, on ramènerait l'équation à la forme étudiée en divisant par $x^2 - 1$.

Applications. — 1° Considérons l'équation

$$x^6 + A_1 x^5 + A_2 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + 1 = 0.$$

L'équation en y sera

$$y^3 + A_1 y^2 + (A_2 - 3) y + A_3 - 2A_1 = 0.$$

Pour que cette équation soit réciproque, il faut que l'on ait, d'après les formules générales (2),

$$1 = A_3 - 2A_1, \quad A_1 = A_2 - 3$$

ou

$$1 = -A_3 + 2A_1, \quad A_1 = -A_2 + 3.$$

Prenons A_1 arbitraire, on a

$$A_2 = A_1 + 3, \quad A_3 = 2A_1 + 1$$

ou

$$A_2 = -A_1 + 3, \quad A_3 = 2A_1 - 1.$$

L'équation en y devient

$$y^3 + A_1 y^2 + A_1 y + 1 = 0,$$

ou

$$y^3 + A_1 y^2 - A_1 y - 1 = 0;$$

et l'équation en x prend l'une des deux formes

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^6 + A_1 x^5 + (A_1 + 3) x^4 \\ \quad + (2A_1 + 1) x^3 - (A_1 + 3) x^2 + A_1 x + 1 = 0, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^6 + A_1 x^5 - (A_1 - 3) x^4 \\ \quad + (2A_1 + 1) x^3 - (A_1 - 3) x^2 + A_1 x + 1 = 0. \end{array} \right.$$

2° En appliquant les mêmes méthodes au huitième degré, nous aurons trois types d'équations de ce degré *doublement réciproques*, savoir :

$$(1)\ \left\{\begin{aligned} &x^8 + A_1x^7 + A_2x^6 + 4A_1x^5 + (2A_2 - 1)x^4 \\ &\qquad + 4A_1x^3 + A_2x^2 + A_1x + 1 = 0. \end{aligned}\right.$$

$$(2)\ x^8 + A_1x^7 + 4x^6 + 4A_1x^5 + 7x^4 + 4A_1x^3 + 4x^2 + A_1x + 1 = 0.$$

$$(3)\ x^8 + A_1x^7 + 4x^6 + 2A_1x^5 + 5x^4 + 2A_1x^3 + 4x^2 + A_1x + 1 = 0.$$

Note. — Autre solution de M. Bodemer, professeur au collége de Mulhouse.

Question 790

(voir 2ᵉ série, t. V, p. 548) ;

PAR M. A. LEMAITRE,
Maitre répétiteur au lycée de Besançon.

Démontrer :

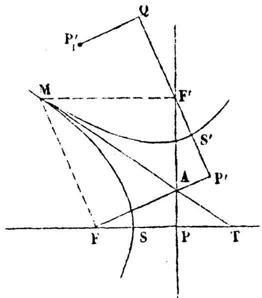
1° *Que le mouvement de l'angle droit donné par Newton pour tracer la cissoïde est produit par le roulement d'une parabole sur une autre parabole égale à la première.*

2° *Que les lignes décrites par les différents points du plan de la parabole mobile sont des courbes du troisième degré. (Sept espèces différentes, d'après la classification de Newton.) De là, pour toutes ces courbes, une génération mécanique semblable à celle de la cissoïde.*

2° *Que les roulettes ainsi obtenues ont une génération géométrique simple (par points); faire voir, en outre, comment on peut passer de cette génération géométrique à la génération mécanique (mouvement continu).*

(E. HABICH.)

1° Supposons que, dans le roulement de la parabole MS′, le sommet S′ se soit trouvé en contact avec le sommet S de la parabole MS; le point de contact étant venu en M, l'arc MS′ est égal à l'arc MS, et, à cause de l'égalité des deux paraboles, les points homologues seront, pour cette position de la figure, symétriques par rapport à la tan-



gente commune aux deux courbes. Le point F′ symétrique du point F est le foyer de la parabole MS′, et se trouve, d'après un principe connu, sur la directrice F′P de la parabole MS. Dans le mouvement de la parabole MS′, il décrira cette directrice; tandis que la directrice FP′ de la parabole MS′ passe constamment par le foyer F symétrique de F′, en vertu du même théorème. Du reste, la distance F′P′ du foyer F à la directrice est constamment égale à FP, et le sommet S′ est le milieu de cette distance.

On a donc un angle droit FP′F′, dont un côté passe par un point fixe F, et l'extrémité F′ de l'autre côté constant en longueur décrit une droite fixe distante du point fixe F d'une longueur égale à celle du côté F′P′. Le point S′ décrira donc une cissoïde, d'après la règle de Newton, ce qui justifie la première partie de l'énoncé.

2° Soit P'_1 un point du plan de la parabole, entraîné dans le mouvement de celle-ci; ce point, par rapport à la tangente commune, restera constamment symétrique du point homologue P, pris dans le plan de la parabole fixe. *Le problème se ramène donc à trouver le lieu du* *symétrique de ce point par rapport aux tangentes de la parabole.*

L'équation de la tangente à la parabole, rapportée à son axe et à la tangente au sommet, est

$$(1)\qquad my = m^2 x + \frac{p}{2},$$

m étant variable.

Les coordonnées du point P étant α, β, celles du point P'_1, son symétrique par rapport à la droite dont l'équation est (1), étant X, Y, l'équation de la droite perpendiculaire à la droite (1), et qui joint ces deux points, est

$$(2)\qquad m(y-\beta) + (x-\alpha) = 0.$$

Le point d'intersection des droites (1) et (2) étant le milieu de la droite (α, β) (X, Y), ses coordonnées satisfont aux relations

$$x = \frac{X+\alpha}{2}, \quad y = \frac{Y+\beta}{2}.$$

Remplaçant x et y par ces valeurs dans les équations (1) et (2), on obtient les égalités

$$m(Y+\beta) = m^2(X+\alpha) + p,$$
$$m(Y-\beta) + X - \alpha = 0,$$

entre lesquelles il suffit évidemment d'éliminer m pour obtenir l'équation du lieu, ce qui donne

$$(\alpha - X)(Y-\beta)(Y+\beta) = (\alpha - X)^2(\alpha + X) + p(Y-\beta)^2.$$

On obtient une vérification de cette formule en faisant $\alpha = 0$, $\beta = 0$, c'est-à-dire en supposant que le point qui décrit la courbe est le sommet de la parabole mobile. On trouve

$$-XY^2 = X^3 + pY^2, \quad \text{ou} \quad Y^2 = \frac{-X^3}{p+Y},$$

ce qui est l'équation de la cissoïde.

Une autre vérification consiste à faire $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = 0$. On doit retrouver la directrice, et le cercle de rayon nul qui a le foyer pour centre. C'est ce qui a lieu :

$$\left(\frac{p}{2} - X\right) Y^2 = \left(\frac{p}{2} - X\right)^2 \left(\frac{p}{2} + X\right) + pY^2,$$

ou

$$\left(\frac{p}{2} - X\right)^2 \left(\frac{p}{2} + X\right) + Y^2 \left(\frac{p}{2} + X\right) = 0,$$

ou

$$\left[\frac{p}{2} + X\right] \left[Y^2 + \left(\frac{p}{2} - X\right)^2\right] = 0.$$

Il résulte de là que ces courbes du troisième degré peuvent être engendrées par le roulement d'une parabole sur une autre.

3° Au lieu de considérer le point P comme lié au mouvement de la parabole, on peut le considérer comme lié au mouvement de l'angle droit FP′F′, mouvement qui est une conséquence du premier. Du point P, nous abaissons la perpendiculaire PQ sur la droite P′F′. La longueur de cette perpendiculaire est constante. Ainsi la génération d'une quelconque de ces courbes ne diffère de celle de la cissoïde, donnée par Newton, que parce que, au lieu de choisir le point milieu S′ du côté constant FP′ de l'angle droit, on prend une longueur FQ constante sur cette droite; en ce point Q, on élève une perpendiculaire de longueur constante. L'extrémité P′ de cette perpendiculaire décrit la courbe.

On peut trouver le centre instantané de rotation des points liés au mouvement de l'angle droit F′P′F. D'après la génération première, on sait que ce point parcourt la parabole fixe, et n'est autre que le point de contact M des deux paraboles. Ceci va nous fournir un moyen de revenir de la deuxième génération à la première. En effet, la vitesse du point F′ est dirigée suivant F′P.

Le centre instantané de rotation se trouve donc sur la perpendiculaire F′M menée par le point F′ à cette ligne.

Le point qui est actuellement en F se déplace d'une quantité infiniment petite sur la direction infiniment voisine de la droite FP′. La vitesse de ce point est donc dirigée suivant FP′; et, par suite, le centre instantané de rotation se trouve sur la perpendiculaire MF à cette droite. Ce point n'est donc autre que le point M, intersection de MF et de MF′.

Pour revenir de la génération par points que nous venons d'indiquer à la génération première, par le roulement de la parabole mobile sur une parabole fixe, il faut d'abord démontrer que le lieu du point M est une parabole. Il suffit pour cela de démontrer que MF = MF′. Soit A le point où la droite mobile FP′ rencontre la droite mobile F′P. Joignons AM : les deux triangles rectangles sont égaux comme rectangles, ayant l'hypoténuse F′M commune, et le côté AF égal au côté AF′, à cause des deux triangles rectangles égaux APF, AP′F′; par suite MF = MF′.

Or, les deux triangles APF, AP′F′ sont égaux comme rectangles ayant deux angles opposés par le sommet, et un côté FP égal par hypothèse au côté FP′. (*Voir* la génération de la cissoïde et celle des autres courbes qui s'en déduit.) De l'égalité de ces deux triangles, résulte celle de leurs hypoténuses FA, F′A; de celle-ci, comme on l'a vu, l'égalité des triangles AFM, AF′M, et celle de FM et de F′M. Le lieu du centre instantané est donc une parabole.

Pour démontrer que la courbe roulante est une parabole, il faut démontrer que tel est le lieu du centre instantané sur le plan mobile de l'angle droit FP'F. Mais la distance du point M au point F' mobile sur la droite F'P est constamment égale à la distance FM à la droite FP' du système mobile. Le point M se trouve donc sur une parabole mobile, ayant F' pour foyer, et la droite FP' pour directrice.

Note. — La même question a été traitée par MM. Soudan et Vivarès, élèves de Sainte-Barbe; Ferdinand Roux, du lycée de Nîmes. M. Laisant, à l'occasion de cette question, a traité le cas d'une courbe quelconque roulant sur une courbe égale.

QUESTION.

803. Les transformations usitées en Géométrie, comme la similitude, le procédé des rayons vecteurs réciproques, etc., ont pour effet de conserver sans altération certains éléments des figures, tels que les angles, etc. Montrer que les formules suivantes sont *la forme la plus générale* de celles qui sont relatives à la sous-tangente et à la sous-normale en coordonnées rectangulaires ou en coordonnées polaires. Les quatre premières conservent ces longueurs dans une courbe quelconque, sauf un rapport fixe $\frac{m}{n}$ qui peut devenir l'unité; les quatre suivantes les changent l'une dans l'autre, sauf encore le rapport fixe $\frac{m}{n}$.

I. Conserver, sauf un rapport constant $\frac{m}{n}$:

1° La sous-tangente en coordonnées rectangulaires

$$x = mx_1 + A, \quad y = By_1^n;$$

2° La sous-tangente en coordonnées polaires

$$\theta = m\theta_1 + \mathrm{A}, \quad r = \frac{1}{\frac{n}{r_1} + \mathrm{B}};$$

3° La sous-normale en coordonnées rectangulaires

$$x = nx_1 + \mathrm{A}, \quad y = \sqrt{my_1^2 + \mathrm{B}};$$

4° La sous-normale en coordonnées polaïres

$$\theta = n\theta_1 + \mathrm{A}, \quad v = mr_1 + \mathrm{B}.$$

II. Changer, sauf un rapport constant $\frac{m}{n}$:

1° La sous-tangente en sous-normale (coordonnées rectangulaires)

$$x = \frac{m}{2} y_1^2 + \mathrm{A}, \quad y + \mathrm{B}e^{nx_1};$$

2° La sous-tangente en sous-normale (coordonnées polaïres)

$$\theta = mr_1 + \mathrm{A}, \quad r = \frac{1}{n\theta_1 + \mathrm{B}};$$

3° La sous-normale en sous-tangente (coordonnées rectangulaires)

$$x = n \log y_1 + \mathrm{A}, \quad y = \sqrt{2mx_1 + \mathrm{B}};$$

4° La sous-normale en sous-tangente (coordonnées polaires)

$$\theta = \frac{n}{r_1} + \mathrm{A}, \quad r = m\theta_1 + \mathrm{B}.$$

(Haton de la Goupillière.)

PUBLICATIONS RÉCENTES.

(Tous les ouvrages annoncés se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

GEORGE SALMON. — *Lessons introductory to the modern higher Algebra* (Leçons introductives à l'Algèbre supérieure moderne); 2e édit. In-8° de XVI-296 pages; Dublin, 1866.

Cet ouvrage, que nous n'avons pas besoin de recommander à nos lecteurs, est indispensable à qui veut connaître l'Algèbre moderne, dont le principal caractère est l'étude de certaines fonctions qui jouent un rôle considérable, soit dans la théorie des équations, soit dans la Géométrie analytique. La seconde édition est presque le double de la première. Relativement à l'usage des nouveaux mots, l'auteur n'a adopté que ceux qu'on n'aurait pu éviter sans de longues périphrases. Voici le relevé des mots recueillis dans la table alphabétique :

Bezoutiens. — Canonisants. — Catalecticants. — Combinants. — Commutants. — Concomitants. — Contragrédience. — Contravariants. — Covariants. — Discriminants. — Emanants. — Evectants. — Hessiens. — Invariants. — Jacobiens. — Osculants. — Quadrinvariants. — Tact-invariant (*).

Voilà de quoi enrichir le Dictionnaire de M. Littré.

TURQUAN (Louis-Victor). — *Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris*. 1° Algèbre : *Résolution numérique des équations à plusieurs inconnues*; 2° Mécanique : *Stabilité de l'équilibre des corps flottants*. In-4° de IV-104 pages; 1866.

La première thèse a pour objet la résolution *directe* des

(*) Imprimé par erreur *fact-invariant* dans les *Comptes rendus* et dans nos *Annales*.

équations à plusieurs inconnues, c'est-à-dire sans recourir à l'élimination, sujet déjà traité par Sarrus et par M. Ossian Bonnet. M. Turquan donne un procédé exempt de toute incertitude.

Hugo (C[te] Léopold). — *Théorie des cristalloïdes élémentaires*. Gr. in-8° de 60 pages; 4 pl.; Paris, 1867, Gauthier-Villars.

L'auteur a donné lui-même une idée de ce travail dans les *Nouvelles Annales* de novembre 1866.

Plucker. — *On a new Geometry of space* (Sur une nouvelle Géométrie de l'espace). In-4° de 78 pages; Londres, 1866. (Extrait des *Transactions philosophiques*.)

Les beaux travaux de M. Plucker lui ont valu la médaille de Copley pour 1866.

Plateau (Jules). — *Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur*. In-4° de 66 pages; 1866. (Extrait des *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*.)

Suite des recherches dont nous avons déjà parlé en 1866, p. 182.

Lamarle (Ernest). — *Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces*. In-4° de 168 pages; 1866. (Extrait des *Mémoires de l'Académie de Bruxelles*.)

Suite et fin du Mémoire dont nous avons analysé la partie théorique. (*Voir* t. V, p. 181.)

Genocchi (Angelo). — Alcune... *Sur quelques nouvelles relations modulaires*. In-4° de 16 pages; Naples. (Extrait des *Mémoires de l'Académie de Naples*.)

NOTICE BIOGRAPHIQUE SUR EDMOND BOUR.

Lue à la Société Philomathique de Paris le 15 décembre 1866, par M. le Secrétaire de la Société.

C'est un deuil public quand vient à mourir l'un de ces hommes que leur génie et les travaux d'une longue vie ont faits illustres entre les savants de leur temps; mais une tristesse plus amère encore saisit tous les amis de la science lorsque, au travers de leurs plus chères espérances, la mort frappe tout à coup, en pleine jeunesse, une haute et puissante intelligence.

Edmond Bour fut ainsi pleuré. — Comment mérita-t-il ce suprême hommage? Le simple récit de sa vie le dira peut-être.

Jacques-Edmond-Émile Bour naquit à Gray, en Franche-Comté, le 19 mai 1832. Dès son enfance, il se fit remarquer par son intelligence et son ardeur à l'étude, et, grâce à ces heureuses dispositions, parvint à acquérir, dans un petit Collége communal, les éléments de cette solide instruction, ou, pour mieux dire, de cette érudition littéraire que révélaient sa conversation et ses écrits.

Reçu bachelier ès lettres au sortir du Collége de Gray, il aborda, au Lycée de Dijon, l'étude des sciences, et, en 1850, à l'âge de dix-huit ans, après une année de Mathématiques spéciales, il fut admis à l'École Polytechnique. Classé par les Examinateurs d'admission le 64^e parmi les 90 élèves de sa promotion, il s'éleva bientôt au premier rang, qu'il conserva jusqu'à la sortie de l'École; aussi l'Académie des Sciences de l'Institut lui décerna-t-elle, dans sa séance publique du 27 décembre 1852, le prix annuel fondé par Madame la Marquise de Laplace en faveur de l'élève sortant le premier de l'École Polytechnique.

Élève ingénieur des Mines le 15 novembre 1852, Bour fut promu, le 14 juillet 1855, au grade d'ingénieur de troisième classe et envoyé à l'École des Mines de Saint-Étienne comme professeur d'Exploitation des mines et de Mécanique. Nommé, le 5 décembre 1857, ingénieur de deuxième classe, répétiteur du cours de Géométrie descriptive à l'École Polytechnique en 1859, professeur à l'École des Mines en 1860, il occupa, le 2 mars 1861, à l'âge de vingt-neuf ans, l'une des deux chaires de Mécanique à l'École Polytechnique.

Quelques dates résument ainsi la carrière officielle de Bour; mais une minutieuse analyse de ses travaux pourrait seule donner une idée complète des progrès que lui doivent les sciences mathématiques. A cette sérieuse étude, dont elle ne saurait comporter les longs développements, cette Notice doit au moins suppléer par un rapide aperçu des sujets traités dans des Mémoires désormais célèbres.

Le premier travail personnel de Bour qui ait appelé sur lui la sérieuse attention de ses professeurs fut une *théorie nouvelle de l'électro-dynamique,* qu'il produisit dans ses examens à l'École Polytechnique. Très-appréciée alors par M. de Senarmont, de regrettable mémoire, cette théorie n'a, malheureusement, jamais été publiée.

Encore élève à l'École des Mines, Bour soumit, le 5 mars 1855, à l'Académie des Sciences, un *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique analytique.* « Les géomètres liront avec intérêt, dit, au sujet de ce travail, M. Liouville, au nom de la Commission chargée de l'examiner, le Mémoire de M. Bour. C'est dans les excellentes leçons de M. Bertrand que M. Bour a surtout puisé les idées premières de son travail ; l'élève s'est montré digne du maître. Nous proposons à l'Académie d'approuver le Mémoire de M. Bour et d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Ces conclusions furent adoptées, et le Mémoire parut à la fois dans le *Recueil des Savants étrangers*, t. XIV, les *Comptes rendus*, t. XL, et le *Journal de Mathématiques*, t. XX.

Dans ce remarquable travail, l'auteur commence par établir, en complétant un théorème de M. Bertrand, que l'on peut arriver, de proche en proche, à mettre la solution complète d'un problème de Mécanique sous la forme *canonique* de deux séries d'intégrales conjuguées deux à deux, telles, que l'une quelconque d'entre elles, combinée avec toutes les autres pour former la *fonction de Poisson*, donne l'unité avec sa conjuguée et zéro avec tout le reste. Il démontre ensuite, et c'est là la partie essentielle de son Mémoire, que la connaissance d'une intégrale quelconque permet d'abaisser de deux unités l'ordre de l'équation aux dérivées partielles du problème, sans toutefois servir à réduire de nouveau le degré de l'équation transformée, à laquelle cette intégrale devient étrangère.

Cette ressource épuisée, Bour, remarquant que l'équation réduite obtenue admet des intégrales étrangères à la question, montre que, si l'on connaît une de celles-ci, on peut souvent abaisser l'ordre de cette équation réduite, en divisant les intégrales inconnues en plusieurs groupes, donnés par des équations distinctes, ce qui est bien dans la nature des problèmes ordinaires de Mécanique.

A ce premier travail de Bour était réservée, après celle de l'Académie, une autre consécration, la plus flatteuse que pût désirer le jeune auteur, le suffrage posthume de l'illustre Jacobi. Depuis 1837, le monde savant attendait impatiemment l'apparition, annoncée dès cette époque, d'un important ouvrage de ce grand géomètre sur la Mécanique analytique.

« La publication posthume de ce travail, dit Bour lui-même, vient de commencer dans le *Journal de Crelle*, par les soins de M. Clebsch, et c'est avec une bien vive satisfaction qu'en tenant compte de la différence entre le couronnement de l'œuvre d'un maître et les essais incertains d'un élève, j'ai retrouvé dans la nouvelle méthode de Jacobi l'identité la plus parfaite avec celle que j'ai eu l'honneur de soumettre à l'Académie des Sciences dans la séance du 5 mars 1855. »

Devant une pareille déclaration, tout commentaire devient inutile, surtout si l'on observe qu'à l'apparition de ce Mémoire Bour n'avait pas vingt-trois ans.

Ce brillant succès obtenu par Bour au commencement de sa carrière lui valut, de la part du Ministre de l'Instruction publique, l'autorisation de subir les épreuves du doctorat ès sciences mathématiques, sans justifier des grades inférieurs. Il soutint ses Thèses, devant la Faculté des Sciences de Paris, le 3 décembre 1855.

La première, relative à la Mécanique céleste, traitait du *problème des trois corps*, célèbre par l'étude dont il avait été l'objet de la part des plus grands géomètres. Bour appliqua à cette question les règles indiquées dans son précédent Mémoire, et les résultats qu'il obtint firent sensation dans le monde savant. Quelque temps auparavant, Jacobi, après avoir fait remarquer qu'on pouvait considérer l'un des corps comme fixe, avait donné les équations du mouvement des deux autres sous une forme qui paraît n'avoir rien de commun avec celle sous laquelle se présentent d'ordinaire les équations différentielles de la Mécanique analytique. Bour fit plus : il parvint à réduire le cas général à celui du mouvement dans un plan, et à ramener les équations du problème, ainsi simplifiées, à la forme canonique. Son travail se résumait en ce théorème remarquable :

Pour intégrer le problème des trois corps dans le cas le plus général, il suffit de résoudre le cas où le mouvement a lieu dans un plan, et d'avoir ensuite égard à une fonction perturbatrice égale au produit d'une constante dépendant des aires par la somme des moments d'inertie des corps autour d'un certain axe, divisé par le carré du triangle formé par les trois corps.

La seconde Thèse consistait en une *Étude sur l'attraction qu'exercerait une planète, si l'on supposait sa masse répartie sur chaque élément de son orbite, proportionnellement au temps employé à la parcourir.* La solution de ce problème, recherchée pour la première fois par Gauss, en vue de la théorie des perturbations, reçut de Bour tous les développements qu'elle comportait.

Peu après ces nouveaux travaux, par lesquels le jeune géomètre soutint et accrut encore sa renommée naissante, il reçut, de la part de l'illustre Biot, avec une lettre qui, elle seule, constituait un titre d'honneur, quelques volumes de Mémoires mathématiques, dont le vénérable savant traçait ainsi l'histoire :

« Cette précieuse collection de Mémoires de Lagrange tire son origine de d'Alembert; il la composa avec des exemplaires que Lagrange lui envoyait de Berlin. Il en fit présent à Condorcet, sous la condition de la transmettre à quelque jeune homme laborieux quand elle ne lui serait plus nécessaire. Elle est venue successivement, sous la même condition, de Condorcet à Lacroix, de Lacroix à M. Biot, avec addition de plusieurs autres pièces. M. Biot la donna à J. Binet. Binet n'en ayant pas disposé de son vivant, elle est rentrée dans les mains de M. Biot, qui la transmet, sous les mêmes conditions, à M. Bour, comme un témoignage d'estime pour son zèle et pour les beaux travaux mathématiques par lesquels il s'est annoncé aux amis des sciences. »

Cette distinction unique, récompense éclatante de travaux heureusement accomplis, était en outre, et surtout, une marque de confiance qui obligeait l'avenir. Chacun sait comment Bour avait déjà justifié cette confiance, lorsque la mort est venue, longtemps avant l'heure, l'arracher à ses persévérantes et fécondes recherches, sans lui laisser même le temps de décerner, à son tour, cette glorieuse récompense. Ce fut son collègue et ami, M. Mannheim, qui dut assurer le sort de ce précieux dépôt : il le transmit à l'Académie des Sciences, et cette compagnie décida qu'elle-même décernerait cette récompense à un jeune savant, qui en disposerait ensuite suivant les intentions du premier fondateur.

« Persévérez invinciblement, écrivait Biot à son jeune protégé, dans la voie où vous avez déjà commencé à marcher avec tant de succès.... Si vous poursuivez votre carrière scientifique avec le même courage que vous y avez porté d'abord, chaque nouveau pas que vous y ferez sera pour vous un accroissement d'honneur.... » Fortifié par ces sympathiques encouragements contre l'abattement qu'il avait tout d'abord éprouvé en se voyant privé, par son éloignement forcé de Paris, des plus précieuses ressources scientifiques, Bour se remit à l'œuvre avec une ardeur nouvelle. Le 25 février 1856, il avait présenté à l'Académie des Sciences un *Mémoire sur les mouvements relatifs* (*Comptes rendus*, t. XLII); le 5 janvier 1857, il en donna un autre *sur la résolution des équations numériques du troisième degré au moyen de la règle à* *calcul* (*Comptes rendus*, t. XLIV). Enfin, il aborda l'*étude des surfaces qui peuvent s'appliquer les unes sur les autres sans déchirure ni duplicature*, question proposée par l'Académie des Sciences pour le grand prix de Mathématiques en 1861. Le Mémoire, désormais célèbre, que Bour soumit au jugement de l'Académie, confirma une fois de plus l'incontestable supériorité de son auteur. « M. Bour, dit M. Bertrand dans son Rapport (séance du 25 mars 1861), ne s'est proposé rien moins que l'intégration complète des équations du problème, dans le cas où la surface donnée est de révolution. Les méthodes ordinaires du calcul intégral ne semblent pas ici applicables; il a mis à profit une indication rapide, jetée comme en passant par Lagrange dans un de ses Mémoires, et dans l'application de laquelle l'illustre géomètre signalait lui-même de graves difficultés. Cette méthode consiste d'abord à former une solution *complète* de l'équation différentielle du second ordre, dans laquelle figurent cinq constantes arbitraires, et à en déduire la solution *générale* par la variation de ces constantes. Les difficultés que Lagrange avait aperçues et signalées ont été très-habilement et très-heureusement surmontées dans le Mémoire n° 1. La Commission espère que le savant auteur généralisera sa belle analyse, et que le Calcul intégral recevra par là un perfectionnement notable. Il sera juste de rapporter à Lagrange la gloire d'avoir ouvert cette voie nouvelle, mais le concours actuel occupera néanmoins une place dans l'histoire de son développement.

» En résumé, la Commission accorde le prix de Mathématiques au Mémoire inscrit sous le n° 1, ayant pour devise : *Je plie et ne romps point,* dont l'auteur est M. Bour, professeur à l'École Polytechnique. »

Ce magnifique travail a paru dans le XXXIX^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique,* mais légèrement modifié dans sa forme, l'auteur ayant séparé de ses théories purement géométriques les recherches analytiques auxquelles elles l'ont conduit, recherches relatives à l'intégration de certaines équations différentielles partielles du premier et du second ordre.

Dans sa *Théorie de la déformation des surfaces*, le problème une fois mis en équation dans les termes les plus généraux, Bour en recherche la solution par trois méthodes distinctes.

La première, tout analytique, conduit, par l'emploi des *coordonnées symétriques*, à une équation différentielle dont l'intégration générale, dans certains cas où elle se simplifie, est étudiée dans le Mémoire spécial annoncé plus haut.

Dans sa deuxième méthode, fondée sur l'usage des *coordonnées géodésiques*, l'auteur parvient à dégager, d'un assez grand nombre de relations secondaires, celles qu'il nomme *équations fondamentales*, et d'où se déduit, à son point de vue, toute la théorie des surfaces.

Après avoir interprété géométriquement les fonctions qu'elles renferment, et montré que tout dépend, en définitive, de ces éléments, parfaitement définis, analytiquement et géométriquement, Bour déduit de ces équations fondamentales, parmi certaines propositions nouvelles, le théorème de Gauss sur la constance de la courbure en chaque point des surfaces qui se déforment; il les applique ensuite, soit à des problèmes se rattachant directement à la question proposée, soit à d'autres, un peu étrangers peut-être à ce sujet, mais dont la solution prouve bien la puissance de ces équations fondamentales, et confirme l'importance capitale que l'auteur leur attribue. C'est ainsi que, dans un chapitre relatif au développement des surfaces réglées, Bour commence par déduire des formules la théorie complète des surfaces, puis détermine, alors seulement, les surfaces réglées applicables sur diverses surfaces : ellipsoïde de révolution, hyperboloïde à une nappe, hélicoïde réglé.

De même, à l'occasion du développement des surfaces de révolution, dont l'étude lui fournit ses résultats les plus importants, Bour, ayant découvert ce théorème remarquable, que *toute surface hélicoïdale est applicable sur une surface de révolution*, étudie, toujours à l'aide de ses équations fondamentales, les hélicoïdes en général, avant de traiter quelques exemples intéressants. Enfin, s'écartant franchement de l'objet principal de son Mémoire, il montre toute l'importance de ses formules fondamentales, en les faisant servir, dans un chapitre épisodique intitulé : *Applications diverses*, à l'étude des surfaces qui ont leurs courbures principales égales et opposées, de celles à courbure moyenne constante, et enfin de celles dont les courbures principales sont partout égales et de même signe. Bour applique aussi avec un égal succès les coordonnées symétriques imaginaires à des problèmes du même genre.

La théorie de la déformation des surfaces se termine par l'exposé et l'application de la troisième méthode, signalée au début de cet aperçu. Cette méthode, d'aspect bizarre, qui ne semble, au premier abord, se justifier que par le succès, constitue cependant par ses résultats, d'après son auteur lui-même, ce qu'il y a de plus neuf et de plus inattendu dans toute cette théorie géométrique.

A la fin de ce grand ouvrage, Bour annonçait l'apparition prochaine d'un appendice sur la *théorie des surfaces caustiques,* théorie qui, suivant ses propres expressions, présente des rapports fort curieux avec celle de la déformation des surfaces. Le temps lui a malheureusement manqué pour achever ce complément de son œuvre.

Dans les séances de l'Académie des Sciences des 17 février, 10 et 17 mars 1862, Bour analysa son beau *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles partielles du premier et du second ordre,* qui fait suite au précédent et se trouve, comme celui-ci, dans le XXXIX^e^ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

Après un court exposé de l'état de la question, l'auteur résume et complète ses recherches sur ce vaste sujet; il rappelle le théorème fondamental qu'il avait démontré antérieurement, au tome XIV du *Recueil des Savants étrangers,* et en déduit une nouvelle méthode d'abaissement des équations différentielles de la Dynamique. Passant ensuite aux équations du premier ordre, il applique sa méthode à l'*intégration des équations différentielles de la ligne géodésique sur une surface quelconque*, problème dont il avait annoncé la solution comme second appendice au Mémoire sur la déformation des surfaces. Il termine par des considérations importantes sur l'intégration des équations du second ordre. A cette occasion, M. Liouville s'est exprimé ainsi (séance du 10 mars 1862 de l'Académie des Sciences) :

« .... Dans les pages peu nombreuses insérées aux *Comptes rendus,* chaque mot est une idée. J'ai donc eu le bonheur de voir M. Bour répondre entièrement à ce que j'annonçais de lui comme Rapporteur d'un premier travail présenté à l'Académie en 1855. Désormais M. Bour a son rang fixé près des maîtres. Il ne s'agit plus d'un jeune homme donnant des espérances, mais d'un grand géomètre qui a tenu les promesses brillantes de sa jeunesse. »

Bour avait alors trente ans.

A la suite de ces succès, il fut inscrit sur la liste des candidats au fauteuil laissé vacant à l'Académie des Sciences par la mort de M. Biot. Ses titres nombreux et brillants semblaient assurer son élection : cependant l'Académie, faisant entrer en ligne de compte, outre la valeur des travaux, la durée de la carrière scientifique, crut devoir lui préférer un autre géomètre, qui depuis longtemps s'était fait connaître par de savantes recherches. Pour les amis de Bour, pour l'Académie elle-même, ce n'était que partie remise; à ses yeux, ce fut partie perdue. « Faut-il s'en étonner? disait quelques années plus tard M. Cournot sur la tombe de son jeune ami. Nous avons tous nos tristes pressentiments, et quelque chose apparemment lui disait trop bien qu'il n'avait pas le loisir d'attendre! »

Après cette déception, qu'il ressentit trop profondément, Bour ne publia plus qu'un Mémoire, inséré en 1863 dans le *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. VIII. Ce travail, digne des précédents, se rapporte au *mouvement relatif*, dont il parvint à mettre les équations sous la forme canonique; la question se trouva ainsi, au point de vue de l'intégration, ramenée à celle du mouvement absolu. Cette théorie forme dès maintenant un complément indispensable à la Mécanique analytique. Bour l'appliqua d'abord au mouvement relatif d'un ensemble de points libres, puis à celui d'un système à liaisons quelconques. Enfin, il se servit de la méthode d'intégration dont il a été question plus haut, à plusieurs reprises, pour traiter quelques problèmes intéressants : mouvement des projectiles dans le vide, en tenant compte du mouvement diurne, et mouvement d'un solide de révolution, puis d'un corps quelconque, libre de tourner autour de son centre de gravité fixé sur la terre.

Au milieu de tant de laborieuses recherches, Bour suivait assidûment les séances de la Société Philomathique de Paris, dont il était membre depuis le 7 avril 1860, et à laquelle il communiqua des Notes intéressantes, entre autres : *sur la composition des rotations, sur les cônes circulaires roulants.*

Le 28 janvier 1865, l'Académie de Besançon décerna le titre de Membre associé correspondant à ce jeune géomètre, déjà l'une des gloires de la Franche-Comté.

Dans les dernières années de sa vie, Bour paraît s'être surtout occupé de rédiger, avec un soin infini, pour le publier, le *Cours de Mécanique* qu'il professait à l'École Polytechnique.

Le premier fascicule de cet ouvrage, contenant la Cinématique, a seul paru, quelques mois avant la mort de son auteur; mais le Discours préliminaire, chef-d'œuvre de logique et d'érudition, suffit à faire juger de l'esprit de l'œuvre. En quelques pages claires et concises, Bour définit l'objet de la science, trace les voies par lesquelles elle le poursuit et l'atteint, et parvient à faire pressentir déjà cette admirable unité de la Mécanique que la suite de son Cours affirmera constamment.

La publication de ces belles leçons, connues seulement jusqu'ici de quelques élèves de l'École Polytechnique, sera heureusement continuée, grâce aux soins de l'amitié, sûre de confirmer par une œuvre de plus le témoignage de toutes celles qui perpétueront le nom de Bour.

Bour est mort le 8 mars 1866, dans sa trente-quatrième année, au Val-de-Grâce (1), où, quelques semaines auparavant, il était allé chercher les soins dont le privait l'absence de sa famille, et le repos indispensable qu'il

---

(1) La ville de Gray a réclamé les restes de son enfant. Une souscription faite parmi les compatriotes de Bour a permis de lui élever un monument au cimetière et de faire exécuter son buste destiné à l'hôtel de ville.

Bour a toujours conservé un tendre attachement pour sa ville natale : il lui faisait régulièrement don de toutes ses publications; aussi les manuscrits trouvés après sa mort ont-ils été offerts à la bibliothèque de Gray.

n'avait pas hésité à sacrifier pour remplir, jusqu'à épuisement de ses forces défaillantes, ses devoirs de professeur. La maladie qui l'a tué, activée, sinon provoquée, par les fatigues de deux grands voyages, l'un en Algérie, pour l'observation de l'éclipse du 18 juillet 1860, l'autre en Asie Mineure, pendant l'été de 1863, pour de longues explorations métallurgiques, minait depuis longtemps cette santé précieuse, lorsqu'a éclaté tout à coup la catastrophe suprême. Nul pourtant ne la pressentait si prochaine parmi ses amis, dont l'espérance obstinée survivait encore à de trop rudes épreuves! « C'est toujours un spectacle douloureux, a dit M. le colonel Riffault devant cette tombe sitôt ouverte, de voir la mort frapper la jeunesse. Mais combien l'émotion n'est-elle pas plus profonde quand, à la douleur de la famille, vient s'ajouter un deuil public, quand celui qui part avant l'heure a déjà donné le droit de dire sur sa tombe : Une grande intelligence vient de s'éteindre. » Et, aussi bien, le temps, qui amortit les plus cruelles impressions, adoucira peut-être un jour pour la famille et les amis d'Edmond Bour l'amertume de la perte du fils et de l'ami; il n'affaiblira jamais les regrets qu'a laissés à tous ceux qui cultivent « ces hautes connaissances, le plus digne, le plus impérissable objet des efforts de l'homme, » cet esprit éminent, éteint dans la plénitude de sa puissance créatrice. Qu'est-il besoin, d'ailleurs, de redire ces choses à ceux-là mêmes qui, par la plus touchante inspiration, viennent d'adopter, en quelque sorte, la sœur du grand géomètre, de l'ami dont ils déplorent la perte irréparable?

NOUVELLE THÉORIE DU DÉPLACEMENT CONTINU D'UN CORPS SOLIDE;

PAR M. PICART.

1. On peut considérer un corps solide en mouvement comme une figure géométrique qui se déplace d'une manière continue en restant constamment égale à elle-même, et, à ce point de vue, comme l'égalité de deux figures est un cas particulier de l'homographie, la question du déplacement d'un corps solide apparaît comme une face du problème plus général de la déformation homographique continue d'une figure géométrique quelconque.

2. Si l'on désigne par x, y, z les coordonnées d'un point d'une figure, et par X, Y, Z les coordonnées du point homologue de la figure homographique, on sait que la correspondance des deux figures est définie par les relations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{Ax + By + Cz + H}{mx + ny + pz + 1},\\ Y &= \frac{A'x + B'y + C'z + H'}{mx + ny + pz + 1},\\ Z &= \frac{A''x + B''y + C''z + H''}{mx + ny + pz + 1};\end{aligned}\right.$$

le plan représenté par l'équation

$$mx + ny + pz + 1 = 0$$

correspond, dans la première figure, aux points à l'infini de la seconde.

Si les points homologues de deux figures sont tous à distance finie, ce plan doit être à l'infini, et les formules (1) peuvent s'écrire, dans ce cas,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} X - x &= A_1 x + B y + C z + H,\\ Y - y &= A'_1 x + B' y + C' z + H',\\ Z - z &= A''_1 x + B'' y + C'' z + H''.\end{aligned}\right.$$

3. Supposons maintenant que les deux figures soient infiniment voisines : cela revient à dire que les douze coefficients $A_1, B, C, H, A'_1, B', C', H', A''_1, B'', C'', H''$ sont infiniment petits. Désignons ces coefficients par da, db, dc, dh, da', db', dc', dh', da'', db'', dc'', dh'', et par dx, dy, dz les différences infiniment petites $X - x$, $Y - y$, $Z - z$. Les formules (2) deviendront

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= x\,da + y\,db + z\,dc + dh,\\ dy &= x\,da' + y\,db' + z\,dc' + dh',\\ dz &= x\,da'' + y\,db'' + z\,dc'' + dh''.\end{aligned}\right.$$

Ces équations expriment les variations infiniment petites des coordonnées de chaque point d'une figure lorsque cette figure se déforme infiniment peu, en restant homographique à elle-même; et si l'on suppose que les coefficients da, db, dc, dh, da', db', dc', dh', da'',... soient des fonctions du temps, elles formulent la loi la plus générale de la déformation homographique continue d'une figure.

Il serait facile de déduire de ces formules un grand nombre de propriétés géométriques de cette déformation. Mais nous laisserons de côté cette étude générale pour arriver tout de suite au cas particulier, plus intéressant, du déplacement continu d'une figure invariable.

4. Il faut d'abord chercher quelles doivent être les valeurs des coefficients da, db,..., pour que la figure, dans son déplacement infiniment petit, reste égale à elle-

même. Il suffit d'exprimer que la distance de deux points quelconques (x, y, z), (x', y', z') de la figure est invariable. Or, le carré de cette distance est, en coordonnées rectangulaires,

$$(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2;$$

on doit donc avoir

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&(x'-x)(dx'-dx)+(y'-y)(dy'-dy)\\&\qquad\qquad+(z'-z)(dz'-dz)=0,\end{aligned}\right.$$

ou, remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs (3) en x, y, z et dx', dy', dz' par leurs valeurs semblables en x', y', z',

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&(x'-x)^2da+(y'-y)^2db'+(z'-z)^2dc''\\&\qquad+(x'-x)(y'-y)(db+da')\\&\qquad+(x'-x)(z'-z)(dc+da'')\\&\qquad+(y'-y)(z'-z)(dc'+db'')=0,\end{aligned}\right.$$

et cela quels que soient x, y, z et x', y', z'. Par suite,

$$(6)\quad \left\{\begin{matrix}da=0, & db'=0, & dc''=0,\\ db+da'=0, & dc+da''=0, & dc'+db''=0.\end{matrix}\right.$$

Les formules relatives au déplacement continu d'une figure invariable sont donc

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}dx&=ydb'+zdc+dh,\\ dy&=-xdb+zdc'+dh',\\ dz&=-xdc-ydc'+dh''.\end{aligned}\right.$$

Les coefficients de x, y, z forment les éléments du déterminant gauche symétrique

$$(8)\quad \begin{vmatrix}0 & db & dc\\ -db & 0 & dc'\\ -dc & -dc' & 0\end{vmatrix};$$

or, on sait qu'un déterminant gauche symétrique d'ordre impair est égal à o, ce qui se voit immédiatement si l'on remarque que le changement des lignes en colonnes et des colonnes en lignes, qui n'altère pas un déterminant, a ici pour effet de changer les signes de tous les éléments et par conséquent le signe du déterminant lui-même. On en conclut que, dans le déplacement infiniment petit le plus général d'une figure invariable, *il n'y a pas de point sans vitesse.*

5. Si les termes dh, dh', dh'' sont constamment nuls, les formules (7), qui deviennent

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= ydb + zdc,\\ dy &= -xdb + zdc',\\ dz &= -xdc - ydc',\end{aligned}\right.$$

représentent le mouvement d'une figure invariable autour d'un point fixe qui est ici l'origine des coordonnées, et si les quantités dc, dc', dh'' sont constamment nulles, les mêmes formules (7), qui se réduisent à

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} dx &= ydb + dh,\\ dy &= -xdb + dh',\\ dz &= 0,\end{aligned}\right.$$

représentent le déplacement d'une figure invariable parallèlement à un plan qui est ici le plan des xy.

6. Revenons au mouvement le plus général exprimé par les formules (7).

Le déterminant (8) étant nul, il existe des valeurs de λ, μ, ν propres à vérifier le système d'équations

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\lambda.0 - \mu db - \nu dc = 0,\\ &\lambda.db + \mu.0 - \nu dc' = 0,\\ &\lambda.dc + \mu dc' + \nu.0 = 0,\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire qu'il existe des facteurs λ, μ, ν tels, qu'en multipliant la première des équations (7) par λ, la deuxième par μ, la troisième par ν, et ajoutant ensuite ces trois équations, on obtienne un résultat indépendant de x, y, z. Or, ces facteurs peuvent toujours être regardés comme les cosinus des angles α, β, γ qu'une certaine direction faite avec les axes de coordonnées, et alors

$$dx\cos\alpha + dy\cos\beta + dz\cos\gamma$$

est la projection du déplacement du point (x, y, z) sur la direction (α, β, γ). D'où l'on conclut qu'*il existe une direction* (α, β, γ) *sur laquelle les déplacements des différents points de la figure ont des projections égales*.

On trouve

$$(12)\qquad \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{dc'}{\sqrt{db^2 + dc^2 + dc'^2}}, \\[2ex] \cos\beta = -\dfrac{dc}{\sqrt{db^2 + dc^2 + dc'^2}}, \\[2ex] \cos\gamma = \dfrac{db}{\sqrt{db^2 + dc^2 + dc'^2}}. \end{cases}$$

Prenons pour axe des z une parallèle à la direction (α, β, γ) : cela revient à supposer

$$dc = 0, \quad dc' = 0,$$

et les formules (7) se mettent sous la forme

$$(13)\qquad \begin{cases} dx = ydb + dh, \\ dy = -xdb + dh', \\ dz = dh''. \end{cases}$$

Les deux premières de ces équations, tout à fait semblables aux deux premières des équations (10), montrent que le déplacement, estimé parallèlement au plan des xy, peut être regardé comme produit par une rotation autour d'un axe parallèle à l'axe des z.

De là ce résultat bien connu, énoncé pour la première fois par Poinsot en 1834, que *tout déplacement infiniment petit d'une figure invariable peut être produit par un mouvement de rotation instantané autour d'un axe qui glisse infiniment peu sur lui-même.*

En prenant l'axe de rotation pour axe des z, on a les formules simples

$$(14)\qquad \begin{cases} dx = y\,db, \\ dy = -x\,db, \\ dz = dh'', \end{cases}$$

dans lesquelles db est la *quantité angulaire de rotation*, et dh'' la *quantité de glissement.*

Des formules (7) et (14) on peut déduire sans difficulté toutes les propriétés géométriques du déplacement infiniment petit d'un corps solide, en tant qu'il ne s'agit que des vitesses des différents points du corps, propriétés qui font l'objet d'un beau Mémoire de M. Chasles (*Comptes rendus*, 26 juin 1843).

7. Mais hâtons-nous de passer à un sujet moins étudié, à la question des accélérations.

Les équations (7) différentiées donnent

$$(15)\qquad \begin{cases} d^2x = yd^2b + zd^2c + dy\,db + dz\,dc + d^2h, \\ d^2y = -xd^2b + zd^2c' - dx\,db + dz\,dc' + d^2h', \\ d^2z = -xd^2c - yd^2c' - dx\,dc - dy\,dc' + d^2h'', \end{cases}$$

ou, en remplaçant dx, dy, dz par leurs valeurs (7),

$$(16)\qquad \begin{cases} d^2x = -(db^2 + dc^2)\,x + (d^2b - dc\,dc')\,y \\ \qquad + (d^2c + db\,dc')\,z + db\,dh' + dc\,dh'' + d^2h, \\ d^2y = -(d^2b + dc\,dc')\,x - (db^2 + dc'^2)\,y \\ \qquad + (d^2c' - db\,dc)\,z - db\,dh + dc'\,dh'' + d^2h', \\ d^2z = -(d^2c - db\,dc')\,x - (d^2c' + db\,dc)\,y \\ \qquad - (dc^2 + dc'^2)\,z - dc\,dh - dc'\,dh' + d^2h''. \end{cases}$$

Si l'on prend pour axe des z l'axe instantané glissant, il faut faire dans ces équations

$$dc = 0, \quad dc' = 0, \quad dh = 0, \quad dh' = 0;$$

elles deviennent ainsi

$$(17) \quad \begin{cases} d^2x = -xdb^2 + yd^2b + zd^2c + d^2h, \\ d^2y = -xd^2b - ydb^2 + zd^2c' + d^2h', \\ d^2z = -xd^2c - yd^2c' + z.0 + d^2h''. \end{cases}$$

Les coefficients de x, y, z sont les éléments du déterminant gauche

$$\begin{vmatrix} -db^2 & d^2b & d^2c, \\ -d^2b & -db^2 & d^2c' \\ -d^2c & -d^2c & 0 \end{vmatrix}.$$

La valeur de ce déterminant est

$$-db^2(d^2c^2 + d^2c'^2);$$

elle ne s'annule que pour

$$db = 0,$$

ou

$$d^2c = 0, \quad d^2c' = 0,$$

c'est-à-dire seulement dans le cas où le corps n'a qu'un mouvement de translation et dans celui où l'axe instantané conserve la même direction. Donc, dans le déplacement continu le plus général d'un corps solide, *il existe un point dont l'accélération est nulle*. Les coordonnées de ce point sont fournies par les équations

$$(18) \quad \begin{cases} xdb^2 - yd^2b - zd^2c = d^2h, \\ xd^2b + ydb^2 - zd^2c' = d^2h', \\ xd^2c + yd^2c' = d^2h''. \end{cases}$$

8. Pour déterminer sa position, il faut d'abord fixer

la signification géométrique des quantités $d^2 c$, $d^2 c'$, $d^2 h$, $d^2 h'$, $d^2 h''$.

On voit facilement, en différentiant les formules (12), que, $-d\alpha$ et $-d\beta$ étant les compléments des angles que le nouvel axe instantané fait avec les axes des x et des y, on a

$$d^2 c = db\, d\beta, \quad d^2 c' = - db\, d\alpha. \tag{19}$$

Si l'on prend pour plan des yz un plan parallèle à ce nouvel axe, $d\alpha$ sera nul, et par suite on aura

$$d^2 c' = 0.$$

$d\beta$ sera l'angle que forment les deux axes instantanés consécutifs; par conséquent $d^2 c$ sera *le produit de la quantité de rotation instantanée db par l'angle infiniment petit dβ des deux axes consécutifs.*

Les quantités $d^2 h$, $d^2 h'$ sont les déplacements parallèles aux axes des x et des y que subit l'origine des coordonnées par la rotation autour du nouvel axe instantané. Si l'on prend pour origine des coordonnées le pied de la plus courte distance des deux axes et qu'on désigne par dp cette plus courte distance, on reconnaît immédiatement que

$$d^2 h = 0, \quad d^2 h' = db . dp. \tag{20}$$

Quant à $d^2 h''$, c'est la *variation de la quantité de glissement dh''*.

Lors donc qu'on prend pour axe des z l'axe instantané glissant, pour plan des yz le plan parallèle aux deux axes instantanés consécutifs, et pour origine le pied de la plus courte distance de ces deux axes, les formules qui donnent l'accélération prennent la forme

$$\left\{ \begin{aligned} d^2 x &= - x db^2 + y d^2 b + z db\, d\beta, \\ d^2 y &= - x d^2 b - y db^2 + db\, dp, \\ d^2 z &= - x db\, d\beta + d^2 h''. \end{aligned} \right. \tag{21}$$

Par suite, le *point sans accélération* a pour coordonnées

$$(22)\quad \begin{cases} x = \dfrac{d^2 h''}{db\, d\beta}, \\ y = \dfrac{dp}{db} - \dfrac{d^2 h'' d^2 b}{d\beta\, db^3}, \\ z = \dfrac{d^2 h''}{b\beta^2} - \dfrac{dp.d^2 b}{d\beta\, db^2} + \dfrac{d^2 h'' d^2 b^2}{d\beta^2 db^4}. \end{cases}$$

9. Si l'on transporte l'origine en ce point sans changer la direction des axes de coordonnées, les formules de l'accélération deviennent

$$(23)\quad \begin{cases} d^2x = -\,xdb^2 + yd^2b + zdb\,d\beta, \\ d^2y = -\,xd^2b - ydb^2, \\ d^2z = -\,xdb\,d\beta. \end{cases}$$

Elles ne sont autres que celles qui exprimeraient l'accélération des différents points du corps si celui-ci tournait sans glissement, avec la même vitesse de rotation, autour d'un axe passant par l'origine des coordonnées, et parallèle, dans ses deux positions consécutives, à l'axe instantané glissant. On appelle, pour cette raison, le point sans accélération *centre des accélérations*.

10. La dernière des équations (23) montre que l'accélération d'un point, estimée parallèlement à l'axe instantané, est proportionnelle à la distance de ce point au plan passant par le centre des accélérations et parallèle aux deux axes instantanés consécutifs.

Si l'on multiplie la première des équations (23) par x, la deuxième par y et la troisième par z, et qu'on les ajoute, on obtient

$$xd^2x + yd^2y + zd^2z = -db^2(x^2 + y^2),$$

ou, en désignant par r la distance de l'origine au point

x, y, z, et par ρ la distance de ce point à l'axe des z,

$$(24)\qquad \frac{x}{r}\,d^2x + \frac{y}{r}\,d^2y + \frac{z}{r}\,d^2z = -\,db^2.\,\frac{\rho^2}{r}.$$

De là le théorème suivant : *La composante de l'accélération dans le sens du rayon vecteur d'un point du corps est directement proportionnelle au carré de la distance de ce point à l'axe des z, et en raison inverse de sa distance à l'origine.*

11. Les formules (21) ou (23), jointes aux formules (14), fournissent immédiatement la solution d'une série de questions sur les accélérations, comme par exemple le lieu des points sans accélération tangentielle ou sans accélération normale, le lieu des points dont l'accélération normale est perpendiculaire ou parallèle à l'axe instantané, etc. Elles font connaître le plan osculateur et le rayon de courbure de la trajectoire de chaque point du corps, et elles permettent, connaissant les trajectoires de deux des points du corps et la surface sur laquelle s'appuie constamment un troisième point, de déterminer tous les éléments nécessaires à la construction de ce plan osculateur et de ce rayon de courbure.

On peut consulter à ce sujet un Mémoire intéressant de M. Resal, inséré au XXXVII[e] Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, ou le *Traité de Cinématique pure* du même auteur.

12. Le calcul des *suraccélérations*, et en général des accélérations de divers ordres, se ferait comme celui des accélérations simples, en différentiant successivement les équations (7) qui expriment les composantes des déplacements parallèles aux axes de coordonnées.

Nous n'entrerons pas dans ces développements, le but de ce travail étant seulement d'établir, par un procédé nouveau, les formules propres à la résolution de toutes les questions que l'on peut se poser sur le déplacement continu d'un système invariable.

NOTE SUR LES SURFACES GAUCHES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. H. DURRANDE,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

INTRODUCTION.

1. L'homographie a pris une place importante dans l'étude des sections coniques; aussi, presque tous les ouvrages classiques parus dans ces derniers temps en exposent les principes et en montrent les applications les plus usuelles en Géométrie plane; mais il me semble que ces notions prendraient plus d'importance encore aux yeux des élèves si on leur montrait la simplicité que l'usage de l'homographie peut apporter dans la théorie des surfaces, et principalement dans les considérations que l'on emploie en Géométrie descriptive afin d'éviter de se servir de l'analyse. Sans doute on peut trouver des applications du genre de celles que j'ai en vue dans de très-beaux Mémoires de M. Chasles, que l'on doit regarder comme un des principaux créateurs de la Géométrie moderne; mais il n'est pas souvent facile de se procurer ces Mémoires, disséminés dans divers recueils. Parmi les nombreux ouvrages de Géométrie descriptive, je citerai l'excellent Traité de M. de la Gournerie, qui démontre les propriétés des surfaces gauches du second degré par des considérations d'homographie; mais cet ouvrage n'est pas précisément un de ces Traités élémentaires qui sont entre les mains de tous les élèves, et j'ai pensé qu'il ne

serait peut-être pas inutile de résumer une théorie des surfaces réglées du second degré dans laquelle on ne ferait usage que de considérations géométriques. Cette Note n'a d'autre objet que de tracer aux élèves de Mathématiques spéciales le programme d'une leçon qu'ils développeront eux-mêmes avec la plus grande facilité.

Je suppose que le lecteur possède les principes de l'homographie plane, qu'il trouvera exposés dans plusieurs excellents ouvrages élémentaires; nous nous servirons surtout de l'existence des points doubles dans deux divisions homographiques sur la même droite, des théorèmes sur les coniques résultant des intersections de droites homologues de deux faisceaux homographiques, ou considérées comme enveloppes de droites mobiles déterminant des divisions homographiques sur deux droites fixes situées dans un même plan.

Enfin je prie le lecteur de vouloir bien tracer lui-même les figures indiquées dans les démonstrations, ce qui ne présentera aucune difficulté.

HOMOGRAPHIE DANS L'ESPACE.

2. *Définitions.* — Si, par deux droites fixes situées d'une manière quelconque dans l'espace, on fait passer deux faisceaux de plans, on dira que ces deux faisceaux sont homographiques s'ils déterminent deux divisions homographiques sur la même droite ou sur deux droites différentes.

Deux faisceaux homographiques déterminent deux divisions homographiques sur une transversale quelconque, ce qui se justifie absolument comme pour les faisceaux rectilignes, en montrant que le rapport anharmonique de quatre segments pris sur la transversale est égal au rapport anharmonique des sinus des angles dièdres formés par les plans qui divisent la droite.

On sait que lorsque deux droites sur lesquelles sont tracées deux divisions homographiques coïncident, il ne peut y avoir plus de deux points doubles, sans quoi tous les points correspondants coïncident; ceci est d'une grande importance pour ce qui va suivre.

Nous appellerons *axe* d'un faisceau de plans la droite A par laquelle passent tous les plans du faisceau, et nous désignerons par [A, B] le système de deux faisceaux homographiques de plans ayant les droites A et B pour axes; nous verrons que l'on peut encore attacher une autre signification à cette notation.

Les axes A et B d'un système sont évidemment eux-mêmes des transversales des deux faisceaux et sont par conséquent divisés homographiquement par les plans qui les composent, ce qui revient encore à dire que les droites résultant de l'intersection des plans homologues du système déterminent des divisions homographiques sur les axes.

Tout plan sécant détermine, dans un système [A, B], deux faisceaux homographiques rectilignes.

Je vais indiquer maintenant, sous forme de théorèmes, les propriétés générales d'un système [A, B] de deux faisceaux homographiques, puis j'examinerai séparément les diverses surfaces réglées qui peuvent résulter d'un pareil système suivant la position relative des axes.

3. Théorème I. — *Étant donnés deux faisceaux homographiques de plans, le lieu des droites d'intersection des plans homologues est une surface du second degré.*

(Je conviens d'appeler *surface du second degré* une surface dont toutes les sections planes sont des courbes du second degré; ou bien encore, une surface qu'une droite ne peut rencontrer en plus de deux points, à moins d'être entièrement située sur la surface.)

Première démonstration. — En se plaçant au premier point de vue de la définition précédente, il suffit de remarquer que tout plan sécant détermine, dans le plan [A, B], deux faisceaux rectilignes homographiques, dont les droites homologues déterminent une conique par leurs intersections mutuelles.

Deuxième démonstration. — En se plaçant au second point de vue, il suffit de remarquer que les deux divisions homographiques déterminées sur une transversale quelconque du système [A, B] ne peuvent avoir plus de deux points doubles, à moins de coïncider complétement.

Corollaire. — *Toute droite qui détermine sur deux droites quelconques* A, B *deux divisions homographiques décrit une surface du second degré.* Car cette droite peut être considérée comme intersection de plans homologues d'un système [A', B].

Théorème II. — *Les intersections d'une surface résultant d'un système de deux faisceaux homographiques de plans par une série de plans parallèles sont deux coniques homothétiques.*

Lemme. — *Étant donnés deux systèmes composés chacun de deux faisceaux homographiques rectilignes* $[O, O']$, $[O_1, O'_1]$, *si les droites de l'un des systèmes sont respectivement parallèles à celles de l'autre, les deux coniques résultantes sont homothétiques, quelles que soient les positions des sommets des faisceaux.*

Ce lemme, évident pour les coniques à branches infinies, se démontre aisément de la manière suivante, quelle que soit la forme des coniques. Soient OM, O'M' deux cordes parallèles de la conique [O, O']; le diamètre conjugué de ces cordes est la droite qui joint leurs milieux et qui passe, par conséquent, par le point I où se coupent les droites OM′, O′M; ce diamètre est donc la médiane du triangle OIM; soient de même O_1M_1, $O'_1M'_1$ deux cordes de la seconde conique $[O_1, O'_1]$ parallèles entre elles et à OM, O′M′; par hypothèse, $O_1M'_1$ sera parallèle à OM′ et O'_1M_1 à O′M; donc les deux triangles OIM, $O_1I_1M_1$ auront leurs côtés parallèles, donc leurs médianes seront aussi parallèles; ce qui démontre que les deux coniques [O, O′], $[O_1, O'_1]$ ont un même système de diamètres conjugués et sont par conséquent homothétiques.

Démonstration. — Il est évident qu'une série de plans parallèles détermineront dans un système [A, B] des couples de faisceaux rectilignes homographiques; tous ces systèmes rectilignes projetés sur l'un des plans sécants seront bien dans le cas des systèmes rectilignes [O, O′], $[O_1, O'_1]$ qui ont été considérés dans le lemme précédent; leurs sommets seront placés d'une manière quelconque, mais les droites correspondantes dans les différents systèmes seront parallèles; donc toutes les coniques résultantes seront des courbes homothétiques.

Systèmes homothétiques dans l'espace. — Nous dirons que deux systèmes [A, B], $[A_1, B_1]$ composés chacun de deux faisceaux homographiques de plans sont homothétiques si leurs axes A et A_1, B et B_1 sont respectivement parallèles et si les plans correspondants des deux systèmes sont parallèles.

Ceci posé, l'application du lemme qui nous a servi déjà à démontrer le théorème II fournit immédiatement le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Tout plan sécant détermine dans deux systèmes homothétiques de plans deux systèmes homothétiques rectilignes, et par suite dans les surfaces résultantes des coniques homothétiques.*

Les trois théorèmes que nous venons d'énoncer renferment, comme on va le voir, toute la théorie des surfaces réglées du second degré.

La notation qui nous a servi à représenter un système de faisceaux homographiques de plans nous servira à représenter en même temps la surface résultant de l'intersection des plans homologues des deux faisceaux.

Nous allons étudier maintenant les diverses surfaces que peut donner le système [A, B].

CÔNES DU SECOND DEGRÉ.

4. J'appelle cône du second degré toute surface conique dont toutes les sections planes sont des coniques, ou qui ne peut être rencontrée par une droite en plus de deux points.

Théorème I. — *Toute surface* [A, B] *dont les axes homographiques se rencontrent est un cône du second degré.*

La surface est du second degré d'après le théorème I du n° 3, et toutes les génératrices rectilignes passent par le point de concours des axes.

Propriétés des cônes du second degré. — Dans tout cône du second degré, les sections par des plans parallèles sont homothétiques (3, théor. II). Ces sections sont l'une quelconque des trois coniques.

Toutes les coniques homothétiques obtenues en coupant le cône par des plans parallèles ont leurs centres sur une même ligne droite qu'on nomme diamètre conjugué de la direction des plans sécants; ceci se démontre par des considérations géométriques fort simples.

Tout plan mené par le sommet du cône divise en deux parties égales les cordes parallèles au diamètre conjugué de ce plan; encore très-simple à démontrer.

Tout plan mené par le sommet du cône qui est le centre de la surface se nomme plan diamétral.

Ceux de ces plans qui sont perpendiculaires aux directions des cordes qu'ils divisent en deux parties égales se nomment plans principaux.

On trouve aisément les trois plans principaux d'un cône; ainsi on commencera par faire voir que le plan qui contient les génératrices faisant entre elles un angle maximum est un plan principal; il suffira pour cela de mener un plan sécant perpendiculaire à l'une de ces génératrices, et on verra facilement que l'intersection des deux plans est un axe de la conique déterminée dans le cône par le plan sécant; puis on verra que le plan mené par la bissectrice de l'angle maximum perpendiculairement au premier plan principal est un second plan principal; enfin le troisième est le plan mené par le sommet du cône perpendiculaire à l'intersection des deux premiers.

Parmi les sections elliptiques du cône, on doit remarquer deux séries de plans parallèles donnant des sections circulaires; ces plans sont nécessairement perpendiculaires à un plan principal.

Du reste, l'étude purement géométrique des propriétés du cône est tellement simple, que je n'en parle ici que pour tracer un programme complet de la théorie des surfaces réglées du second degré.

Mais de même que dans l'homographie plane il y a deux modes de génération des coniques, nous aurons aussi deux modes de génération des surfaces réglées : soit en les considérant comme lieu des intersections de plans, ou bien comme enveloppes de plans mobiles; le théorème I relatif au cône correspond au premier mode, le suivant correspond au second.

Théorème II. — *Tout plan divisant homographique-*

ment deux droites fixes et passant par un point fixe a pour enveloppe de ses positions un cône du second degré tangent aux deux plans menés par chacune des droites et le point fixe.

On voit en effet que le plan mobile qui décrit bien une surface conique a pour trace sur un plan quelconque une tangente à une conique tangente aux traces des deux plans fixes; c'est l'application du théorème correspondant d'homographie plane.

5. On pourra représenter un cône du second degré considéré comme surface résultante d'un système homographique par la notation $[A_0, B_0]$, qui exprimera que les axes A et B des deux faisceaux se rencontrent, ou que leur plus courte distance est nulle.

Les différentes manières d'établir la correspondance des plans homologues des deux faisceaux seront les différents modes de génération du cône.

Exemples. — Droite s'appuyant sur une conique et passant par un point fixe.

Plan passant par un point fixe et tangent à une conique.

6. Cônes supplémentaires. — *Si par le sommet d'un cône* $[A_0, B_0]$ *on mène les plans tangents à ce cône et des perpendiculaires à ces plans, le lieu de ces perpendiculaires est un cône du second degré* $[a_0, b_0]$, *qu'on nomme le cône supplémentaire du premier.*

Il est aisé de voir en effet que les faisceaux ayant pour axes les droites a_0, b_0, respectivement perpendiculaires aux plans tangents suivant A_0 et B_0, et pour intersections les droites m_0 perpendiculaires aux plans tangents suivant les arêtes M_0 du premier cône, sont homographiques; car les trois plans tangents en A_0, B_0, M_0 forment un angle trièdre, et les trois perpendiculaires à ces plans a_0, b_0, m_0 un trièdre supplémentaire dans lequel les angles dièdres sont les suppléments des faces du premier; or on peut dire que le plan tangent mobile suivant M_0 divise homographiquement les deux faces fixes; donc dans le système $[a_0, b_0]$ les deux faisceaux sont homographiques, puisque le sinus de l'angle dièdre de deux plans est égal au sinus de l'angle de la face supplémentaire.

Ainsi donc la surface $[a_0, b_0]$ est un cône du second degré, et la démonstration précédente justifie suffisamment la dénomination de *cônes supplémentaires*. D'ailleurs, comme pour les trièdres supplémentaires, les propriétés des deux cônes sont réciproques.

Tout le monde connaît les belles propriétés des cônes supplémentaires indiquées par M. Chasles; aux deux séries de sections circulaires ou *plans cycliques* correspondent dans le cône supplémentaire deux droites qui leur sont perpendiculaires et que l'auteur de la *Géométrie supérieure* nomme *lignes focales* du second cône, et il y a toujours réciprocité.

Je terminerai ce qui concerne le cône par l'indication de ces deux énoncés de M. Chasles, qui sont des applications immédiates des théorèmes I et II du n° 4.

1° *Si, autour de deux droites fixes situées dans un même plan, on fait tourner deux plans rectangulaires, la droite d'intersection de ces deux plans décrira un cône du second degré dont les plans cycliques seront respectivement perpendiculaires aux deux droites.*

2° *Étant donnés deux plans fixes, si un point de leur intersection commune est pris comme sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés se meuvent dans deux plans fixes respectivement, le plan de cet angle enveloppera un cône du second degré tangent aux deux plans fixes* *et dont les lignes focales seront perpendiculaires à ces deux plans respectivement.*

On résoudra encore très-simplement par les considérations précédentes la question suivante :

Trouver le lieu des points de l'espace dont les distances à deux droites fixes qui se coupent sont dans un rapport constant.

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR CERTAINS PARADOXES ET SOLUTION DE LA QUESTION 705;

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,
Capitaine d'artillerie.

On emploie souvent avec trop peu de circonspection un genre de raisonnement qui en exige beaucoup, et qui consiste, dans les questions d'analyse appliquée, à juger *à priori* du nombre des conditions géométriques par celui des équations, ou réciproquement.

De l'abus de cette pratique peuvent résulter de nombreux paradoxes dans lesquels la Géométrie est mise en contradiction avec l'Algèbre. Quant à l'erreur, elle vient toujours de ce qu'en toute rigueur il n'est permis de raisonner de la sorte qu'*à posteriori*, c'est-à-dire qu'après une discussion complète des équations, qui peuvent, en se confondant, en se séparant ou en se dédoublant, démentir bien des conclusions prématurées.

Il m'est facile de présenter divers genres d'exemples qui justifieront suffisamment ces réflexions critiques, dont appréciera peut-être l'opportunité le lecteur qui aura été frappé, comme je l'ai été, de voir certaines questions d'examen se jouer trop hardiment du danger que je signale.

On regarde comme généralement déterminé le problème de la construction d'un polygone de n côtés, lorsqu'on a $2n - 3$ conditions ou équations; pourvu seulement que les angles, s'ils sont tous connus, ne soient pris que pour $n - 1$ conditions, la Géométrie ayant démontré la nécessité de cette restriction. On expliquera, par exemple, que le problème de la construction d'un polygone inscriptible dont les n côtés sont donnés doit être considéré comme déterminé, en disant tout simplement que la sujétion d'inscriptibilité, qui force le cercle de trois sommets à passer par les $n - 3$ autres, fournit les $n - 3$ équations complémentaires. Cependant ce raisonnement, qui ne trompe pas dans ce cas, conduit à un grossier paradoxe, si l'on remplace la sujétion d'inscriptibilité par celle de circonscriptibilité, susceptible pourtant, comme la première, de fournir $n - 3$ équations.

La recherche du lieu du point d'intersection des deux droites de chaque système unissant les quatre points où une conique fixe est rencontrée par les côtés d'un angle variable dont le sommet occupe un point fixe, semble *à priori* une question indéterminée, faute d'un nombre suffisant d'équations. On sait bien cependant que le point dont il s'agit reste sur une droite invariable qu'on a nommée la *polaire du point fixe*.

En ne consultant que le nombre des équations, l'indétermination paraît plus grande encore, si on demande le lieu des centres de toutes les coniques qui peuvent passer par les quatre points où un cercle à centre fixe et à rayon variable rencontre l'une quelconque des courbes d'un système de coniques homothétiques. Ces centres sont cependant tous sur une conique déterminée.

Un exemple très-simple d'un dédoublement d'équation se rencontre, comme on sait, dans la question des coniques équilatères. On voit l'équation qui exprime l'égalité des carrés des axes se dédoubler, et l'Algèbre se mettre d'accord avec la Géométrie, en imposant deux conditions pour que l'ellipse soit équilatère, tandis qu'une seule suffit pour que l'hyperbole le soit (*).

La théorie des surfaces de révolution du deuxième degré fournit un exemple d'une équation dont le dédoublement est plus facile à deviner qu'à opérer. C'est sur cet exemple que j'avais cherché à appeler l'attention des lecteurs des *Annales*, en proposant cette question qui n'a pas été résolue :

Expliquer comment il se fait que deux conditions soient nécessaires pour qu'une surface du deuxième degré soit de révolution, lorsqu'on sait qu'il suffit que l'équation en S *ait deux racines égales.*

On peut, en effet, exprimer qu'une surface du deuxième degré est de révolution en écrivant tout simplement que l'équation en S, prise sous la forme ordinaire des équations du troisième degré, a deux racines égales. On n'obtient ainsi qu'une seule équation entre les coefficients, et on serait exposé à croire qu'il suffit d'une condition pour qu'une surface du deuxième degré soit de révolution, si on ne découvrait par d'autres moyens qu'en réalité il en faut deux. On peut deviner alors que l'équation unique doit se dédoubler; mais saisir la manière dont le dédoublement s'opère n'est pas chose facile. Cette difficulté est précisément ce qui rend le cas intéressant, comme exemple du danger des conclusions prématurées, puisqu'il montre qu'on peut avoir de grandes peines, non-seulement à découvrir *à priori*, mais à vérifier *à posteriori* qu'une équation en se dédoublant équivaut à deux conditions.

(*) Paradoxe expliqué par M. Gerono, t. XVII, p. 77.

Voici maintenant une méthode pour déduire de la théorie des racines égales la double condition qu'on obtient autrement, méthode qui met d'ailleurs bien en évidence la particularité par suite de laquelle l'équation en S a besoin de deux conditions pour avoir deux racines égales.

Je représenterai par

$$\begin{aligned}F(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) + M(x-\beta)(x-\gamma)\\ + N(x-\alpha)(x-\gamma) + P(x-\alpha)(x-\beta) = 0\end{aligned}$$

le type général des équations en S. La seule particularité à remarquer est que les trois coefficients M, N, P sont tous trois de même signe. Je supposerai qu'il n'y en a aucun de nul, pour rester dans le cas général.

Posons maintenant

$$\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma);$$

par dérivation de $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, on obtiendra l'identité

$$\begin{aligned}&F(x)\varphi'(x) - F'(x)\varphi(x)\\ &= M(x-\beta)^2(x-\gamma)^2 + N(x-\alpha)^2(x-\gamma)^2 + P(x-\alpha)^2(x-\beta)^2.\end{aligned}$$

Pour une racine double, a, de $F(x) = 0$, on aura

$$0 = M(a-\beta)^2(a-\gamma)^2 + N(a-\alpha)^2(a-\gamma)^2 + P(a-\alpha)^2(a-\beta)^2.$$

Mais M, N, P étant de même signe, cette égalité ne peut avoir lieu que si deux des différences sont nulles. Soit donc $a = \alpha = \beta$; en substituant dans $F(x)$, il viendra

$$\frac{F(x)}{(x-a)^2} = x - \gamma + P + N + \frac{M(x-\gamma)}{x-a}.$$

Comme $F(x)$ doit être divisible par $(x-a)^2$, et que M n'est pas nul, il faudra que l'on ait encore $a = \gamma$. On trouve donc, finalement, les deux conditions

$$\alpha = \beta = \gamma.$$

CONSTRUCTION DES AXES D'UNE ELLIPSE DONNÉE PAR DEUX DIAMÈTRES CONJUGUÉS;

PAR M. L. TROUILLET,
Élève de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis
(classe de M. Vacquant).

Je rappellerai d'abord les propriétés suivantes de l'ellipse :

1° Un point M d'une droite AB de longueur constante, glissant sur deux axes rectangulaires Ox, Oy, engendre une ellipse dont les axes sont dirigés suivant Ox et Oy, et égaux à 2MA et 2MB.

2° La normale au point M s'obtient en joignant ce point au point P de concours des parallèles menées aux axes par les points A et B.

3° Si AB et A'B' sont deux positions rectangulaires de la droite mobile, les diamètres OM et OM' sont conjugués. En effet, l'égalité des triangles PMA, OA'M' entraîne celle des angles $\widehat{MPA}$ et $\widehat{A'OM'}$, et par suite la perpendicularité de la normale PM sur le diamètre OM'. Donc, si OM'_1 est parallèle à MP et terminée à AB, $MP = OM' = OM'_1$ et l'angle M'_1OM' est droit.

D'où la construction suivante :

Soient OM, OM' les diamètres donnés; je mène sur OM' la perpendiculaire $OM_1 = OM'$: si je décris, du milieu H de MM'_1 pour centre, avec OH pour rayon, une circonférence qui coupe MM'_1 en A et B, les axes seront dirigés suivant OA et OB, et MB, MA seront leurs demi-longueurs.

Remarque. — On a, dans le triangle OMM'_1,

$$2\overline{OH}^2 + 2\overline{MH}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OM'_1}^2,$$

et

$$\overline{MM'_1}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OM'_1}^2 - 2OM.OM'_1 \cos \widehat{MOM'_1}.$$

Posant

$$OM = a', \quad OM'_1 = b',$$
$$MB = a, \quad MA = b, \quad MOM' = \theta,$$

il vient

$$2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a'^2 + b'^2,$$

d'où

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2,$$

et

$$(a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\theta,$$

d'où

$$ab = a'b' \sin\theta.$$

(Théorèmes connus.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 765

(voir 2e série, tome V, page 336);

PAR M. GAYON,
Candidat à l'École Normale.

On partage les côtés d'un carré en n parties égales; par les points de division on mène des parallèles aux côtés, de manière à partager la figure en n^2 petits carrés. Pour se rendre d'un sommet du carré donné au *sommet opposé, on peut suivre plusieurs lignes brisées différentes; pour tous ces chemins, il y en a qui sont minimums et égaux entre eux: on propose d'en trouver le nombre.* (J.-Ch. Dupain.)

Il est facile de constater l'existence de ces chemins minimums, et de voir qu'ils sont tous égaux à la somme de deux côtés du carré donné, c'est-à-dire à $2n$ petites divisions. De plus, tous ces chemins comprennent n divisions horizontales et n divisions verticales. Le problème revient donc à trouver le nombre des permutations avec répétition de deux sortes de lignes répétées chacune n fois. Ce nombre est donné par la formule

$$\frac{P_{2n}}{P_n \cdot P_n} = C_{2n}^n = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots n}.$$

Remarquons que ce quotient est précisément égal à la somme des carrés des coefficients du binôme, et que, comme l'indique M. Bertrand dans ses Exercices, on peut l'écrire sous la nouvelle forme

$$\frac{2.6.10.14\ldots(4n-2)}{1.2.3\ldots n}.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Annequin, du lycée de Grenoble; Mandagot et Daujon, du lycée Saint-Louis; Violet, de l'École de Sorrèze; Giard et Crépin, du lycée de Douai; Leclerc, du lycée de Douai; Laisant, capitaine du génie.

Question 794

(voir 2e série, t. VI, p. 94).

Cette question, qui ne consiste que dans une identité à vérifier, a été résolue par MM. Paul Laugier, Gautier, du lycée Louis-le-Grand; Sandier, du lycée de Lyon; Honoré Pi, de Sorrèze; Jourdan, du collége Chaptal; Lemoine, du lycée de Saint-Omer; Welsch, Rouhier, Driant, du lycée de Metz; Plane, du lycée de Besançon; Perronne, du collége Stanislas. M. Paul Mansion met le premier membre de l'identité sous forme de déterminant et arrive par quelques transformations à un déterminant dont une colonne ne contient que des zéros. La place nous manque pour citer une dizaine de solutions qui nous sont parvenues depuis que ceci est imprimé.

Question 792

(voir 2e série, t. VI, p. 48);

PAR M. A. VAISON,
Élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant).

Quand on change deux cercles en deux autres cercles au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, le rapport du carré de la tangente commune au rectangle des diamètres est le même dans la figure primitive et dans la figure transformée.

(J. CASEY.)

Si $f(x,y)=0$ est l'équation d'une courbe, l'équation de sa transformée par rayons vecteurs réciproques, suivant une puissance k positive ou négative, l'origine étant le pôle de la transformation, est

$$f\left(\frac{kx}{x^2+y^2},\quad \frac{ky}{x^2+y^2}\right)=0.$$

Considérons en particulier les cercles représentés par les équations suivantes :

$$(1)\qquad x^2+y^2-2ax-2by+M=0,$$

$$(2)\qquad x^2+y^2-2a'x-2b'y+M'=0.$$

Le pôle de transformation étant l'origine, et ce point étant d'ailleurs situé d'une manière quelconque dans le plan des deux cercles, les transformées suivant la puissance k des courbes (1) et (2) seront deux cercles représentés par les équations suivantes :

$$(3)\qquad x^2+y^2-\frac{2ak}{M}x-\frac{2bk}{M}y+\frac{k^2}{M}=0,$$

$$(4)\qquad x^2+y^2-\frac{2a'k}{M'}x-\frac{2b'k}{M'}y+\frac{k^2}{M'}=0.$$

Cela posé, remarquons que le carré de la tangente commune à deux cercles, dont la distance des centres est d et dont les rayons sont R et R′, est

$$d^2-(R-R')^2 \quad \text{ou} \quad d^2-(R+R')^2,$$

suivant que l'on considère la tangente commune extérieure ou la tangente commune intérieure. Or, dans les deux cercles représentés par les équations (1) et (2),

$$d^2=(a-a')^2+(b-b')^2,$$
$$R-R'=\sqrt{a^2+b^2-M}-\sqrt{a'^2+b'^2-M'},$$
$$R+R'=\sqrt{a^2+b^2-M}+\sqrt{a'^2+b'^2-M'}.$$

Donc le rapport du carré de la tangente commune au rectangle des diamètres est, pour ces deux courbes,

$$\frac{M+M'-2aa'-2bb'+2\sqrt{(a^2+b^2-M)(a'^2+b'^2-M')}}{4\sqrt{(a^2+b^2-M)(a'^2+b'^2-M')}},$$

ou bien

$$\frac{M+M'-2aa'-2bb'-2\sqrt{(a^2+b^2-M)(a'^2+b'^2-M')}}{4\sqrt{(a^2+b^2-M)(a'^2+b'^2-M')}}.$$

Le premier convient à la tangente commune extérieure, le second à la tangente commune intérieure.

Les rapports correspondants pour les cercles représentés par les équations (3) et (4) sont respectivement

$$\frac{\dfrac{k^2}{M}+\dfrac{k^2}{M'}-2(aa'+bb')\dfrac{k^2}{MM'}+2\sqrt{\left(\dfrac{a^2k^2}{M^2}+\dfrac{b^2k^2}{M^2}-\dfrac{k^2}{M}\right)\left(\dfrac{a'^2k^2}{M'^2}+\dfrac{b'^2k^2}{M'^2}-\dfrac{k^2}{M'}\right)}}{4\sqrt{\left(\dfrac{a^2k^2}{M^2}+\dfrac{b^2k^2}{M^2}-\dfrac{k^2}{M}\right)\left(\dfrac{a'^2k^2}{M'^2}+\dfrac{b'^2k^2}{M'^2}-\dfrac{k^2}{M'}\right)}};$$

$$\frac{\dfrac{k^2}{M}+\dfrac{k^2}{M'}-2(aa'+bb')\dfrac{k^2}{MM'}-2\sqrt{\left(\dfrac{a^2k^2}{M^2}+\dfrac{b^2k^2}{M^2}-\dfrac{k^2}{M}\right)\left(\dfrac{a'^2k^2}{M'^2}+\dfrac{b'^2k^2}{M'^2}-\dfrac{k^2}{M'}\right)}}{4\sqrt{\left(\dfrac{a^2k^2}{M^2}+\dfrac{b^2k^2}{M^2}-\dfrac{k^2}{M}\right)\left(\dfrac{a'^2k^2}{M'^2}+\dfrac{b'^2k^2}{M'^2}-\dfrac{k^2}{M'}\right)}}$$

expressions qui, après réduction, sont identiques respectivement aux expressions (5) et (6). La question est donc résolue.

Note. — Autres solutions de MM. Laisant, Kœhler, capitaines du génie; Fouret, sous-lieutenant du génie; E. Pellet, élève du lycée de Nîmes; Paul Vivier, du lycée de Strasbourg; Willière, professeur à Thuin (Belgique).

Question 797

(voir 2ᵉ série, t. VI, p. 95);

PAR MM. D'ANNOUX ET CAFFARELLI,
Élèves en Mathématiques élémentaires.

Tout quadrilatère, dans lequel les diagonales sont entre elles comme les sommes des produits des côtés qui comprennent ces diagonales, est inscriptible.

1. LEMME I. — *Étant donné un quadrilatère* ABCD, *si l'on fait varier ses angles sans modifier les longueurs des côtés, on peut amener ce quadrilatère à être inscriptible.* (Théorème connu.)

2. LEMME II. — *Si, dans le quadrilatère variable dont nous venons de parler, une des diagonales augmente, l'autre diminue.*

En effet, quand AC augmente, les angles B et D augmentent. On le voit en considérant les triangles ACD, ACB, dont deux côtés gardent la même longueur pendant que le troisième, AC, augmente. La somme $B + D$ des angles opposés à ce côté augmente. Donc la somme $A + C$ diminue, puisqu'on a constamment

$$A + C + B + D = 4 \text{ droits}.$$

Donc un au moins des angles A et C diminue. Donc la diagonale BD, opposée à ce côté, diminue comme étant le troisième côté d'un triangle dont deux côtés gardent la même longueur pendant que l'angle qu'ils comprennent diminue.

3. *Démonstration du théorème.* — Soient L, L' les diagonales du quadrilatère proposé, l et l' les diagonales du quadrilatère inscriptible qui a les mêmes côtés que le premier.

Si on applique à ce dernier quadrilatère le théorème relatif au rapport des diagonales, on trouve, pour le rapport $\frac{l}{l'}$, l'expression que l'hypothèse attribue à $\frac{L}{L'}$. On a donc

$$(1) \qquad \frac{l}{l'} = \frac{L}{L'}.$$

On peut en conclure $l = L$, $l' = L'$, car si l'on avait

$$(2) \qquad l > L,$$

on aurait inversement, d'après le lemme II,

$$(3) \qquad l' < L'.$$

Or, le système des inégalités (2) et (3) est incompatible avec l'égalité (1). Donc....

Note. — M. Périer, élève du lycée Charlemagne, a résolu la question à peu près de la même manière.

QUESTIONS.

804. Étant donnés m nombres en progression arithmétique, trouver le nombre de leurs combinaisons n à n, ayant la propriété que la somme des n nombres composant chaque combinaison ne surpasse pas le plus grand des nombres donnés. (Joseph SACCHI.)

805. On donne deux surfaces (S), (S′), la première fixe, l'autre se rapprochant indéfiniment de celle-ci. D'un point A de (S) et dans le plan tangent à cette surface on mène des tangentes à (S′). Quelle est la limite des positions de ces tangentes lorsque (S′) tend vers (S), de façon que le point où (S′) est touchée à chaque instant par un plan parallèle au plan tangent mené par le point A à (S) décrive une ligne qui coupe cette surface sous un angle fini? (Ossian BONNET.)

806. On donne cinq droites arbitraires, on prend un groupe de quatre de ces droites et l'on construit le couple des deux droites qui les rencontrent. D'un point quelconque de l'espace on mène la droite qui rencontre les deux droites de ce couple.

On pourra ainsi mener de ce point cinq droites, puisqu'il y a autant de couples de deux droites qu'il est possible de former de groupes de quatre droites avec les cinq droites données. Démontrer que les cinq droites ainsi déterminées sont dans un même plan. (MANNHEIM.)

807. Démontrer directement la propriété corrélative de la précédente.

808. $U = 0$ étant une équation algébrique, U_1, $U_2, \ldots$, $U_n, \ldots$, les dérivées successives du premier membre :

1° L'équation $U = 0$ aura des racines imaginaires, si l'on n'a pas, pour toutes les valeurs de n et de x,

$$\left(\frac{U_n}{1.2\ldots n}\right)^2 - 2\frac{U_{n-1}.U_{n+1}}{1.2\ldots(n-1).1.2\ldots(n+1)} + 2\frac{U_{n-2}.U_{n+2}}{1.2\ldots(n-2).1.2\ldots(n+2)} - 2\frac{U_{n-3}.U_{n+3}}{1.2\ldots(n-3).1.2\ldots(n+3)} + \ldots > 0,$$

l'existence d'un couple de racines imaginaires étant accusée, chaque fois que l'équation obtenue en égalant à o le premier membre de l'inégalité précédente n'a pas toutes ses racines imaginaires.

2° Le même théorème subsistera si l'on remplace les dérivées U_1, U_2,... par les dérivées de la fonction suivante,

$$V = U + A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_m,$$

formée au moyen des coefficients d'une équation à racines toutes réelles,

$$x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - \ldots \pm A_m = 0,$$

d'un degré égal ou inférieur au degré de $U = 0$.

(J.-J.-A. MATHIEU.)

809. Décrire un cercle qui rencontre trois droites données de manière que les cordes interceptées par ces droites sur ce cercle soient égales à une longueur donnée.

810. Même problème quand on remplace les trois droites par trois circonférences.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

(Tous les ouvrages annoncés se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

DARBOUX (Gaston). — *Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris.* 1° *Sur les surfaces orthogonales;*

2° *Propositions de Mécanique et d'Astronomie données par la Faculté.* In-4° de IV-48 pages ; Paris, 1866.

HOÜEL (Jules). — *Recueil de formules et de tables numériques.* In-8° de LXXII-64 pages ; Paris, 1866, Gauthier-Villars. — Prix : 4 fr. 50 c.

Il en sera rendu compte prochainement.

CHELINI (Domenico). — Sugli assi... *Sur les axes centraux des forces et des rotations dans l'équilibre et le mouvement des corps.* In-4° de 56 pages et 1 planche ; Bologne, 1866.

HERMITE. — *Sur l'équation du cinquième degré.* In-4° de 74 pages ; Paris, 1866. — Prix : 5 fr.

Résolution de l'équation par les fonctions elliptiques. Réduction à la forme $x^5 - x - a = 0$.

GOURNERIE (Jules DE LA). — *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques, avec des Notes par Arthur Cayley.* In-8° de XVIII-288 pages ; Paris, 1867, Gauthier-Villars. — Prix : 6 fr.

Cet ouvrage contient, avec divers développements, la matière de trois Mémoires présentés à l'Académie et jugés dignes d'être insérés dans le *Recueil des Savants étrangers*, sur le Rapport d'une Commission composée de MM. Bertrand, Chasles rapporteur.

GRUNERT. — *Archives de Mathématiques et de Physique*, t. XLVI, 1re livraison, 1867.

Ofterdinger et *Nagel*, Sur le quatrième porisme de Fermat. — *Zajaczkowski*, Sur le problème de la rotation d'un corps solide. — *Spitzer*, Intégration de l'équation différentielle

$$x\frac{d^n y}{dx^n} + \lambda\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \nu\left(x\frac{dy}{dx} + \mu y\right).$$

— *Franz Muller*, Condition pour qu'une équation ait des racines égales et de signes contraires. — *Dienger*, Sur la théorie des équations différentielles. — *Börsch*, Sur l'erreur moyenne de plusieurs mesures trigonométriques. — *Thiel*, Sur une propriété de l'hyperbole, p. 45. (Le lieu du centre de gravité d'un triangle dont l'aire et un angle restent constants est une hyperbole.) — *Koutny*, Construction des lignes d'intensité d'un ellipsoïde. — *Seeling*, Sur le développement de $\sqrt[n]{A}$ en fraction continue. (M. Seeling forme une transformée au moyen de deux réduites consécutives.)

SYLVESTER, FERRERS, ETC. — *Journal trimestriel de Mathématiques pures et appliquées*, n° 31, t. VIII, 1867.

Worontzoff, Généralisation de certaines formules étudiées par M. Blissard. — *Ferrers*, Recherche de l'enveloppe de la droite qui joint les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point d'une circonférence sur les côtés d'un triangle inscrit (hypocycloïde à trois rebroussements). — *Cayley*, Sur les coniques qui passent par deux points et touchent deux lignes données. — *Cayley*, Sur les coniques qui touchent trois lignes données, et qui passent par un point donné — *Walton*, De quelques transformations relatives au calcul des opérations. — *Salmon*, Sur quelques formes spéciales de coniques (coniques se réduisant à un point ou à deux droites). — *Power*, Sur le problème des quinze écolières. (Il s'agit de conduire en promenade quinze élèves pendant sept jours consécutifs, groupées trois par trois, de manière que deux d'entre elles ne se trouvent pas ensemble plus d'une fois dans les sept jours. Nombre des solutions : 15 567 552 000!) — *Steen*, Sur les équations linéaires aux différences partielles à intégrales particulières toutes de la même forme. — *Shläfli*, Solution d'une équation aux différences partielles

$$a\left(y\frac{dw}{z}-z\frac{dw}{dy}\right)^2+b\left(z\frac{dw}{dx}-x\frac{dw}{dz}\right)^2+c\left(x\frac{dw}{dy}+y\frac{dw}{dz}\right)^2=1.$$

— *Ellis*, Étude sur une formule algébrique. — *Ferrers*, Théorèmes relatifs au système des coniques qui passent par quatre points donnés. — *Cayley*, Sur un lieu relatif au triangle (lieu des points tels, que les pieds des perpendiculaires abaissées de ces points sur les côtés d'un triangle fixe soient en ligne droite. Il faut savoir que M. Cayley dit que deux droites sont perpendiculaires relativement à une certaine conique, quand chacune d'elles a son pôle relatif à cette conique sur l'autre droite. On trouve une cubique.) — *Monro*, Sur une intégrale. — *Jeffery*, Sur l'ellipse sphérique rapportée à des coordonnées trilinéaires.

BORCHARDT. — *Journal für die Mathematik* (*Journal de Crelle*), t. LXVII, 1re livraison.

Clebsch, Sur la surface de Steiner (surface du quatrième ordre coupée par un plan tangent suivant deux coniques. Son équation peut se mettre sous la forme

$$x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 - 2x_1 x_2 x_3 x_4 = 0,$$

x_1, x_2, etc., étant des fonctions du premier degré.) — *Schwarz*, Sur les surfaces réglées du cinquième degré. — *Konigsberger*, Sur la transformation du second degré des fonctions abéliennes. — *Geiser*, Sur deux problèmes géométriques (courbes du troisième degré). — *Hankel*, Expression des fonctions symétriques au moyen des sommes de puissances. — *Cayley*, Sur une transformation géométrique.

SCHLÖMILCH, KAHL et CANTOR. — Zeitschrift.... *Journal de Mathématiques et de Physique*. 12e année, 1867, 1re livraison.

Steinschneider, Abraham le juif, Savasorda et Ibn Esra : fragment sur l'histoire des sciences au XIIe siècle. — *Lommel*, Sur les coordonnées *lemniscatiques* (lemniscatische). — *Enneper*, Sur quelques théorèmes appartenant à la théorie des fonctions Θ. — *Hunyadi*, Sur quelques identités (identités qui résultent du développement de déterminants qui ont deux colonnes identiques). — *Hunyadi*, Sur la résolution des triangles sphériques dont les trois hauteurs sont données.

PROBLÈMES ET THÉORÈMES (*);

PAR M. J. STEINER.

1. *Étant demandée une section conique passant par trois points donnés, et ayant en un point quelconque d'une courbe donnée du degré n un contact du deuxième ordre avec elle, le nombre des solutions du problème sera en général*

$$3n(n-1).$$

Si les trois points donnés se trouvent en particulier sur la courbe elle-même, le nombre des solutions sera diminué de deux pour chacun de ces points, de sorte que si les trois points se trouvent à la fois sur la courbe, le nombre des solutions sera

$$3n(n-1)-6=3(n+1)(n-2).$$

2. *Quel est le nombre des sections coniques ayant un contact du deuxième ordre avec une courbe donnée du degré n en un quelconque de ses points, et en outre :*

1° *Passant par deux points donnés et touchant une droite donnée;*

2° *Passant par un point donné et touchant deux droites données;*

3° *Ayant trois droites données pour tangentes?*

3. *Étant demandée une section conique passant par*

(*) Ces questions, auxquelles de récents travaux aussi bien que le nom de leur auteur donnent de l'intérêt, se trouvaient à la suite d'un Mémoire inséré par extrait dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXVII, p. 156. Nous publierons ce Mémoire prochainement. P.

trois points donnés, et touchant en deux points quelconques une courbe donnée du degré n, le nombre des solutions du problème sera en général

$$\frac{1}{2}(n-1)n(n+1)(n+2) - 4(n-1)n$$
$$= \frac{1}{2}(n^4 + 2n^3 - 9n^2 + 6n).$$

Si un, deux ou trois des points donnés, que nous appellerons a, b, c, se trouvent sur la courbe, le nombre des solutions diminuera par degrés; or, il y aura quelques-unes de ces sections coniques qui seront en contact avec la courbe aux points donnés mêmes, et, chaque fois que cela a lieu, deux des sections coniques coïncident en une seule. Si, par exemple, le premier point a se trouve sur la courbe, celle-ci sera en contact par le point a avec $n^2 + n - 4$ des sections coniques, de sorte que le nombre des solutions sera diminué pareillement de $n + n - 4$. Et si l'on ne compte que celles des sections coniques qui ne sont pas en contact en a, leur nombre sera diminué de

$$2(n^2 + n - 4).$$

Si le second point b se trouve aussi sur la courbe, le nombre des sections coniques, qui ne sont en contact ni par a ni par b, sera diminué encore de

$$2(n^2 + n - 6);$$

et enfin, si le troisième point c se trouve aussi sur la courbe, le nombre des sections coniques n'étant en contact ni par a, ni par b, ni par c, diminuera encore de

$$2(n^2 + n - 8),$$

de sorte que le nombre restant de ces sections coniques ne sera que

$$\frac{1}{2}(n^4 + 2n^3 - 21n^2 - 6n + 72)$$

$$= \frac{1}{2}(n-3)(n-2)(n+3)(n+4) - 2(n-3)n,$$

attendu que le nombre à retrancher était en total

$$6(n^2 + n - 6).$$

Le nombre des autres sections coniques se réduit à $n^2 + n - 8$ qui sont en contact par un des points a, b ou c, plus 3 qui sont en contact par a et b, par a et c ou par b et c; en comptant chacune des premières deux fois et chacune des dernières quatre fois, nous aurons le nombre juste

$$3(n^2 + n - 8) \times 2 + 3 \times 4 = 6(n^2 + n - 6).$$

Mais, en ne comptant qu'une seule fois chacune de ces sections coniques en contact par les points a, b, c, ce qui donne le nombre $3(n^2 + n - 7)$, le nombre de toutes les sections coniques ne sera que

$$\frac{1}{2}(n^4 + 2n^3 - 15n^2 + 30) = \frac{1}{2}nn(n-3)(n+5) + 15,$$

et alors

$$3(n^2 + n - 5)$$

sections coniques peuvent être regardées comme ayant disparu.

On remarquera que cette proposition contient entre autres celle-ci : *Par trois points donnés passent en général quatre sections coniques doublement tangentes à une section conique donnée* (*ou bien touchant deux droites données*), qui a été démontrée par M. Poncelet.

4. Les propositions suivantes sont une conséquence des développements donnés au n° 3.

I. *Étant demandée une section conique ayant un contact du deuxième ordre avec une courbe donnée du degré n en un point a donné sur elle, et étant en outre en contact avec elle par deux autres points quelconques, le nombre des solutions du problème sera en général*

$$\frac{1}{2}(n^4 + 2n^3 - 21n^2 - 6n + 72).$$

II. *Étant demandée une section conique ayant, avec la courbe donnée, un contact du troisième ordre en un de ses points donnés a, et étant encore en contact avec elle par un autre point quelconque, le nombre des solutions sera en général*

$$n(n+1) - 8.$$

5. Pareillement, la proposition spéciale suivante est un corollaire de celle donnée au n° 1.

Étant demandée une section conique ayant deux contacts du deuxième ordre avec une courbe donnée du degré n, le premier en un point donné a et le second en un point quelconque, le nombre des solutions sera

$$3n(n-1) - 9.$$

6. *Quel est le nombre des sections coniques étant en contact par deux points avec une courbe donnée n, et en outre :*

1° *Passant par deux points donnés et touchant une droite donnée,* ou bien

2° *Passant par un point donné et touchant deux droites données,* ou bien

3° *Touchant trois droites données?*

7. Par rapport aux propositions données aux n^os 1 et 3, nous remarquerons encore les cas spéciaux suivants :

I. *Une courbe donnée du degré* $2n$ *ayant trois points n tuples* (*), *mais aucun autre point multiple outre ces trois-là, si l'on demande une section conique passant par ces trois points, et ayant en outre avec la courbe :*

1° *Un point quelconque de contact du deuxième ordre, le nombre des solutions est* $3n(n-2)$, ou bien

2° *Deux autres points de contact quelconques, le nombre des solutions est* $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$.

II. *Une courbe donnée du degré* $2n$ *ayant deux points* n *tuples et un point* $(n-1)$ *tuple, mais aucun autre point multiple outre ceux-là, si l'on demande une section conique passant par ces points, et ayant en outre avec la courbe :*

1° *Un point quelconque de contact du deuxième ordre, le nombre des solutions est* $3(n+1)(n-1)$, ou bien

2° *Deux autres points de contact quelconques, le nombre des solutions est* $\frac{1}{2}(n+1)(n-1)(n-2)(n+4)$.

III. *Une courbe donnée du degré* $(2n-1)$ *ayant trois points* $(n-1)$ *tuples, mais aucun autre point multiple, si l'on demande une section conique par ces trois points, et ayant en outre avec la courbe :*

1° *Un point quelconque de contact du deuxième ordre, le nombre des solutions est* $3(n+1)(n-1)$, ou bien

---

(*) Point n tuple, point multiple par lequel la courbe passe n fois.

2° *Deux autres points de contact quelconques, le nombre des solutions est* $\frac{1}{2}(n+1)(n-1)(n-2)(n+4)$.

IV. *Une courbe donnée du degré* $(2n-1)$ *ayant un point ntuple et deux points* $(n-1)$ *tuples, mais aucun autre point multiple, si l'on demande une section conique passant par ces points, et ayant en outre avec la courbe :*

1° *Un point quelconque de contact du deuxième ordre, le nombre des solutions est* $3n(n-2)$, ou bien

2° *Deux autres points de contact quelconques, le nombre des solutions est* $\frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$.

8. *Deux cercles osculateurs quelconques d'une section conique étant donnés de grandeur et de position, trouver le lieu du centre de cette conique et de toutes ses semblables. Le lieu (l'enveloppe) de la droite qui passe par les deux points de contact de ces cercles avec la section conique variable est une courbe de la sixième classe.*

9. *Les polygones de plus grand périmètre inscrits à une ellipse ont le périmètre égal.* (*Voir* t. XXXVII, p. 189-191 du *Journal de M. Crelle.*) *Trouver ce périmètre, l'ellipse étant donnée.*

10. I. *Trouver parmi tous les triangles de plus grande aire inscrits à une ellipse donnée celui dont le périmètre est un maximum ou un minimum.*

II. *Trouver parmi tous les triangles de plus grand périmètre inscrits à une ellipse donnée celui dont l'aire est un maximum ou un minimum*; ou, plus généralement :

11. I. *Trouver parmi tous les polygones de plus grande*

aire inscrits à une ellipse donnée celui dont le périmètre est un maximum ou un minimum; et

II. *Trouver parmi tous les polygones de plus grand périmètre inscrits à une ellipse donnée celui dont l'aire est un maximum ou un minimum.*

Quant au quadrilatère, la dernière question (II) a trouvé sa réponse dans mon Mémoire déjà cité (t. XXXVII, p. 184 du *Journal de Crelle,* savoir : *L'aire du quadrilatère est un maximum ou un minimum, selon que ses côtés sont parallèles aux diamètres conjugués égaux ou aux axes de l'ellipse.* Mais la réponse à la première question (I) est pareillement facile pour le quadrilatère et peut presque être énoncée par les mêmes mots, savoir :

Parmi tous les quadrilatères de plus grande aire inscrits à une ellipse, le périmètre de celui-là est un maximum $= u$ *qui a les axes de l'ellipse pour diagonales (ou dont les côtés sont parallèles aux diamètres conjugués égaux), et le périmètre de celui-là est un minimum* $= u_1$ *qui a les diamètres conjugués égaux de l'ellipse pour diagonales (ou dont les côtés sont parallèles aux côtés de l'ellipse).* En indiquant par a et b les demi-axes de l'ellipse, on a

$$u = 4\sqrt{a^2+b^2}, \quad u_1 = 2(a+b)\sqrt{2};$$

donc

$$u^2 - u_1^2 = 8(a-b)^2.$$

12. *Si nous désignons par* a *et* b, a_1 *et* b_1 *les axes de deux sections coniques confocales, par exemple de deux ellipses* ε_1 *et* ε_1^2, *et si ces axes ont cette relation que*

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 1,$$

il y aura un nombre infini de triangles à la fois inscrits à la courbe ε^2 *et circonscrits à la courbe* ε_1^2.

Et si les axes ont cette relation, que

II $$a^2 : b^2 :: b_1 : a_1,$$

il y aura un nombre infini de quadrilatères à la fois inscrits à la courbe ε^2 *et circonscrits à la courbe* ε_1^2.

13. *Quelle est la relation qui doit avoir lieu entre les axes de deux sections coniques confocales* ε^2 *et* ε_1^2, *pour qu'un polygone puisse être à la fois inscrit à l'une et circonscrit à l'autre?* Dès qu'un polygone peut être décrit de la manière demandée, on sait, d'après une belle proposition de M. Poncelet, qu'il existe une infinité de polygones jouissant de la même propriété. Tous ces polygones ont le périmètre égal, et ils ont le *plus grand périmètre* parmi tous les polygones inscrits à la courbe ε^2, et ils ont le *plus petit* périmètre parmi tous les polygones circonscrits à la courbe ε_1^2 (t. XXXVII, p. 189).

Berlin, au mois de novembre 1852.

NOTE

Sur les degrés de multiplicité des solutions indiquées par le principe de correspondance, suivie d'une application de ce principe à une démonstration des relations plückériennes;

PAR M. ZEUTHEN.

Le principe de correspondance, dû à M. Chasles, s'énonce ainsi (voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. V, p. 195) :

« Lorsqu'on a sur une droite L deux séries de points

x et u tels, qu'à un point x correspondent α points u, et, à un point u, β points x, le nombre des points x qui coïncident avec des points correspondants u est $\alpha+\beta$ (*).

» En effet, représentons par les lettres x et u les distances des points des deux séries à une origine fixe prise sur L. On a entre ces distances une relation telle que

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & x^{\beta}(\mathrm{A}u^{\alpha}+\mathrm{B}u^{\alpha-1}+\ldots) \\ & \quad + x^{\beta-1}(\mathrm{A}'u^{\alpha}+\mathrm{B}'u^{\alpha-1}+\ldots)+\ldots=0; \end{aligned}\right.$$

et les points x qui coïncident avec des points correspondants u sont donnés par l'équation

$$(2)\qquad \mathrm{A}x^{\alpha+\beta}+(\mathrm{B}+\mathrm{A}')x^{\alpha+\beta-1}+\ldots=0\ldots\ \text{»}$$

Une seule difficulté s'élève souvent dans l'application de ce principe, celle de trouver combien de fois un point où l'on sait qu'un point x coïncide avec un ou plusieurs points correspondants u est compté dans le nombre $\alpha+\beta$. C'est d'un moyen qui peut servir à résoudre cette difficulté que je parlerai ici.

Si l'on prend les distances x et u pour abscisses et ordonnées dans un système de coordonnées, l'équation (1) représentera une courbe dont les points d'intersection avec la droite $x=u$ ont pour valeurs communes des deux coordonnées les distances des points cherchés sur L à l'origine prise sur cette droite. Si l'on sait qu'en un point p de L un point x coïncide avec un ou plusieurs points correspondants u, la distance de p à l'origine prise sur L sera donc égale aux deux coordonnées d'un

(*) Nous ne nous occuperons pas ici à part du théorème analogue sur les droites d'un faisceau; car les propriétés qui y sont relatives sont des conséquences immédiates de celles des points d'une droite.

point q qui, dans la représentation graphique, est commun à la courbe (1) et à la droite $x = u$, et le nombre de coïncidences de points correspondants qui ont lieu au point p est égal à celui des points communs à la courbe (1) et à la droite $x = u$ qui coïncident en q. Ce dernier nombre dépend : 1° de celui des branches de la courbe (1) qui passent par q; et 2° du nombre et des ordres des contacts qu'elle y a avec la droite $x = u$.

1° Soit γ le nombre des points u correspondants à un point x qui coïncident avec lui s'il est au point p, et δ celui des points x correspondants à un point u qui coïncident avec lui s'il est au point p, et supposons que $\gamma \geqq \delta$. Alors le point q de la courbe (1) sera multiple de l'ordre δ, à moins qu'une droite menée par q parallèlement à l'axe des x ne touche en ce point une branche de la courbe, c'est-à-dire à moins qu'un point u qui correspond à un point x infiniment peu éloigné de p ne soit à une distance de p qui est infiniment petite d'un ordre supérieur. Dans ce cas exceptionnel, on trouve l'ordre du contact par une comparaison des ordres des infiniment petites distances de p à deux points x et u qui se correspondent, et l'on aura de cette manière le nombre qu'il faut soustraire de δ. On doit obtenir le même résultat en faisant une semblable soustraction de γ.

2° Si une branche de la courbe (1) a au point q un contact avec la droite $x = u$, la valeur de $x - u$ qui correspond à un point de cette branche infiniment peu éloigné de q sera infiniment petite d'un ordre supérieur. Dans ce cas, un des points u qui correspondent à un point x infiniment peu éloigné de p doit être infiniment plus près de x que de p. Si cela a lieu, une comparaison exacte des ordres de ces quantités infiniment petites servira à déterminer l'ordre du contact.

Le procédé que nous venons d'exposer permet, au moins en beaucoup de cas, de trouver les degrés de multiplicité des coniques exceptionnelles qui appartiennent à un système de coniques. Il fournit donc directement les coefficients que j'ai trouvés d'une manière très-différente dans un Mémoire sur la détermination des caractéristiques des systèmes de coniques qui a été inséré dans plusieurs numéros des *Nouvelles Annales* pendant la dernière moitié de l'année passée. Au lieu de nous occuper de nouveau des systèmes de coniques, nous donnerons d'autres exemples du procédé exposé, en employant le principe de correspondance à une démonstration des formules de M. *Plücker*.

Les équations *plückériennes*, dont il y a trois indépendantes l'une de l'autre, ont lieu entre les six nombres suivants : l'ordre m d'une courbe algébrique quelconque ou le nombre de ses intersections, réelles ou imaginaires, avec une droite; sa classe n ou le nombre des tangentes qu'on y peut mener par un point; les nombres d de ses points doubles, d' de ses points de rebroussement, t de ses tangentes doubles et t' de ses tangentes d'inflexion. On peut donner à ces équations les formes suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} m(m-1) &= n + 2d + 3d', \\ n(n-1) &= m + 2t + 3t', \\ 3(m-n) &= d' - t'. \end{aligned}\right.$$

Commençons par démontrer la *deuxième*. Prenons, à cet effet, deux droites fixes L et M dans le plan de la courbe; menons par un point x de L une tangente à la courbe, et soit z le point où celle-ci rencontre M. Menons ensuite par z à la courbe une tangente différente de la première, et soit u le point où celle-ci rencontre L. Alors à un point x correspondent n points z et à chacun de ceux-ci $(n-1)$ points u, par conséquent à un point x, $n(n-1)$ points u. De même, un point u déterminant des points correspondants x exactement de la même manière que si on l'avait pris pour un point x, ce qui fait l'équation (1) symétrique dans cet exemple, à un point u correspondent $n(n-1)$ points x. Donc

$$\alpha = \beta = n(n-1),$$

et, par conséquent, L contient $2n(n-1)$ points x qui coïncident avec des points correspondants u.

Cette coïncidence a seulement lieu aux points où la droite L rencontre : 1° la droite M ; 2° les m tangentes à la courbe donnée à ses points d'intersection avec M ; 3° les t tangentes doubles ; et 4° les t' tangentes d'inflexion de cette courbe. Désignons le premier de ces points par p' et respectivement par p'', p''', p^{iv} des points appartenant aux trois autres groupes.

1° Le point q', qui sur la courbe représentée par l'équation (1) correspond à p', est multiple de l'ordre $n(n-1)$, et, en général, aucune des branches de cette courbe n'est en ce point, q', tangente à la droite $x=u$. Par conséquent $n(n-1)$ des coïncidences cherchées ont lieu en p'.

2° Le point q'', qui sur la courbe (1) correspond à un des m points p'', est un point simple où la tangente, à cause de la symétrie de cette courbe par rapport à la droite $x=u$, y est perpendiculaire. Les m points p'' ne donnent donc que des solutions simples.

3° Le point q''', qui sur la courbe (1) correspond à un des t points p''', est un point double, et aucune des branches n'y touche la droite $x=u$. Par conséquent, *deux* coïncidences ont lieu en chacun des t points p'''.

4° Le point q^{iv}, qui sur la courbe (1) correspond à un des t' points p^{iv}, est un point de rebroussement ordinaire où la tangente est la droite $x=u$. Par conséquent, trois coïncidences ont lieu à chacun des t' points p^{iv}.

On trouve donc

$$2n(n-1) = n(n-1) + m + 2t + 3t',$$

d'où

$$n(n-1) = m + 2t + 3t'.$$

C. Q. F. D.

La *première* des trois équations se déduit de la deuxième par le principe de dualité (on peut aussi la démontrer d'une manière analogue).

Dans la preuve de la *troisième* des équations (3) on emploie une seule droite, fixe mais arbitraire, L, dans le plan de la courbe donnée. Par un point x de cette droite on mène une tangente à la courbe qui la coupera en $m-2$ points z.

Désignons par u le point où la tangente à la courbe à un point z rencontre L. Alors, à un point x correspondent $n(m-2)$ points z, et à chacun de ceux-ci un seul point u; par conséquent à un point x, $n(m-2)$ points u; à un point u correspondent n points z, et à un point z, $(n-2)$ points x, par conséquent à un point u, $n(n-2)$ points x. Le nombre des points x qui coïncident avec des points correspondants u est donc

$$n(m-2) + n(n-2) = n(m+n-4).$$

Cette coïncidence n'a lieu qu'aux points où la droite L rencontre : 1° la courbe donnée elle-même; 2° ses d' tangentes aux points de rebroussement; 3° ses t tangentes doubles, et 4° ses t' tangentes d'inflexion. Désignons maintenant par p', p'', p''', p^{IV} respectivement des points de ces quatre groupes.

1° Le point q', qui sur la courbe que représente maintenant l'équation (1) correspond à un des m points d'intersection p' de L avec la courbe donnée, est multiple de l'ordre $(n-2)$, et comme les tangentes à toutes les branches sont parallèles à l'axe des x, aucune de ces branches ne sera tangente à la droite $x = u$. Par conséquent $n - 2$ coïncidences de points correspondants x et u ont lieu à chacun des m points p'.

2° Le point q'', qui sur la courbe (1) correspond à un des d' points p'', n'est qu'un point simple qui a la parallèle à l'axe des x pour tangente d'inflexion. La courbe (1) y coupe donc seulement la droite $x = u$. Les d' points p'' ne donnent donc que des solutions simples.

3° Par le point q''', qui sur la courbe (1) correspond à un des t points p''', passent deux branches de cette courbe qui toutes deux y sont tangentes à une parallèle à l'axe des u, et qui par conséquent toutes deux coupent la droite $x = u$. Par conséquent, *deux* coïncidences ont lieu à chacun des points p'''.

4° Le point q^{iv}, qui sur la courbe (1) correspond à un des t' points p^{iv}, est un point de rebroussement où la tangente est parallèle à la droite $u = 4x$, de façon que la droite $u = x$ n'y aura que deux intersections avec cette courbe. Par conséquent, *deux* coïncidences ont lieu à chacun des t' points p^{iv}.

On a donc

$$n(m + n - 4) = m(n - 2) + d' + 2t + 2t'.$$

En éliminant t au moyen de la deuxième équation (3) on trouve la troisième.

NOTE SUR LES SURFACES GAUCHES DU SECOND DEGRÉ

(suite et fin, voir page 168);

Par M. H. DURRANDE,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nîmes.

CYLINDRES DU SECOND DEGRÉ.

7. Théorème I. — *Lorsque les axes* A *et* B *de deux faisceaux homographiques sont parallèles, la surface résultante est un cylindre du second degré.*

On pourra représenter le cylindre par la notation [A, A′], pour indiquer par l'identité des lettres l'identité des directions des axes.

Théorème II. — *Tout plan qui divise homographiquement deux droites données et qui reste parallèle à une droite fixe enveloppe un cylindre du second degré dont les génératrices sont parallèles à la droite, et qui est tangent aux deux plans menés par les deux premières droites parallèlement à la direction fixe.*

HYPERBOLOÏDE A UNE NAPPE.

8. J'appelle hyperboloïde à une nappe une surface réglée du second degré à centre unique, dont les sections planes peuvent être une quelconque des courbes du second degré, mais dont les génératrices rectilignes ne passent pas par un même point.

Théorème I. — *La surface résultant du système de faisceaux homographiques* [A, B], *dont les axes ne se rencontrent pas, est un hyperboloïde à une nappe.*

Nous savons déjà que la surface est du second degré, que toutes les sections par des plans parallèles sont des coniques homothétiques. De plus, il est facile de voir que l'on peut obtenir les trois genres de coniques par des sections planes; car si, par un point quelconque de l'espace, on construit le système homothétique $[A_0, B_0]$, le même plan sécant donne des courbes homothétiques dans les deux surfaces (th. III du n° 3); car le cône $[A_0, B_0]$ admet les trois genres de sections planes; donc il en est de même de la surface $[A, B]$.

Reste à prouver que c'est une surface à centre; on le fait simplement de la manière suivante :

Par l'axe A menons un plan parallèle à l'axe B, et par celui-ci le plan homologue du premier; ces deux plans se coupent suivant une droite B_1 parallèle à B et rencontrant A; répétons la même construction en échangeant les lettres A et B. Soit I le point de rencontre des droites A_1, B_1, et I' celui de B et A_1; si nous coupons la surface $[A, B]$ par deux plans parallèles entre eux et à la droite II', et menés à égale distance de cette droite, on voit aisément que les deux coniques ainsi déterminées seront égales, mais inversement placées par rapport au point O, milieu de II' : ces deux coniques, que l'on sait être homothétiques, sont en effet circonscrites à deux parallélogrammes égaux, mais inverses par rapport au point O. Les sommets de ces parallélogrammes sont les rencontres des droites A, A_1, B, B_1 avec les deux plans parallèles.

Le point O est donc bien évidemment le centre de la surface.

THÉORÈME II. — *La surface* $[A, B]$ *admet les mêmes plans diamétraux et diamètres conjugués que le cône homothétique* $[A_0, B_0]$ *ayant son sommet au centre.*

Ceci résulte évidemment de ce que tout plan sécant mené par le centre commun des deux surfaces donne des courbes homothétiques et concentriques. Par conséquent, les deux surfaces ont les mêmes plans principaux; or les plans principaux du cône donnent pour sections principales un point et deux systèmes de droites; donc, dans l'hyperboloïde [A, B], nous aurons une ellipse connue sous le nom d'*ellipse de gorge* et deux hyperboles.

De là plusieurs modes bien connus de génération de la surface.

THÉORÈME III. — *Le cône* $[A_0, B_0]$ *homothétique et concentrique à la surface* [A, B] *est asymptote à cette surface.*

En effet, tout plan mené par l'axe commun perpendiculaire à l'ellipse de gorge coupe le cône suivant un système de deux droites qui sont les asymptotes de l'hyperbole que ce plan détermine dans la surface [A, B].

THÉORÈME IV. — *Toute section diamétrale de la surface* [A, B] *est l'enveloppe des projections des génératrices rectilignes, la projection se faisant parallèlement à la direction conjuguée.*

C'est une conséquence de ce que les sections parallèles sont des courbes homothétiques et ont leurs centres sur le diamètre conjugué. Si l'on considère en effet une section diamétrale et deux sections parallèles et équidistantes de la première, et que l'on projette les courbes obtenues sur le plan de l'une d'elles parallèlement à la ligne des centres, les projections se réduisent à deux coniques concentriques et homothétiques. La portion d'une génératrice quelconque, comprise entre les deux sections égales, se projette suivant une corde de leur projection commune; et comme son milieu doit se trouver sur la section diamétrale, la projection de la génératrice sera donc tangente à cette section.

Remarque. — Cette démonstration repose sur un théorème bien connu des coniques homothétiques et concentriques, et qui s'étend facilement aux surfaces du second degré; ainsi : *Si deux coniques sont homothétiques et concentriques, toute corde de l'une tangente à l'autre est divisée en deux parties égales au point de contact, et réciproquement.*

Si deux surfaces du second degré sont homothétiques et concentriques, toute section faite dans l'une tangentiellement à l'autre a son centre au point de contact.

Cela vient de ce que les deux coniques ou les deux surfaces ont les mêmes systèmes de diamètres conjugués.

Corollaire I. — Les sections principales de la surface [A, B] sont les enveloppes des projections orthogonales des génératrices sur les plans principaux, et par conséquent les contours apparents de la surface.

Corollaire II. — Les plans tangents à la surface, parallèles à une droite donnée, forment un cylindre circonscrit dont la courbe de contact est la section diamétrale conjuguée de la droite.

9. On donne en Géométrie descriptive plusieurs définitions de l'hyperboloïde à une nappe; nous allons voir que toutes ces définitions sont identiques.

THÉORÈME V. — *Étant données trois droites* A, B, C *non situées dans un même plan, une droite mobile qui s'appuie constamment sur ces droites fixes décrit une surface* [A, B].

En effet, pour construire une génératrice de la surface, il suffit de prendre un point quelconque sur la droite C et de faire passer un plan par ce point et chacune des droites A, B; l'intersection de ces deux plans est une génératrice. Or, il est bien évident que les deux faisceaux de plans ainsi déterminés sont homographiques.

Remarque. — Si, au lieu de prendre les droites A et B comme axes des faisceaux, on prend A et C ou B et C, les surfaces résultantes sont identiques, ce qui tient précisément à ce qu'une génératrice détermine des divisions homographiques sur A, B, C.

Théorème VI. — *L'hyperboloïde admet deux modes de génération rectiligne, c'est-à-dire que toute droite mobile s'appuyant sur trois quelconques des génératrices décrit la même surface.*

Il suffit de démontrer que toute droite qui rencontre trois génératrices G, G′, G″ de la surface [A, B] les rencontre toutes, et par conséquent est entièrement située sur la surface. Soit H une droite satisfaisant à cette condition; les deux faisceaux [A, B] doivent déterminer sur cette droite deux divisions homographiques; mais comme ces deux divisions ont déjà trois points doubles (H, G), (H, G′), (H, G″), elles coïncident, ce qui revient à dire que tous les couples de plans homologues doivent se couper sur la droite H, ou bien que la droite H rencontre toutes les génératrices de la surface [A, B].

Ainsi se trouve démontrée aussi simplement que possible, je crois, l'existence des deux systèmes de génératrices de la surface [A, B]; cette démonstration prouve d'ailleurs que toute génératrice du système H rencontre une génératrice du système G, et réciproquement.

Corollaire. — Deux génératrices d'un même système ne se rencontrent jamais, car sans cela toutes celles de l'autre système seraient dans un même plan, et en particulier les trois directrices A, B, C, ce qui est contre l'hypothèse.

Théorème VII. — *Sur trois génératrices de la surface appartenant à un même système, on peut construire un parallélipipède dont le centre est le centre même de la surface, dont les trois arêtes opposées sont trois génératrices parallèles du second système.*

Ceci est démontré partout.

Théorème VIII. — *Dans le parallélipipède construit sur trois génératrices, il n'y a que six arêtes formant un hexagone gauche qui appartiennent à l'hyperboloïde; la diagonale du parallélipipède qui ne rencontre aucune de ces six arêtes est le diamètre conjugué de la section diamétrale qui passe par les milieux des six arêtes génératrices.*

On verra sans difficulté que les six plans tangents à l'hyperboloïde, menés par les milieux des six arêtes, sont parallèles à la diagonale du parallélipipède qui ne rencontre pas ces six droites; cette diagonale est donc bien le diamètre conjugué de la section diamétrale qui passe par les points de contact.

Corollaire I. — L'hexagone gauche formé par les six arêtes génératrices du parallélipipède se projette suivant un hexagone circonscrit à la conique diamétrale, la projection étant faite parallèlement à la diagonale diamètre conjugué.

Corollaire II. — Si le parallélipipède est un cube, le plan diamétral passant par les milieux des six arêtes génératrices devient un plan principal, puisqu'il est perpendiculaire à la diagonale conjuguée; de plus, la projection de l'hexagone gauche devient un hexagone régulier; donc la conique principale est un cercle et l'hyperboloïde est de révolution.

Théorème IX. — *Étant données deux droites* A, B, *non situées dans un même plan, et une conique fixe rencontrant ces deux droites, une droite mobile rencontrant ces trois directrices décrit un hyperboloïde* [A, B].

Il est évident, en effet, que les deux faisceaux [A, B] sont bien homographiques, puisque le plan de la conique directrice détermine, en les coupant, deux faisceaux rectilignes homographiques.

A ce théorème se rattache évidemment cet énoncé de M. Chasles :

Si, par deux droites fixes A, B, *on mène deux séries de plans perpendiculaires entre eux respectivement, le lieu des intersections des plans homologues est un hyperboloïde à une nappe dont les plans cycliques sont perpendiculaires aux deux droites.* (Question analogue à celle du cône, n° 6.)

Voici encore quelques questions qui se ramènent aisément aux précédentes :

1° *Étant données deux ellipses homothétiques et situées dans des plans parallèles, on prend un diamètre quelconque dans la petite et une corde égale et parallèle dans la grande; les droites qui joignent les extrémités de ces deux parallèles décrivent un hyperboloïde à une nappe.*

2° *Étant données trois ellipses homothétiques dans trois plans parallèles, les centres étant en ligne droite, et celui de la plus petite étant le centre d'homothétie inverse des deux autres, toute droite mobile, s'appuyant sur ces trois courbes, décrit un hyperboloïde à une nappe.*

3° *Le lieu des points dont les distances à deux droites fixes non situées dans un même plan sont dans un rapport constant est un hyperboloïde à une nappe.*

La solution de cette question se ramène au théorème de M. Chasles énoncé précédemment; on en trouvera une solution dans un Mémoire de ce savant (*Journal de Mathématiques*, t. I^er, 1836, p. 324).

PARABOLOÏDE HYPERBOLIQUE.

10. Théorème I. — *Si, dans le système [A, B] de deux faisceaux homographiques, l'un des axes s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire si tous les plans de l'un des faisceaux deviennent parallèles, la surface du second degré est dépourvue de centre et n'admet pour sections que des courbes à branches infinies.*

Ce théorème est évident, et on voit que la nouvelle surface que l'on nomme *paraboloïde hyperbolique* à cause de la nature de ses sections planes, et que nous pourrons représenter par [A, B_∞], est la limite vers laquelle tend un hyperboloïde [A, B] lorsque son centre s'éloigne indéfiniment.

Le cône asymptote de l'hyperboloïde se transforme, dans le cas du paraboloïde hyperbolique, en un système de deux plans.

De même que pour l'hyperboloïde à une nappe, les diverses définitions du paraboloïde sont les différentes manières de faire correspondre les plans homologues des deux faisceaux. Le mode le plus ordinaire consiste à faire passer par les mêmes points d'une droite C les plans homologues du système [A, B_∞], ce qui revient à dire que la surface est engendrée par une droite mobile s'appuyant sur deux droites fixes A, C, en restant parallèle à un plan fixe nommé *plan directeur*.

Comme pour l'hyperboloïde, nous avons encore un double mode de génération, car une droite rencontrant trois génératrices les rencontre toutes, et par conséquent est entièrement sur la surface. Il est d'ailleurs facile de s'assurer que ces nouvelles génératrices sont elles-mêmes parallèles à un second plan directeur parallèle aux droites A, C.

La surface homothétique remplaçant le cône asymptote est, comme nous l'avons dit, un système de deux plans; ces plans sont parallèles aux plans directeurs. Les sections planes de ce système sont des courbes du même genre que les sections planes de la surface par les mêmes plans sécants.

Voici quelques questions sur le paraboloïde hyperbolique :

1° *Une droite mobile, s'appuyant sur trois droites parallèles à un même plan, décrit un paraboloïde. Double mode de génération.*

2° *Le lieu des points équidistants de deux droites fixes non situées dans un même plan est un paraboloïde hyperbolique. Si les droites se rencontrent, c'est un système de deux plans, surface du même genre que le paraboloïde.*

3° *Le lieu des normales à une surface gauche quelconque en tous les points d'une même génératrice est un paraboloïde hyperbolique.*

Je ferai remarquer, à l'occasion de cette dernière question, que le raccordement de deux surfaces réglées qui ont une génératrice commune se rattache à l'homographie; il était aisé de voir que les points de contact des plans tangents qui coïncident forment deux divisions homographiques sur l'arête commune. Il en résulte que, lorsque les deux divisions ont trois points doubles, c'est-à-dire lorsque les deux surfaces ont trois plans tangents communs sur une même génératrice, elles se raccordent complétement tout le long de cette génératrice.

SUR L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES;

Par M. J. MOUTIER.

On démontre *à priori* le principe d'Archimède dans tous les Traités de Physique en considérant une portion de la masse fluide en équilibre sous l'action de son propre poids et des pressions extérieures qu'elle supporte. On peut déduire de ce principe fondamental tous les théorèmes de l'hydrostatique.

Considérons en effet un filet cylindrique incliné dont les bases ω, ω' soient dirigées obliquement par rapport aux génératrices; en appelant σ la section droite du filet, l la distance des centres de gravité des deux bases, d le poids de l'unité de volume du fluide, le poids de la masse fluide contenue dans l'intérieur du filet a pour expression $Q = \sigma l d$.

Il y a équilibre entre le poids Q du filet et les pressions extérieures qui s'exercent normalement sur les divers éléments de sa surface; chacune de ces forces peut se décomposer suivant deux directions, l'une parallèle, l'autre perpendiculaire aux génératrices du filet. Le poids Q du filet et les pressions p, p' que supportent les deux bases du filet sont les seules forces qui fournissent des composantes suivant la première direction; si on appelle α, α', β les angles aigus que forment les trois forces p, p', Q avec les génératrices, les trois composantes $p\cos\alpha$, $p'\cos\alpha'$, $Q\cos\beta$ doivent se faire mutuellement équilibre; en tenant compte du sens dans lequel ces forces agissent,

$$p'\cos\alpha' = p\cos\alpha + Q\cos\beta.$$

D'ailleurs, si l'on tient compte des relations

$$Q = \sigma l d, \quad \sigma = \omega \cos\alpha = \omega' \cos\alpha',$$

$$\frac{p'}{\omega'} = \frac{p}{\omega} + l \cos 6 . d.$$

Si l'on représente par z la différence de niveau des centres de gravité des deux bases ω, ω', $l \cos 6 = z$,

$$\frac{p'}{\omega'} = \frac{p}{\omega} + z d.$$

Cette relation s'applique à deux points quelconques pris dans l'intérieur de la masse fluide, même lorsque la ligne droite qui joint les deux points n'est pas entièrement contenue à l'intérieur du fluide. Il suffit d'imaginer dans ce cas un contour brisé allant d'un point à l'autre dans l'intérieur du fluide, et d'appliquer successivement la même relation aux sommets consécutifs du contour.

On déduit de cette relation les propositions fondamentales de l'hydrostatique :

1° *La pression en un point est indépendante de l'orientation de l'élément.*

2° *La pression en un point est égale à la pression en un autre point du liquide augmentée du poids d'une colonne liquide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la différence de niveau des deux points*; c'est là le principe de la transmission des pressions.

3° *La pression est la même en tous les points d'un même plan horizontal.*

La relation précédente s'étend aisément au cas de parois planes d'étendue finie. Soient en effet p la pression supportée par un élément ω d'une paroi plane d'étendue S, z la distance de cet élément à un plan horizontal arbitraire mené à l'intérieur du fluide, ϖ la pression en un point de ce plan, Z la distance du centre de gravité de la paroi S à ce plan :

$$\frac{p}{\omega} = \varpi + zd,$$

$$p = \varpi\omega + \omega z d.$$

La pression P supportée par la paroi est la somme des pressions p,

$$P = \varpi S + d\Sigma\omega z = \varpi S + SZd;$$

par suite,

$$\frac{P}{S} = \varpi + dZ.$$

Pour une autre paroi plane, on a de même

$$\frac{P'}{S'} = \varpi + dZ',$$

donc

$$\frac{P}{S} = \frac{P'}{S'} + d(Z - Z').$$

Des raisonnements analogues s'appliquent à l'équilibre des liquides soumis à des forces autres que la pesanteur, pourvu toutefois que ces forces varient d'une manière continue en passant d'un point à un point voisin. On établit sans difficulté que la pression en un point est indépendante de l'orientation de l'élément, et si on appelle *surface de niveau* le lieu géométrique des points où la pression est la même, on arrive à cette conséquence que la surface de niveau doit être normale en chacun de ces points à la résultante des forces qui sollicitent le fluide.

Il suffit de considérer un point de la surface de niveau comme le centre d'un parallélipipède rectangle infiniment petit dont les arêtes soient parallèles à la normale à la surface qui passe par le point considéré. La masse fluide contenue dans ce parallélipipède élémentaire est en équilibre sous l'action des pressions extérieures et de la résultante R des forces qui sollicitent le liquide; cette dernière force est appliquée au centre de gravité de la masse fluide. D'après les propriétés de la surface de niveau, les pressions qui s'exercent sur les faces latérales du parallélipipède élémentaire sont égales deux à deux et directement opposées et se font mutuellement équilibre. Il doit donc y avoir équilibre entre la force R et les pressions supportées par les bases du parallélipipède; ces deux dernières forces étant normales à la surface de niveau, la force R doit être également normale à cette surface.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 760 *à* 762

(voir 2e série, t. V, p. 240 et 187);

PAR M. G.-B. MAFFIOTTI,
Élève à l'Université de Turin.

M. Painvin, dans un article sur les tétraèdres inséré dans les *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 290, fait usage de formules qui conduisent immédiatement à la solution des questions 760, 761.

760. *Étant donnée une surface du second ordre, dont le centre est* O, *il y aura une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à cette surface et en même temps circonscrits à une sphère dont le centre est un point arbitrairement choisi* C; *si* R *est le rayon de la sphère inscrite, si* I *est le point d'intersection du rayon vec-*

teur OC *avec le plan polaire du point* C *par rapport à la surface, on a la relation*

$$R^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{OI}},$$

$2a$, $2b$, $2c$ *représentant les valeurs algébriques des axes de la surface du second ordre.* (Painvin.)

Soient $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$, etc., les sommets du tétraèdre. M. Painvin pose

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \quad a_1=a_2=a_3=a_4=1, \quad \frac{dD}{da_r}=D_r.$$

Alors l'équation du plan d'une quelconque des faces du tétraèdre, celle qui est opposée au sommet $M_r\,(x_r, y_r, z_r)$, sera

$$(1) \qquad x\frac{dD}{dx_r}+y\frac{dD}{dy_r}+z\frac{dD}{dz_r}+D_r=0.$$

En donnant à r les valeurs 1, 2, 3, 4, on obtiendra les équations des quatre faces du tétraèdre.

L'équation de la surface du second ordre rapportée à son centre et à ses axes est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

L'équation du plan polaire du point x_r, y_r, z_r par rapport à cette surface est

$$\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}+\frac{zz_2}{c^2}=1.$$

Le tétraèdre étant conjugué, cette équation devra être identique avec l'équation (1). On a donc

$$(2) \qquad \frac{dD}{dx_r}=-D_r\frac{x_r}{a^2}, \quad \frac{dD}{dy_r}=-D_r\frac{y_r}{b^2}, \quad \frac{dD}{dz_r}=-D_r\frac{z_r}{c^2}.$$

En développant le déterminant D et en tenant compte des équations (2), on a

$$(3)\quad \begin{cases} D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = D, \\ D_1 x_1^2 + D_2 x_2^2 + D_3 x_3^2 + D_4 x_4^2 = -a^2 D, \\ D_1 y_1^2 + D_2 y_2^2 + D_3 y_3^2 + D_4 y_4^2 = -b^2 D, \\ D_1 z_1^2 + D_2 z_2^2 + D_3 z_3^2 + D_4 z_4^2 = -c^2 D; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} D_1 x_1 y_1 + D_2 x_2 y_2 + D_3 x_3 y_3 + D_4 x_4 y_4 = 0, \\ D_1 x_1 z_1 + D_2 x_2 z_2 + D_3 x_3 z_3 + D_4 x_4 z_4 = 0, \\ D_1 y_1 z_1 + D_2 y_2 z_2 + D_3 y_3 z_3 + D_4 y_4 z_4 = 0; \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dD}{dx_1} + \dfrac{dD}{dx_2} + \dfrac{dD}{dx_3} + \dfrac{dD}{dx_4} = 0, \\ \dfrac{dD}{dy_1} + \dfrac{dD}{dy_2} + \dfrac{dD}{dy_3} + \dfrac{dD}{dy_4} = 0, \\ \dfrac{dD}{dz_1} + \dfrac{dD}{dz_2} + \dfrac{dD}{dz_3} + \dfrac{dD}{dz_4} = 0. \end{cases}$$

Ces dernières équations expriment que la somme des projections des faces du tétraèdre sur chacun des plans coordonnés est nulle.

Maintenant, si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du point C, centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre, on aura, en exprimant que ce point est également éloigné de chacune des faces du tétraèdre,

$$\frac{\left(x_0\dfrac{dD}{dx_1} + y_0\dfrac{dD}{dy_1} + z_0\dfrac{dD}{dz_1}\right)^2}{\left(\dfrac{dD}{dx_1}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dy_1}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dz_1}\right)^2} = \frac{\left(x_0\dfrac{dD}{dx_2} + y_0\dfrac{dD}{dy_2} + z_0\dfrac{dD}{dz_2}\right)^2}{\left(\dfrac{dD}{dx_2}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dy_2}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dz_2}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x_0\dfrac{dD}{dx_3} + y_0\dfrac{dD}{dy_3} + z_0\dfrac{dD}{dz_3}\right)^2}{\left(\dfrac{dD}{dx_3}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dy_3}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dz_3}\right)^2} = \frac{\left(x_0\dfrac{dD}{dx_4} + y_0\dfrac{dD}{dy_4} + z_0\dfrac{dD}{dz_4}\right)^2}{\left(\dfrac{dD}{dx_4}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dy_4}\right)^2 + \left(\dfrac{dD}{dz_4}\right)^2} = R^2.$$

A l'aide des relations (2), ces équations se transforment en celles-ci :

$$R^2\left(\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}+\frac{z_1^2}{c^4}\right)=\left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}-1\right)^2,$$

$$R^2\left(\frac{x_2^2}{a^4}+\frac{y_2^2}{b^4}+\frac{z_2^2}{c^4}\right)=\left(\frac{x_0x_2}{a^2}+\frac{y_0y_2}{b^2}+\frac{z_0z_2}{c^2}-1\right)^2,$$

$$R^2\left(\frac{x_3^2}{a^4}+\frac{y_3^2}{b^4}+\frac{z_3^2}{c^4}\right)=\left(\frac{x_0x_3}{a^2}+\frac{y_0y_3}{b^2}+\frac{z_0z_3}{c^2}-1\right)^2,$$

$$R^2\left(\frac{x_4^2}{a^4}+\frac{y_4^2}{b^4}+\frac{z_4^2}{c^4}\right)=\left(\frac{x_0x_4}{a^2}+\frac{y_0y_4}{b^2}+\frac{z_0z_4}{c_2}-1\right)^2.$$

Je multiplie la première de ces équations par D_1, la deuxième par D_2, la troisième par D_3, et la quatrième par D_4, et je les ajoute ensuite membre à membre. Le résultat, simplifié à l'aide des relations (3), (4), (5), (6), est

$$R^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1.$$

La droite CO, dont les équations sont

$$X=\frac{x_0}{z_0}Z,\quad Y=\frac{y_0}{z_0}Z,$$

perce le plan polaire

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$$

du point x_0, y_0, z_0, par rapport à la surface du second ordre, en un point I dont les coordonnées sont

$$\frac{x_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}},\quad \frac{y_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}},\quad \frac{z_0}{\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}}.$$

Donc

$$CI = \left(1 - \frac{1}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}}\right)\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2},$$

$$OI = \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}};$$

par conséquent,

$$\frac{CI}{OI} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1.$$

C. Q. F. D.

761. *Si la surface donnée est un paraboloïde et* I *le centre de la section de la surface par le plan polaire du point* C, *on a la relation*

$$R^2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = CI,$$

$2p$ *et* $2q$ *étant les paramètres des sections principales.*

(Painvin.)

Soit

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0$$

l'équation du paraboloïde. En conservant les notations dont on a fait usage dans la question précédente, les conditions qui expriment, dans notre cas, que le tétraèdre est conjugué au paraboloïde sont

$$(7)\left\{\begin{array}{l} D_r = x_r\dfrac{dD}{dx_r},\quad \dfrac{dD}{dy_r} = -\dfrac{y_r}{p}\dfrac{dD}{dx_r},\quad \dfrac{dD}{dz_r} = -\dfrac{z_r}{q}\dfrac{dD}{dx_r}, \\ \qquad (r = 1, 2, 3, 4). \end{array}\right.$$

Les formules relatives aux déterminants, combinées avec les relations (7), donnent

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{dD}{dx_1} + \frac{dD}{dx_2} + \frac{dD}{dx_3} + \frac{dD}{dx_4} = 0,\\
&x_1^2 \frac{dD}{dx_1} + x_2^2 \frac{dD}{dx_2} + x_3^2 \frac{dD}{dx_3} + x_4^2 \frac{dD}{dx_4} = 0,\\
&y_1^2 \frac{dD}{dy_1} + y_2^2 \frac{dD}{dy_2} + y_3^2 \frac{dD}{dy_3} + y_4^2 \frac{dD}{dy_4} = -pD,\\
&z_1^2 \frac{dD}{dz_1} + z_2^2 \frac{dD}{dz_2} + z_3^2 \frac{dD}{dz_3} + z_4^2 \frac{dD}{dz_4} = -qD,\\
&x_1 y_1 \frac{dD}{dx_1} + x_2 y_2 \frac{dD}{dx_2} + x_3 y_3 \frac{dD}{dx_3} + x_4 y_4 \frac{dD}{dx_4} = 0,\\
&x_1 z_1 \frac{dD}{dx_1} + x_2 z_2 \frac{dD}{dx_2} + x_3 z_3 \frac{dD}{dx_3} + x_4 z_4 \frac{dD}{dx_4} = 0,\\
&y_1 z_1 \frac{dD}{dx_1} + y_2 z_2 \frac{dD}{dx_2} + y_3 z_3 \frac{dD}{dx_3} + y_4 z_4 \frac{dD}{dx_4} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

(*Voir* PAINVIN, *loc. cit.*)

On a aussi

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&x_1 \frac{dD}{dx_1} + x_2 \frac{dD}{dx_2} + x_3 \frac{dD}{dx_3} + x_4 \frac{dD}{dx_4} = D,\\
&y_1 \frac{dD}{dx_1} + y_2 \frac{dD}{dx_2} + y_3 \frac{dD}{dx_3} + y_4 \frac{dD}{dx_4} = 0,\\
&z_1 \frac{dD}{dx_1} + z_2 \frac{dD}{dx_2} + z_3 \frac{dD}{dx_3} + z_4 \frac{dD}{dx_4} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les équations qui expriment que le point x_0, y_0, z_0 est le centre d'une sphère de rayon R et inscrite dans le tétraèdre deviennent, en ayant égard aux relations (7),

$$
R^2\left(\frac{y_1^2}{p^2} + \frac{z_1^2}{q^2} + 1\right) = \left(\frac{y_0 y_1}{p} + \frac{z_0 z_1}{q} - x_0 - x_1\right)^2,
$$

$$
R^2\left(\frac{y_2^2}{p^2} + \frac{z_2^2}{q^2} + 1\right) = \left(\frac{y_0 y_2}{p} + \frac{z_0 z_2}{q} - x_0 - x_2\right)^2,
$$

$$R^2\left(\frac{y_3^2}{p^2}+\frac{z_3^2}{q^2}+1\right)=\left(\frac{y_0 y_3}{p}+\frac{z_0 z_3}{q}-x_0-x_3\right)^2,$$

$$R^2\left(\frac{y_4^2}{p^2}+\frac{z_4^2}{q^2}+1\right)=\left(\frac{y_0 y_4}{p}+\frac{z_0 z_4}{q}-x_0-x_4\right)^2.$$

J'ajoute ces équations membre à membre, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{dD}{dx_1}, \frac{dD}{dx_2}, \frac{dD}{dx_3}, \frac{dD}{dx_4}$. En tenant compte des équations (8) et (9), j'obtiens

$$R^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)-\frac{y_0^2}{p}+\frac{z_0^2}{q}-2x_0.$$

Le plan polaire du point (x_0, y_0, z_0) est

$$\frac{yy_0}{p}+\frac{zz_0}{q}=x_0+x.$$

Soit I le centre de la section faite par ce plan dans la surface que nous considérons. La droite CI sera, comme on sait, parallèle à Ox, qui est aussi l'axe de la surface. Les équations de CI seront donc $Z=z_0$, $Y=y_0$; les coordonnées de I seront y_0, z_0, $\frac{y_0^2}{p}, \frac{z_0^2}{q}-x_0$; par conséquent,

$$CI=\frac{y_0^2}{p}+\frac{z_0^2}{q}-2x_0.$$

C. Q. F. D.

762. *Le rayon de la sphère inscrite reste constant lorsque le centre de cette sphère se déplace sur une surface parallèle et égale à la première, cette seconde surface s'obtenant en faisant glisser la première parallèlement à son axe.* (Painvin.)

L'énoncé de cette question me paraît inexact. Il fallait dire que le rayon de la sphère reste constant lorsque son centre se déplace sur une surface qui est concentrique et homothétique à la surface donnée, s'il s'agit d'une surface à centre; ou bien, s'il ne s'agit pas d'une surface à centre, sur une surface qu'on obtiendra en faisant glisser la surface parallèlement à elle-même le long de son axe.

En effet, on a trouvé pour les surfaces à centre

$$(1)\qquad R^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$$

x, y, z étant les coordonnées du centre C de la sphère. Soit M le point d'intersection de la droite OC avec la surface donnée, et m le rapport $\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{MO}}\cdot$ L'équation d'une surface concentrique et homothétique à cette surface, et passant par le point C, sera

$$(2)\qquad \frac{x^2}{ma^2}+\frac{y^2}{mb^2}+\frac{z^2}{mc^2}=1.$$

Supposons maintenant que le point C varie de position en se trouvant toujours sur la surface (2). On aura, en différentiant l'équation (1) et l'équation (2) successivement par rapport à x et à y,

$$R\frac{dR}{dx}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{x}{a^2}+\frac{z}{c^2}\frac{dz}{dx},$$

$$R\frac{dR}{dy}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}\frac{dz}{dy},$$

et

$$\frac{x}{ma^2}+\frac{z}{mc^2}\frac{dz}{dx}=0,$$

$$\frac{y}{mb^2}+\frac{z}{mc^2}\frac{dz}{dy}=0.$$

Donc évidemment

$$\frac{dR}{dx} = 0, \quad \frac{dR}{dy} = 0,$$

ce qui signifie que R est constant.

Dans le cas d'une surface dépourvue du centre, l'équation de la surface sur laquelle doit glisser le centre C pour que le rayon de la sphère reste constant est de la forme

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2(x + \alpha) = 0.$$

La démonstration est analogue à la précédente.

Questions 769 *et* 770;

PAR M. LADISLAS KRETKOWSKI,
Élève externe de l'École impériale des Ponts et Chaussées.

769. *Nommons secteur en général le corps terminé d'une part par une surface conique, de l'autre par une surface quelconque que nous appellerons la* base du secteur. *Tous les secteurs ayant une base commune et des volumes égaux ont leurs sommets situés dans un même plan.* (ZEUTHEN.)

770. *Le plan dont il est parlé dans la question précédente est perpendiculaire à deux plans sur lesquels l'aire de la projection du périmètre de la base commune est nulle.* (Louis OPPERMANN.)

Désignons respectivement par V, dA, p le volume du secteur, l'élément de la surface de sa base et la longueur de la perpendiculaire abaissée du sommet du secteur sur le plan de l'élément dA; on a alors

$$V = \int \frac{p\,dA}{3} = \frac{1}{3} \int p\,dA,$$

l'intégrale s'étendant à toute la base du secteur.

Si l'on déplace le sommet du secteur de façon que la droite qui joint sa position primitive avec la position nouvelle ait une longueur l, le volume V variera de ΔV et la droite p variera de Δp en conservant sa direction; d'où il résulte

$$V + \Delta V = \frac{1}{3} \int (p + \Delta p)\,dA = \frac{1}{3} \int p\,dA + \frac{1}{3} \int \Delta p\,dA,$$

les limites des intégrales étant celles de la base. On a donc

$$AV = \frac{1}{3} \int \Delta p\,dA = \frac{1}{3} \int l \cos(l, p)\,dA = \frac{l}{3} \int \cos(l, p)\,dA,$$

$\cos(l, p)$ désignant les cosinus de l'angle compris entre les droites l et p. Cette forme de la variation du volume du secteur pour un déplacement quelconque de son sommet est un produit de deux facteurs dont un représente l'influence de la grandeur du déplacement, tandis que l'autre représente l'influence de la direction du déplacement.

Considérons trois positions S_1, S_2, S_3 du sommet du secteur telles, qu'en les joignant par trois droites à un point S de la surface de la base, ces droites ne se trouvent pas dans un même plan, ce qui est toujours possible. Il en résulte que si V_1, V_2, V_3 sont les trois volumes des secteurs ayant S_1, S_2, S_3 respectivement pour sommets, et si l'on déplace ces derniers suivant les directions SS_1, SS_2, SS_3, les trois volumes varieront dans le même sens, et on les rendra tous égaux à un même volume V, qu'on choisira différent de celui qui est relatif au cas où le sommet serait en S. Si l'on fait parcourir aux trois sommets S_1, S_2, S_3 respectivement les longueurs

$$\frac{3(V - V_1)}{\int \cos(l_1, p_1)\, dA}, \quad \frac{3(V - V_2)}{\int \cos(l_2, p_2)\, dA}, \quad \frac{3(V - V_3)}{\int \cos(l_3, p_3)\, dA},$$

les diverses notations ayant les mêmes significations que précédemment, et les indices étant ceux du sommet auquel elles se rapportent. Cela est toujours possible, car les trois intégrales ne sont pas nulles, à cause de ce que, pour ces directions des déplacements des sommets, les volumes V_1, V_2, V_3 varient nécessairement, et si les intégrales étaient nulles, on verrait, en se reportant à la forme de ΔV trouvée précédemment, que, contrairement à ce qu'on vient d'observer, les variations des volumes seraient nulles. Ces trois positions des sommets que nous désignerons par Σ_1, Σ_2, Σ_3 existent donc effectivement, et comme elles ne sont pas sur une droite, elles définissent un plan $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$.

Considérons deux positions du sommet du secteur, pour lesquelles les volumes sont égaux. La variation du volume, en passant d'une position à l'autre, est donc nulle, et par suite, pour cette direction du déplacement du sommet du secteur et ses parallèles, on a

$$\frac{l}{3}\int \cos(l, p)\, dA = 0.$$

l désignant la distance de deux positions du sommet, $\frac{l}{3}$ n'est pas nul par conséquent; donc, pour cette direction et ses parallèles, on a

$$\int \cos(l, p)\, dA = 0.$$

On en conclut que le déplacement du sommet suivant ces directions ne fait pas varier le volume du secteur. Il s'ensuit que les déplacements suivant les directions définies par deux quelconques des points Σ_1, Σ_2, Σ_3 et leurs parallèles ne font pas varier le volume du secteur, ou, ce qui revient au même, le déplacement suivant le plan $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$ ou suivant un des plans parallèles à ce dernier ne fait pas varier le volume du secteur; comme d'ailleurs chacune des directions SS_1, SS_2, SS_3 ou $S\Sigma_1$, $S\Sigma_2$, $S\Sigma_3$ rencontre les plans dont il vient d'être question, et que le déplacement du sommet suivant chacune de ces droites fait varier le volume du secteur, donc tous les secteurs de même base et de volumes égaux ont leurs sommets sur un plan. C'est le théorème de M. Zeuthen.

Le déplacement suivant le plan $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$, ou suivant un des plans parallèles à ce dernier, ne faisant pas varier le volume, on a, par suite, pour deux directions dans un de ces plans,

$$\int \cos(l_1, p_1)\, dA = 0, \qquad \int \cos(l_2, p_2)\, dA = 0,$$

ce qui veut dire que ces directions sont telles, que les projections orthogonales de la base sur deux plans perpendiculaires à ces directions, et par suite au plan $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$ sont nulles; ou, ce qui revient au même, que le plan $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3$ est perpendiculaire aux deux plans sur lesquels les aires des projections orthogonales du périmètre de la base commune sont nulles. C'est le théorème de M. Louis Oppermann, de Copenhague.

Nous ajouterons que pour toute surface non fermée, il existe une direction telle :

1° Que les aires des projections orthogonales de cette surface ou les aires des projections de son périmètre sur les plans parallèles à cette direction sont nulles;

2° Que les aires analogues relatives aux plans également inclinés sur cette direction sont égales;

3° Que ces aires augmentent avec les inclinaisons des plans sur cette direction;

4° Que l'aire la plus grande possible correspond aux plans de projection perpendiculaires à cette direction.

Pour s'en assurer, il suffit de considérer un point comme sommet du secteur ayant la surface donnée pour base, dont le volume est désigné par V_1, et un plan qui serait le lieu des sommets des secteurs de volume V_2 différent de V_1, car on a alors pour l'expression des aires en question, l étant la distance des sommets,

$$\int \cos(l, p)\, dA = \frac{3(V_1 - V_2)}{l},$$

qui permet de tirer les conclusions ci-dessus.

Note. — La même question a été traitée par M. Laisant, capitaine du Génie, et par M. Pellet, du lycée de Nîmes. M. Dennery, du lycée de Metz, a traité la question 769.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

(Tous les ouvrages annoncés se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

Hoüel (J.). — *Recueil de formules et de Tables numériques.* 1 vol. in-8 de LXXI-64 pages; 1866. Gauthier-Villars. — Prix : 4 fr. 50 c.

Nous devons déjà à M. Hoüel d'excellentes Tables de logarithmes à cinq décimales qui renferment, outre de nombreuses améliorations, les logarithmes de Gauss, inconnus en France avant cette publication, quoiqu'ils soient d'origine française.

Mieux que personne, M. J. Hoüel pouvait, par la nature de ses études, introduire dans les nouvelles Tables les perfectionnements qui manquaient aux Tables françaises; il a complétement réussi en publiant le nouveau *Recueil* qu'on ne doit pas séparer des Tables de logarithmes à cinq décimales.

Dans ces *Annales*, consacrées particulièrement à l'étude des Mathématiques spéciales, nous n'entreprendrons pas d'analyser complétement ce *Recueil*, dont une partie est destinée aux personnes qui s'occupent des points les plus élevés de la science. Nous nous contenterons d'indiquer aux candidats aux Écoles Polytechnique et Normale l'immense parti qu'ils pourraient tirer des Tables nombreuses et variées que renferme ce petit volume.

Dans les cas ordinaires de la discussion d'un problème, il est très-avantageux d'employer les petites Tables logarithmiques à trois ou quatre décimales. Dans ce nouveau *Recueil* comme dans l'ancien, M. Hoüel a disposé une série complète de ces Tables de la manière la plus commode, tant pour les logarithmes vulgaires que pour les logarithmes népériens.

Il a reproduit avec d'heureuses modifications les Tables de logarithmes d'addition et de soustraction, si utiles dans diverses applications du calcul.

Mais ce qui distingue surtout ce *Recueil*, c'est une collection complète de Tables trigonométriques disposées avec la plus grande simplicité et contenant les valeurs logarithmiques et naturelles des fonctions circulaires, avec trois ou quatre décimales, et pour tous les systèmes de division du quadrant.

Ainsi la Table IX donne les lignes trigonométriques naturelles avec quatre décimales, pour chaque quart de degré. Les Tables X et XI donnent les valeurs logarithmiques de ces lignes, la première de 10 en 10 minutes, la seconde de 6 en 6 minutes ou de dixième en dixième de degré. Elles contiennent en outre de petites Tables à trois décimales donnant les logarithmes des sinus et des tangentes pour chaque degré. Ces Tables nous ont semblé précieuses pour la préparation ou la vérification des calculs.

Viennent ensuite des Tables trigonométriques à trois et quatre décimales, relatives à la division décimale du quadrant. Cette division ne présente que des avantages toutes les fois que l'on n'a pas en vue un calcul astronomique ou nautique, fait d'après des données obtenues à l'aide des instruments ordinaires. Lorsque les lignes trigonométriques sont employées simplement comme lignes auxiliaires, il n'y a pas d'hésitation possible entre les deux systèmes, pourvu qu'on ait à sa disposition, comme ici, des Tables commodes pour le système décimal. Celles de M. Hoüel sont, eu égard à leur étendue, les plus complètes et les mieux disposées que nous connaissions.

Ces mêmes Tables contiennent encore les valeurs d'autres fonctions qui ne sont plus une nouveauté qu'en France, et que M. Hoüel a déjà fait connaître dans une Note intéressante insérée dans les *Nouvelles Annales* (2e série, t. III, 1864). Nous voulons parler des fonctions hyperboliques, qui jouent dans l'analyse un rôle tout pareil à celui des fonctions circulaires, et qui, par exemple, conduisent de la manière la plus simple à la résolution de l'équation du troisième degré dans le cas d'une seule racine réelle.

Nous citerons encore, parmi les Tables qui peuvent être d'une grande utilité pour nos élèves, la Table des carrés et les petites Tables de puissances qui terminent le volume.

Il serait à désirer, pour que ce *Recueil* devînt promptement populaire, que l'auteur et l'éditeur se décidassent à faire un extrait exclusivement destiné aux lycées; mais telles qu'elles sont, les nouvelles Tables auront le succès qui ne peut manquer aux œuvres consciencieuses.

Nous croyons donc pouvoir les recommander sérieusement à toutes les personnes qui pensent avec M. Hoüel que le calcul numérique employé avec discernement peut devenir un puissant auxiliaire de la théorie et former par lui-même un excellent exercice intellectuel.

Nous ne recommandons pas moins la possession de ce volume aux amateurs de belles impressions, la maison Gauthier-

Villars s'étant surpassée elle-même dans l'exécution d'une œuvre si pleine de difficultés typographiques (*).

C.-H. Berger,
Professeur de Mathématiques spéciales
au lycée Charlemagne.

Duhamel, Membre de l'Institut. — *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement.* In-8° de x-94, xiv-450 pages; 1865-1866. Gauthier-Villars. — Prix : 1re *Partie*, 2 fr. 50 c.; 2e *Partie*, 6 fr. 50 c.

La langue des Mathématiques, comme toutes les langues, s'est formée progressivement par l'usage et à l'aide de conventions qui n'ont point toujours été explicites. Des locutions, suggérées par l'analogie, se sont imposées pour ainsi dire aux savants, presque à leur insu et sans qu'ils se rendissent bien compte de leur portée (**). Cependant ces locutions dérivaient

(*) En 1771, Cartault, commis principal de la Marine, mort le 26 octobre 1784, a offert à l'Académie des Sciences des Tables de logarithmes à sept décimales qui s'étendent jusqu'à 250 000. Une copie de ces Tables en deux volumes in-folio a été donnée par l'auteur à de Lalande en 1772 et est passée plus tard dans la bibliothèque de Delambre. J'ignore ce qu'elle est devenue; mais il existe une autre copie en deux volumes in-quarto, aujourd'hui en ma possession, et sur laquelle se lit la note suivante, de la main de Cartault : « Toutes les corrections qui se trouvent tant dans l'Instruction que dans la Table des logarithmes ont été faites par moi-même avec la plus grande attention. C'est d'après ces corrections que j'ai fait faire et que j'ai vérifié moi-même la copie exacte de l'Instruction (*a*) et des logarithmes, laquelle copie a été remise au dépôt de l'Académie royale des Sciences. On peut en toute sûreté s'en servir pour l'impression lorsqu'on le jugera à propos. » La Table est à simple entrée. Chaque page renferme 160 logarithmes disposés sur quatre colonnes.

P.

(*a*) J'ai copié aussi moi-même la Table. (*Note marginale de Cartault.*)

(**) Ce caractère du langage mathématique a été bien compris par Rolle, qui, parlant des avantages des quantités négatives, ajoute : « Il ne paroist pas qu'on les ait introduites (les quantités négatives) pour en tirer tous ces avantages, mais il paroist qu'on a été *comme forcé* de les introduire, et qu'il seroit difficile d'en éviter l'expression sans faire un changement très-considérable en Algèbre. » (*Traité d'Algèbre*, p. 16; 1690.)

si naturellement des objets étudiés, qu'elles étaient universellement comprises et acceptées. Les difficultés sont venues lorsqu'on a voulu les expliquer d'une façon abstraite, et indépendamment de toute application sérieuse, dans les Traités d'Algèbre, ces grammaires de la langue mathématique. Pour quelques auteurs, l'Algèbre semble n'être que l'art de deviner des rébus. Quelle lumière pouvez-vous tirer de problèmes dans lesquels de braves gens, interrogés sur leur âge, l'heure qu'il est ou le nombre d'œufs qu'ils ont vendu, font les réponses que vous savez? L'obscurité devenait de plus en plus grande, lorsque deux vrais géomètres, d'Alembert et Carnot, cherchèrent à la dissiper. Mais, faute de distinguer les choses de pure convention de celles dont l'existence est forcée, leurs dissertations ne produisirent pas l'effet qu'on devait attendre d'esprits aussi distingués. De cette méprise naquirent des objections peu fondées sur la règle des signes (*). La prétendue démonstration donnée de cette règle par d'Alembert est une véritable pétition de principe; mais peut-être l'auteur n'y attachait-il pas lui-même une grande valeur, puisqu'il ajoute : « Allez en avant, et la foi vous viendra. » On a critiqué cette pensée, qui est cependant d'une grande justesse. Il ne s'agit pas ici d'une foi aveugle, mais de la confiance raisonnée qui pénètre peu à peu dans l'esprit éclairé par une longue pratique. Nous enseignons aujourd'hui d'une manière plus satisfaisante la théorie des quantités négatives, mais nos élèves n'en possèdent bien toutes les ressources que lorsqu'ils se sont longtemps exercés dans la Trigonométrie et la Géométrie analytique.

Mais, sans renoncer au bénéfice du temps et de l'exercice,

(*) Delambre, plus astronome que géomètre, a néanmoins très-bien vu le peu de fondement de ces objections : « Les signes + et — ont en Algèbre deux significations : ils indiquent l'addition et la soustraction; ils signifient encore qu'une quantité est prise avec le signe — en sens contraire de celui qu'elle avait avec le signe +. Si vous confondez ces deux idées, vous pourrez être conduit à quelques conclusions absurdes, mais jamais cet inconvénient n'aura lieu si vous distinguez bien ces deux significations. » (*Rapport sur les progrès des sciences mathématiques*, p. 44, in-4; 1810.)

est-il possible de s'arranger de manière que chaque difficulté puisse être levée au moment où elle se produit? Un ordre convenable, de bonnes définitions, une extrême attention à distinguer ce qui est démontrable de ce qui ne l'est pas, peuvent conduire à ce but que semble s'être proposé M. Duhamel. Pendant près de cinquante années de professorat, M. Duhamel a cherché et réussi à répandre dans le public d'excellentes notions sur les points controversés. Aujourd'hui il consigne dans un livre le résultat de ses nombreuses réflexions et de sa longue expérience; c'est un nouveau service rendu à l'enseignement.

L'ouvrage de l'éminent Professeur se divise en deux Parties. La première est consacrée aux préceptes généraux applicables à toutes les sciences de raisonnement. Elle renferme des règles de logique très-simples, très-claires, que tout le monde admet, et qu'on oublie si facilement dans la pratique. Nous y avons trouvé, entre autres, une excellente réfutation de Condillac.

La seconde Partie comprend l'application des méthodes générales à la science des nombres et à celle de l'étendue. A part quelques articles où il y aurait matière à contestation, les Professeurs trouveront dans cette seconde Partie une foule de remarques sensées, écrites dans un style pur et élégant, dont ils tireront certainement profit.

Après avoir rendu hommage au talent de M. Duhamel et reconnu les qualités de son livre, nous sommes obligé, par un devoir sacré, d'en critiquer un passage concernant un géomètre dont la mémoire nous est chère. M. Duhamel, après avoir parlé avec un éloge mérité du théorème de Fourier, indique ensuite les lacunes de ce théorème.

« Il a, comme celui de Descartes, l'inconvénient de laisser croire à la possibilité de racines qui souvent n'existent pas, et de donner lieu à beaucoup de calculs inutiles avant qu'on parvienne à reconnaître leur absence. Cette lacune, dans la théorie de l'illustre géomètre, devait être comblée de son vivant, et, *comme cela était naturel*, par un de ses propres disciples.

» Sturm, qui avait connaissance, *comme il le dit lui-même*, non-seulement des Mémoires publiés par son maître, *mais en-*

core de tous ses travaux manuscrits, et qui pouvait par conséquent juger avec précision ce qui manquait à la théorie, chercha d'abord à bien reconnaître ce qui empêchait Fourier de pouvoir assigner le nombre exact des racines comprises entre deux nombres donnés, et ne permettait d'en indiquer avec certitude qu'une simple limite. Ayant reconnu la cause, il chercha à y remédier en substituant aux fonctions dérivées, employées par Fourier, d'autres polynômes très-différents qui n'offraient plus le même inconvénient. Et alors imitant, *comme il le dit avec naïveté*, les démonstrations de son maître, il est parvenu à la découverte du théorème qui porte son nom et qui permet d'assigner le nombre exact des racines comprises dans un intervalle donné. »

Assurément il est impossible d'imaginer un tour plus ingénieux pour amoindrir une importante découverte et le mérite de son auteur. Il y avait si peu de chose à faire! Le maître avait tracé la route, l'écolier docile avait suivi et trouvé au bout la récompense de son application. Rien de plus simple. Mais si vous remarquez que le maître avait de nombreux disciples auxquels il communiquait libéralement ses idées, que lui-même était depuis plus de trente ans en possession de sa méthode, qu'elle était l'objet constant de ses méditations, vous verrez qu'il ne suffisait pas d'être disciple de Fourier ni même de connaître les manuscrits de l'illustre géomètre.

Le lendemain d'une découverte il ne manque pas de gens qui trouvent la voie aisée pour y parvenir. Mais l'histoire détruit ces faciles théories, en nous montrant des propositions très-voisines dans l'ordre des idées et néanmoins très-séparées dans l'ordre des temps. Si un disciple de Descartes avait découvert, du vivant de ce dernier, le théorème de Fourier, cela aurait paru tout naturel. Cependant la règle de Fourier est venue près de deux cents ans après la règle de Descartes.

Enfin, ce que M. Duhamel appelle *naïveté*, je l'appellerai plutôt franchise, modestie, mémoire du cœur. Sturm avait de grandes obligations à Fourier; il les reconnaît loyalement, sans marchander, avec un complet oubli de lui-même, en ces termes :

« L'ouvrage qui doit renfermer l'ensemble de ses travaux sur l'analyse algébrique n'a pas encore été publié. Une partie du manuscrit qui contient ses précieuses recherches *a été communiqué à quelques personnes*. M. Fourier a bien voulu m'en accorder la lecture, et j'ai pu l'étudier à loisir. Je déclare donc que j'ai eu pleine connaissance de ceux des travaux inédits de M. Fourier qui se rapportent à la théorie des équations, et je saisis cette occasion de lui témoigner la reconnaissance dont ses bontés m'ont pénétré. C'est en m'appuyant sur les principes qu'il a posés et en imitant ses démonstrations que j'ai trouvé les nouveaux théorèmes que je vais énoncer. » Ces paroles émues font autant d'honneur à Sturm qu'à Fourier. Puissions-nous trouver souvent dans les œuvres des géomètres de *pareilles naïvetés !*

Mais si M. Duhamel fait si petite la part de l'inventeur, reconnaît-il au moins l'importance de l'invention? Pas le moins du monde. M. Duhamel ne dit rien de son importance théorique, si bien démontrée par les travaux de MM. Sylvester, Cayley et autres. Il se borne à insister sur des inconvénients pratiques.

« Malheureusement, continue M. Duhamel, l'application de ce théorême n'est pas aussi facile que celle du théorème de Fourier : les calculs sont très-longs, par conséquent *exposés à des erreurs qui pourraient en infirmer les conséquences*. On peut bien quelquefois les éviter par des remarques particulières, mais *tout le monde ne peut pas les faire*, et l'on a besoin de procédés que tout *le monde puisse employer avec le même succès*. Il est vrai que ces longs calculs pourraient servir dans le cas où l'on appliquerait la théorie des racines égales; mais enfin, pour le but même que se propose le théorème, le grand avantage qu'il procure est quelquefois acheté un peu cher. »

Il serait vraiment trop naïf de réfuter les objections tirées de la maladresse possible ou de l'ignorance des calculateurs. L'objection, je ne dirai pas la plus sérieuse, mais la plus spécieuse, est celle tirée de la longueur du calcul. Sur ce point,nous sommes heureux de céder la parole à Sturm, qui, comme on va le voir, ne laissera rien subsister des raisons de son contradicteur :

« M. Duhamel n'a d'autre objection à faire contre ma méthode que la longueur des calculs nécessaires pour trouver le plus grand commun diviseur entre le polynôme qu'on égale à zéro et sa fonction dérivée. L'objection tombe plutôt sur la méthode des racines égales que sur mon théorème, et par cela même elle attaque toutes les méthodes connues. Lagrange et tous les géomètres qui se sont occupés des équations numériques ont toujours admis la nécessité et la possibilité de débarrasser une équation de ses racines égales. On sait que le procédé de Lagrange pour réduire les racines réelles en fractions continues ne s'applique qu'au calcul d'une racine simple ou multiple d'ordre impair et ne pourrait pas donner la valeur d'une racine double.

» M. Duhamel n'a pas remarqué que son objection est bien plus forte contre la méthode de Fourier que contre la mienne.... C'est précisément un avantage de mon théorème qu'il se rattache à la théorie des racines égales.

» La recherche de toutes les racines d'une équation est surtout une question de théorie pure qui exige, pour la dignité de l'analyse, une solution d'une généralité et d'une rigueur absolues. Celle de Lagrange et la mienne ont seules ce caractère.

» J'ajoute que mon théorème sur les équations ne doit pas être considéré comme isolé. Il se rattache à une méthode générale de résolution qui s'applique à certaines équations algébriques déterminées qu'on rencontre dans les problèmes les plus importants de la Mécanique céleste, de l'Astronomie et de la Physique mathématique. Mon travail sur les équations linéaires du deuxième ordre, qui m'a fait trouver les propriétés des racines des équations transcendantes, n'est qu'une partie de cette théorie générale (*), et ce n'est qu'en suivant cette voie qu'on pourra savoir quelque chose sur les équations à différences partielles d'ordres supérieurs.

(*) J'ajouterai que ce travail est le point de départ du célèbre théorème, au dire de Sturm qui devait le savoir. La marche de l'inventeur n'a donc pas été celle que M. Duhamel suppose (*voir* plus haut, p. 237).
P.

» Les équations qu'on peut avoir à résoudre ne doivent pas être séparées du problème qui les amène. Leur génération donne le système de fonctions auxiliaires le plus simple possible, propre à faire découvrir ces racines.

. . . .

» Au surplus, j'offre à M. Duhamel une discussion verbale sur tous ces points qu'il serait trop long de traiter par écrit. En attendant, je lui proposerai de résoudre l'équation suivante :

$$10x^4 - 5x^3 - 76x^2 + 58x - 11 = 0,$$

sans faire usage de mon théorème et en écrivant tous ses calculs. Je l'ai choisie aussi simple qu'il m'a été possible, pour ne pas abuser de son temps. »

C'est ainsi que Sturm répondait à M. Duhamel il y a trente-huit ans. Nous croyons inutile d'y rien ajouter.

E. Prouhet.

P. S. — A partir de 1868, le théorème de Sturm fera partie des connaissances exigées des candidats à l'École Polytechnique.

QUESTIONS.

811. Nommons S un groupe quelconque de termes consécutifs dans le développement de $(1 - x)^i$, où l'exposant est négatif, ou bien un groupe quelconque de termes consécutifs à coefficients positifs dans le développement de $(1 + x)^i$, où i est positif; écrivons S sous la forme $x^k \sum$, $\sum$ sera ou une quantité qui ne change jamais son signe quel que soit x, ou une telle quantité multipliée par un binôme du premier degré.

La même proposition aura lieu pour un groupe quelconque de termes consécutifs dans le développement de l'exponentielle e^x. (Sylvester.)

GÉOMÉTRIE DES COURBES (*).

Sur les dépendances mutuelles des tangentes doubles des courbes du quatrième degré;

PAR M. J. STEINER.

Depuis que M. Poncelet a, pour la première fois, appelé l'attention sur l'existence des tangentes doubles des courbes algébriques (**), on s'est peu occupé d'en étudier les propriétés essentielles. Cependant on est parvenu depuis à déterminer le nombre de ces tangentes d'après celui des points d'inflexion en se fondant sur la théorie des polaires réciproques, dont les principes ont été également établis par l'auteur précité. J'ai donné, à ce sujet, des formules qui lient entre eux, d'une manière générale, le degré et la classe d'une courbe algébrique avec le nombre de leurs points multiples, de rebroussement, d'inflexion, et celui de leurs tangentes doubles (***). Après bien des tentatives, M. Jacobi est parvenu à déterminer directement et analytiquement le nombre de ces tangentes doubles dans un Mémoire inséré, il y a peu de temps, au *Journal de M. Crelle* (t. XL, p. 237). L'examen des propriétés générales de ces mêmes tangentes doit être plus difficile encore; les mathématiciens qui s'en sont occupés le reconnaîtront sans doute. J'ai

(*) Mémoire inséré par extrait dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXXVII, p. 121.

(**) *Journal de Mathématiques* de M. CRELLE, t. VIII, p. 401 à 406.

(***) *Monatsbericht der Akad. der Wissenschaften zu Berlin* (august 1848).

essayé, il y a quelques années, de trouver par voie de synthèse les relations mutuelles des 28 tangentes doubles de la courbe du quatrième degré, et je suis arrivé à des résultats qui, en montrant le fond des difficultés inhérentes à ce genre de questions, montrent en même temps la route à suivre pour les aborder et les traiter convenablement. Ces résultats reposent sur une combinaison des éléments donnés d'une complexité extraordinaire et, pour ainsi dire, inextricable. Le petit nombre des essais publiés jusqu'à ce jour par les mathématiciens, sur le même sujet, sont peu d'accord avec les résultats de mon travail, et ce n'est d'ailleurs qu'après l'avoir entièrement terminé que j'ai eu connaissance de ces essais. Les énoncés suivants ont pour but d'en donner une simple idée et de mettre les géomètres sur la voie des solutions ou démonstrations, difficiles sans doute dans l'état présent de l'analyse algébrique, mais que l'on déduira sans trop de peine des propositions fondamentales qui se trouvent rapportées dans mon Mémoire, déjà cité, de 1840 (t. IV du *Journal de M. Crelle*); d'où j'ai déduit, comme première conséquence, la théorie des polaires successives d'une courbe algébrique, d'un degré donné, sur un plan, par rapport à un point ou à une courbe pareille donnée sur ce plan.

I. Qu'on imagine une courbe générale du quatrième degré C^4. Ses 28 tangentes doubles t, arrangées par couples, donneront 378 couples. Désignons chaque couple par π, et le point d'intersection des deux tangentes de chaque couple par p; il y aura pareillement 378 points p. Soient m et n, m_1 et n_1 les points de contact de la courbe avec les deux tangentes du couple quelconque π; joignons ces points par les deux paires de droites mm_1 et nn_1, mn_1 et nm_1 : les deux droites de chaque paire se couperont réciproquement en un point. Appelons q et r les deux points ainsi obtenus. Alors il y aura, pour chaque couple π de tangentes, trois points p, q, r.

II. Les 378 points p, et avec eux les 378 couples π, peuvent être arrangés, 6 par 6, en groupes G, d'après une loi déterminée, de sorte qu'il en naîtra 63 groupes G, dont aucuns n'ont de point p ni de couple π commun avec les autres. Cela posé :

Les 6 *points* p *de chaque groupe* G *sont situés sur une certaine section conique* G^2*, ce qui donne en tout* 63 *sections coniques* G^2.

Les 6 points appartenant à un même groupe sont donnés par 12 tangentes t différentes, c'est-à-dire par 6 couples π n'ayant aucune tangente commune, de sorte que jamais deux points d'un groupe de $6p$ ne sont situés sur une même tangente.

III. Les 8 points de contact de quatre tangentes de deux couples π quelconques d'un même groupe se trouvent toujours sur une certaine section conique B^2, de sorte qu'il y a pour chaque groupe $\frac{1}{2}\,6 \times 5 = 15$ sections coniques B^2. D'après cela, il devrait y avoir pour les 63 groupes $63 \times 15 = 945$ sections coniques B^2; mais chacune d'elles est comptée trois fois, et n'y a réellement que 315 sections coniques différentes B^2, c'est-à-dire :

Parmi les 28 *tangentes doubles* t *d'une courbe du quatrième degré* C^4*, il y a, en général,* 315 *groupes de* 4 *tangentes telles, que leurs* 8 *points de contact se trouvent sur une même section conique* B^2.

IV. *Les* 18 *points de chaque groupe* G*, savoir : les* $6p$*, les* $6q$ *et les* $6r$ *se trouvent tous sur une certaine courbe du troisième degré* G^3*, de sorte qu'il y a* 63 *courbes* G^3.

16.

Chaque courbe G^3 coupe la courbe donnée C^4 en 12 points a, ce qui donne en tout $63 \times 12 = 756$ points déterminés a. Chacun de ces points jouit de cette propriété : *qu'une certaine section conique* A^2 *peut avoir au point a un contact du troisième ordre et, en outre, encore certains couples points de contact b et c du premier ordre avec la courbe donnée* C^4.

D'après cela,

Étant donnée une courbe du quatrième degré C^4, *si l'on demande une section conique* A^2 *ayant avec elle un point de contact a du troisième ordre et deux autres points de contact b et c du premier ordre, il y aura, en général,* 756 *solutions du problème.*

Si on joint les trois points a, b et c fournis par une de ces sections coniques par les droites ab, ac et bc, et que l'on mène par le point a les tangentes A et A_1 aux courbes C^4 et G^3, *les quatre droites* ab, A, ac, A_1 *formeront un faisceau harmonique, de sorte que la droite* A_1 *est déterminée par les trois autres; de plus, le point d'intersection d des droites* A *et* bc *se trouve sur la courbe* G^3, *de sorte qu'on obtient* 12 *nouveaux points d de cette courbe.*

Les 84 *droites appartenant à chaque groupe* G, *savoir : les* 6 *couples* π *de tangentes (équivalant à* 12 *droites* t)*; les* 6 *fois* 4 *droites* mm_1, nn_1, mn_1 *et* nm_1*; les* 12 *tangentes* A, *et enfin les* 12 *fois* 3 *droites* ab, ac *et* bc *sont toutes tangentes d'une certaine courbe de la troisième classe* K^3 *(du sixième degré); et les droites* ab *et* ac, *en particulier, ont les points b et c eux-mêmes pour points de contact avec elle, de sorte que les* 12 b *et les* 12 c *sont en même temps les* 24 *points d'intersection de cette courbe* K^3 *avec la courbe donnée* C^4. *Enfin il y a en tout* 63 *courbes* K^3.

Les deux courbes G^3 et K^3, appartenant à un même groupe, ont entre elles des relations intimes, dont nous indiquerons quelques-unes. Désignons par w chacun des 9 points d'inflexion de la courbe G^3, et par W la tangente en ce point; de chaque point w on peut mener trois tangentes Q, Q_1, Q_2 à la courbe, dont les points de contact q, q_1, q_2 sont situés sur une droite R_1. Appelons p le point d'intersection de W avec R_1. Désignons par R la tangente à chacun des 9 points de rebroussement de la courbe K^3, et par r' l'un de ces points de rebroussement; chaque tangente R coupe la courbe aux trois points q, q', q'', et les tangentes en ces points, Q, Q', Q'', se coupent toutes les trois en un point w. Appelons P la droite $r\omega_1$. *Les courbes* G^3 *et* K^3 *ont entre elles ces relations : qu'elles se touchent aux* 9 *points* q, *et que, par suite, les* 9 *droites* Q *sont leurs tangentes communes en ces points* q; *que les* 9 *couples de points* w *et* w_1, *aussi bien que les* 9 *couples de droites* R *et* R_1, *coïncident; enfin que les* 4 *droites* W, Q', Q, Q'', *aussi bien que les* 4 *points* r, q_1, q, q_2, *sont harmoniques, et que, par suite, les* 4 *droites* P, Q_1, Q, Q_2 *sont également harmoniques.*

Je réserve pour une autre occasion des discussions plus détaillées sur les autres relations des deux courbes.

V. Les 63 groupes G (II) peuvent être arrangés, 3 par 3, en systèmes S, d'après une loi telle, que pour deux groupes quelconques il en existe *toujours un troisième, mais un seul,* qui fasse un système S avec les deux autres. D'après cela, le nombre de ces systèmes est $= 651$, et chaque groupe appartient à 31 de ces systèmes.

L'ensemble de ces systèmes, d'après une propriété constitutive, se divise naturellement en deux sections. Pour plus de clarté nous désignerons par S_1 et S_2 les systèmes appartenant à ces sections : la première section contient 315 systèmes S_1, la seconde 336 systèmes S_2, et chaque groupe G appartient à 15 systèmes S_1 et à 16 systèmes S_2.

Les systèmes respectifs de chacune de ces deux sections ont entre autres les caractères distinctifs suivants :

1° Les trois groupes de chaque système S_1 ont toujours 4 tangentes doubles communes telles, qu'elles forment dans chaque groupe deux couples π. Soient, par exemple, u, x, y et z les quatre tangentes t communes, il faudrait que ux et yz fussent les couples d'un des trois groupes, uy et xz les couples d'un second groupe, et uz et xy les couples du troisième groupe. D'après cela, les 8 points de contact de quatre tangentes pareilles u, x, y et z se trouvent toujours sur une section conique B^2 (III). Les trois groupes embrassent toutes les 28 tangentes doubles t, et quatre de celles-ci, u, x, y et z, sont employées chacune trois fois.

2° Au contraire, les trois groupes de chaque système S_2 ne contiennent ensemble que 18 tangentes doubles t, chacune de ces dernières appartenant à deux groupes, de sorte que deux quelconques des trois groupes ont 6 tangentes communes; ou bien, si nous désignons les 18 tangentes par a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; b, b_1, b_2,..., b_5; c, c_1, ..., c_5, il faudrait, par exemple, que

ab, $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, $a_4 b_4$, $a_5 b_5$ fussent des couples d'un premier groupe;

ac, $a_1 c_1$, $a_2 c_2$, $a_3 c_3$, $a_4 c_4$, $a_5 c_5$, des couples d'un second groupe,

Et bc, $b_1 c_1$, $b_2 c_2$, $b_3 c_3$, $b_4 c_4$, $b_5 c_5$, des couples du troisième groupe.

Abstraction faite de ces différences, tous les systèmes ont la propriété commune suivante :

Si l'on choisit dans chacun des trois groupes d'un sys-

tème S *un couple quelconque* π *de tangentes doubles, les* 12 *points de contact de ces tangentes se trouveront à la fois sur une certaine courbe du troisième degré* B^3.

D'après la règle des combinaisons, on aura, pour chaque système S,

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

courbes B^3, et en tout

$$63 \times 216 = 14016$$

courbes B^3. Mais alors chaque courbe se trouve être comptée plus ou moins souvent, de sorte que le nombre des courbes B^3 différentes les unes des autres est bien moindre. De plus, B^3 n'est pas toujours une courbe de la forme générale ; au contraire, dans le plus grand nombre des cas, elle se décompose en une section conique et une droite, ou bien en trois droites ; et ces sections coniques ne sont autres que les 315 sections coniques B^2 (III), et les droites ne sont autres que les 28 tangentes doubles t elles-mêmes. Ces circonstances ont lieu de la manière suivante.

Pour tout système S_1, si nous désignons par t_0 chacune des quatre tangentes communes u, x, y, z, et par B^2_0 la section conique B^2 passant par les 8 points de contact de ces tangentes, les 216 courbes B^3 se composent comme il suit :

a. 4 de trois droites, savoir : de u, x, y, u, x, z, u, y, z et x, y, z ;

b. 4 de $B^2_0 + t_0$, c'est-à-dire de B^2_0 et d'une des quatre droites u, x ou y, z ;

c. 48 de $B^2 + t_0$, d'une des droites u, x, y, z, avec une section conique B^2,

d. Et 160 de courbes B^3 proprement dites.

Pour tout système S_2, au contraire, les 216 courbes B^3 se composent :

e. 6 de trois droites, savoir : de a, b, c, a_1, b_1, c_1,..., a_5, b_5, c_5;

f. 90 de $B^2 + t$, savoir : d'une section conique B^2 avec une des 18 droites $a, a_1, \ldots, a_5$, $b, b_1, \ldots, b_5$, $c, c_1, \ldots, c_5$,

g. Et 120 courbes B^3 proprement dites.

En résumé il y aurait :

α. Courbes B^3, composées de trois droites (a et e) :

$$315 \times 4 + 336 \times 6 = 3276,$$

nombre égal à celui des combinaisons des 28 tangentes doubles prises trois à trois, $= \frac{28 \times 27 \times 26}{1.2.3}$.

β. Courbes B^3, composées de $B_0^2 + t_0$, la section conique B_0^2 passant par les points de contact de la tangente t_0 (b) :

$$315 \times 4 = 1260.$$

γ. Courbes B^3, composées de $B^2 + t$, B^2 ne passant pas par les points de contact de t (c et f) :

$$315 \times 48 + 336 \times 6 = 45360.$$

δ. Courbes B^3 proprement dites, non décomposées (d et g) :

$$315 \times 160 + 336 \times 120 = 90720,$$

ce qui fait en total le nombre 140616 énoncé ci-dessus.

7°. Comme il n'y a que 315 sections coniques B^2 (III), tandis que nous venons d'en trouver 45360 (γ), il faut que chacune d'elles ait été employée 144 fois; de plus, elle est chaque fois liée à une des 24 tangentes t, par les points de contact desquelles *elle ne passe pas*. Il faut donc qu'elle soit employée dans cette liaison avec chacune de ces tangentes $\frac{144}{24} = 6$ fois. De sorte que le nombre des $B^2 + t$ données sous (γ), mais différentes l'une de l'autre, se réduit à

$$\frac{45360}{6} = 7560,$$

en observant que toujours 24 de ces $B^2 + t$ contiennent la même section conique B^2, et ne diffèrent l'une de l'autre que par la tangente t.

δ^o. De plus, comme toute courbe B^3, énoncée sous (δ), passe par les points de contact de 6 tangentes t, lesquelles sont employées 15 fois sous la forme de 3 couples π, cette courbe se trouve répétée 15 fois, de sorte qu'il n'y a en effet que

$$\frac{90720}{15} = 6048$$

courbes B^3 proprement dites, différentes l'une de l'autre.

D'après cela, le nombre réel des courbes B^3 différentes l'une de l'autre est :

[α]. 3276, composées chacune de $3t$;
[β]. 1260, composées de $B^2_0 + t_0$;
[γ^o]. 7560, composées de $B^2 + t$,
[δ^o]. 6048 courbes B^3 proprement dites.
Somme totale = 18144.

Le résultat principal est contenu sous (δ^o), savoir :

Parmi les 28 *tangentes doubles t d'une courbe du quatrième degré, il y a en général* 6048 *fois* 6 *tangentes telles, que leurs* 12 *points de contact se trouvent sur une courbe du troisième degré* B^3 *proprement dite, c'est-à-dire non décomposée.*

VI. Les 63 groupes G (II) peuvent être arrangés 4 par 4 en systèmes S [4], tels que pour trois groupes quelconques, mais qui ne constituent pas un système S (V), il y a *toujours un quatrième groupe, mais* *un seul,* qui forme un système S [4] avec les trois autres, et ce quatrième groupe ne doit pas non plus former un système S avec deux quelconques de ceux-ci. Cela posé, il existe en totalité 9765 systèmes S [4] qui jouissent, entre autres, de la propriété commune suivante :

Si l'on choisit dans chacun des quatre groupes d'un système S [4] *un couple quelconque* π *de tangentes doubles, les* 16 *points de contact de ces tangentes se trouveront à la fois sur une courbe du quatrième degré* B^4.

VII. Pareillement les 63 groupes peuvent être arrangés, 5 par 5, en systèmes S [5], tels que, pour quatre groupes quelconques qui ne forment entre eux ni un système S (V) ni un système S [4] (VI), il y a *toujours un cinquième groupe, mais un seul,* qui forme un système S [5] avec les quatre autres, et ce cinquième groupe ne doit pas non plus former ni avec deux ni avec trois des quatre premiers groupes l'un des systèmes énoncés précédemment. Il existe 109368 pareils systèmes S [5], tous distincts entre eux, et jouissant de la propriété suivante :

Si l'on choisit dans chacun des cinq groupes d'un système S [5] *un couple quelconque* π *de tangentes doubles, les* 20 *points de contact de ces tangentes se trouveront à la fois sur une courbe du cinquième degré* B^5.

VIII. Les 63 groupes G peuvent être arrangés encore 6 par 6, en systèmes S [6], tels que pour cinq groupes quelconques, qui ne forment entre eux aucun des systèmes indiqués précédemment, il existe *toujours un sixième groupe, mais un seul,* qui ne doit former non plus, ni avec deux, ni avec trois, ni avec quatre des cinq premiers groupes, un des systèmes déjà énoncés. Le nombre de ces systèmes S [6] s'élève à 874944, et, *Si l'on choisit dans chacun des six groupes d'un système* S [6] *un couple quelconque* π *de tangentes doubles, les* 24 *points de contact de ces tangentes se trouveront à la fois sur une courbe du sixième degré* B^6.

IX. Enfin les 63 groupes peuvent être arrangés en systèmes S [7] de 7 et 7 groupes, de sorte que pour six groupes quelconques, ne formant entre eux aucun des systèmes déjà énoncés, il y a *toujours un certain* septième groupe qui ne doit former ni avec deux, ni avec trois, ni avec quatre, ni avec cinq de ces six groupes un des systèmes énoncés. Le nombre des systèmes S [7] est = 3 999 744.

Si l'on choisit dans chacun des sept groupes d'un système S [7] *un couple quelconque* π *de tangentes, les* 28 *points de contact de ces tangentes se trouveront toujours sur une courbe du septième degré* B^7.

Il n'y a pas de systèmes formés par 8, 9,... groupes.

Remarque. — Il a été dit aux n^{os} VI, VII, VIII et IX que les 16, 20, 24, 28 points de contact se trouvent tous sur une courbe B^4, B^5, B^6, B^7; mais il est bien entendu que ces courbes ne sont pas parfaitement déterminées par ces points, comme l'était la courbe B^3 au n° V. Au contraire, on peut faire passer par ces points un nombre infini de courbes du même degré, et il doit être sous-entendu que ces points jouissent de la propriété qu'on peut faire passer par eux de telles courbes. Si l'on prenait à volonté le même nombre de points sur la courbe C^4, on ne pourrait pas faire passer par eux des courbes des degrés indiqués; car on sait qu'une courbe du degré n, B^n peut avoir $4n$ points d'intersection avec la courbe C^4, et que de ces $4n$ points on ne saurait prendre à volonté que $4n - 3$, les autres trois points étant alors déterminés.

X. Ce qui précède conduit à plusieurs questions ou problèmes, dont voici quelques-uns :

1. *Quels sont les résultats auxquels on parvient en soumettant les systèmes des* nos VI, VII, VIII *et* IX *à des discussions aussi détaillées que celles faites sur les systèmes* S *au* n° V?

Ou bien, on peut demander en particulier :

Combien de fois y a-t-il, parmi les 28 *tangentes doubles* t, 8, 10, 12 *ou* 14 *tangentes telles, que leurs* 16, 20, 24 *ou* 28 *points de contact se trouvent tous sur une courbe proprement dite* B^4, B^5, B^6 *ou* B^7 ?

2. *Quelle est la manière d'être des* 63 *sections coniques* G^2 (II) *à l'égard de leur position relative?*

3. *Quelles sont les relations des* 63 *courbes du troisième degré* G^3 (IV) *entre elles ?*

4. *Quelles sont les relations des* 63 *courbes de la troisième classe* K^3 (IV) *à l'égard de leur position?*

Berlin, octobre 1852.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1866.

Composition mathématique;

PAR M. VICTOR-ALEXANDRE CHORON (*).

ÉNONCÉ. — *Étant données une parabole*

$$y^2 = 2px$$

(*) Cet élève a été admis le PREMIER.

et une hyperbole équilatère

$$xy = m^2$$

ayant pour asymptotes l'axe et la tangente au sommet de la parabole, on propose :

1° *De former l'équation ayant pour racines les abscisses ou les ordonnées des pieds des normales communes aux deux courbes;*

2° *De déduire de cette équation que le nombre des normales communes réelles est au moins* un *et au plus* trois;

3° *De démontrer que lorsque* $7p^4$ *est* $> 2m^4$, *il n'y a qu'une normale commune réelle.*

Soit MP une normale commune à la parabole et à l'hyperbole données, soit M le point où elle est normale à l'hyperbole. Je désigne par x et y les coordonnées du point M; j'aurai entre x et y la relation

$$xy = m^2.$$

L'équation de la normale MP au point M sera, X et Y étant les coordonnées courantes,

$$\frac{X - x}{y} = \frac{Y - y}{x}.$$

Je calcule l'abscisse à l'origine $OA = X_a$ de cette droite; j'aurai

$$X_a = \frac{x^2 - y^2}{x}.$$

Dans une parabole, la sous-normale est constante et égale à p; si la droite MP est normale à la parabole, son pied aura nécessairement pour abscisse $X_a - p$, et si le point de la droite MP dont l'abscisse est égale à $X_a - p$ se trouve situé sur la parabole, le même théorème montre que la droite MP sera normale à la parabole en ce point.

Je calcule l'ordonnée du point de la droite dont l'abscisse est égale à $X_a - p$; cette ordonnée est égale à $y - \frac{x}{y}\left(\frac{y^2}{x} + p\right)$ ou à $-\frac{px}{y}$. J'exprime que le point $\left(\frac{x^2 - y^2}{x} - p, -\frac{px}{y}\right)$ est situé sur la parabole par la relation

$$(1) \qquad \frac{p^2x^2}{y^2} = 2p\left(\frac{x^2 - y^2}{x} - p\right).$$

Cette équation, jointe à la relation

$$xy = m^2,$$

détermine les coordonnées des points où les normales communes cherchées sont normales à l'hyperbole.

Pour avoir l'équation qui définit les abscisses de ces points, il me suffit de remplacer y par $\frac{m^2}{x}$ dans l'équation (1); il me vient ainsi

$$\frac{p^2x^4}{m^4} = 2p\left(\frac{x^2 - \frac{m^4}{x^2}}{x} - p\right),$$

ou, ramenant à une forme entière et ordonnant,

$$(2) \qquad px^7 - 2m^4x^4 + 2m^4px^3 + 2m^8 = 0.$$

Avant de discuter cette équation, je remarque qu'à chaque racine réelle trouvée pour x correspondra une normale commune, et une seule normale commune. Car cette valeur de x définira un point réel et un seul sur l'hyperbole

$$xy = m^2.$$

Ensuite la normale menée en ce point sera normale à la parabole en un point réel

$$\frac{x^2 - y^2}{x} - p, \quad -\frac{px}{y}.$$

Cela posé, je discute l'équation (2). Il y a une lacune de deux termes entre le terme en x^7 et le terme en x^6. Comme une lacune de deux termes fait toujours perdre deux variations à la somme des variations d'un polynôme ordonné et du polynôme obtenu par le changement de x en $-x$, l'existence de cette lacune m'apprend que l'équation (2) a forcément des racines imaginaires. Une seconde lacune de deux termes entre le terme en x^3 et le terme indépendant m'apprend l'existence de deux autres racines imaginaires. Ainsi l'équation (2) ne saurait avoir plus de trois racines réelles; d'ailleurs, comme elle est de degré impair, elle admet toujours au moins une racine réelle, d'ailleurs négative.

La dérivée du premier membre de l'équation est

$$x^2(7px^4 - 8m^4x + 6m^4p).$$

Pour que l'équation (2) ait plus d'une racine réelle, il faut que cette dérivée puisse changer de signe ou que $7px^4 + 8m^4x + 6m^4p$ puisse s'annuler pour des valeurs réelles de x. Je prends encore la dérivée, et j'obtiens

$$4(7px^3 - 2m^4).$$

L'équation que j'obtiendrai en égalant cette dérivée à o ne pouvant avoir qu'une seule racine, la dérivée première ne pourra s'annuler pour plus de deux valeurs réelles de x, et la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait effectivement deux racines réelles sera que le résultat de la substitution de $\sqrt[3]{\frac{2m^4}{7p}}$ dans $7px^4 - 8m^4x + 6m^4p$

soit négatif. On devra donc avoir

$$2m^4\sqrt[3]{\frac{2m^4}{7p}} - 8m^4\sqrt[3]{\frac{2m^4}{7p}} + 6m^4p < 0,$$

$$-\sqrt[3]{\frac{2m^4}{7p}} + p < 0,$$

$$p < \sqrt[3]{\frac{2m^4}{7p}},$$

$$7p^4 < 2m^4.$$

Ainsi, quand $7p^4$ sera plus grand que $2m^4$, la dérivée première ne pourra jamais changer de signe et l'équation en x n'aura qu'une seule racine réelle; quand $7p^4$ sera plus petit que $2m^4$, la dérivée changera deux fois de signe. Ainsi l'inégalité

$$7p^4 < 2m^4$$

est nécessaire et non suffisante pour qu'il y ait trois racines réelles, et par conséquent pour qu'il puisse y avoir trois normales communes réelles.

L'équation qui donnerait les ordonnées les pieds des normales relatifs à l'hyperbole serait l'équation en x, où je remplacerais x par $\frac{m^2}{y}$:

$$p\frac{m^{14}}{y^7} - 2m^4\frac{m^8}{y^4} + 2m^4p\frac{m^6}{y^3} + 2m^8 = 0,$$

$$2y^7 + 2m^2py^4 - 2m^4y^3 + pm^6 = 0.$$

Raisonnant comme tout à l'heure, j'aurai

$$f'_y = 2(7y^6 + 4m^2py^3 - 3m^4y^2).$$

Prenant encore la dérivée de $7y^4 + 4m^2py - 3m^4$, il me vient $4(7y^3 + m^2p)$, qui change de signe pour la valeur $-\sqrt[3]{\dfrac{m^2p}{7}}$ attribuée à y. Posant encore

$$f'\left(-\sqrt[3]{\frac{m^2p}{7}}\right) < 0,$$

j'arrive à

$$-p\sqrt[3]{\frac{m^2p}{7}} - m^2 < 0,$$

condition toujours remplie. Ainsi la considération de l'équation aux ordonnées fournit des résultats beaucoup moins avantageux que la considération de l'équation aux abscisses; l'une donnait au moins une restriction pour la réalité des racines, la seconde ne fournit rien.

Je vais maintenant former l'équation qui donne les ordonnées des pieds des normales communes relatifs à la parabole (*).

Si dans l'équation (2) je remplaçais y par $\sqrt{2px}$, j'obtiendrais une équation du septième degré en $\sqrt{x}$; chaque valeur réelle de $\sqrt{x}$ me fournirait une valeur positive de x; substituant cette valeur de x dans l'équation

$$y^2 - 2px = 0,$$

et prenant seulement la valeur négative du radical $\sqrt{2px}$, je vois qu'à chaque valeur réelle de $\sqrt{x}$ correspond une valeur admissible de y, et une seule.

Le texte qui m'a été remis demandait de démontrer qu'il ne pouvait y avoir qu'une seule normale commune lorsque m et p satisfont à l'inégalité

$$7p^4 < 2m^4,$$

et j'ai trouvé que cette inégalité était au contraire néces-

(*) Nous omettons ce calcul bien superflu, après ce qui vient d'être dit et où il s'est glissé une légère faute : $+4$ au lieu de -8.

saire pour qu'il pût y avoir trois normales communes; je crois bien qu'il y a dans le texte une faute d'impression. Si je suppose que p devienne de plus en plus grand, la parabole s'élève de plus en plus rapidement au-dessus de son axe; ainsi, dans la *fig.* 1, les ordonnées croissent très-rapidement, et l'œil conçoit mal que l'on puisse mener plusieurs normales communes. Si, au contraire, j'attribue à p une valeur assez petite pour que la parabole soit très-aplatie, comme dans la *fig.* 2, l'œil aperçoit beaucoup mieux la possibilité de mener trois normales communes (*).

NOTE

sur la question proposée au concours d'admission à l'École Polytechnique (année 1866).

1. Si x et y représentent les coordonnées du pied (sur l'hyperbole) d'une normale commune aux deux courbes considérées, la valeur de x doit vérifier l'équation

$$(1)\qquad px^7 - 2m^4x^4 + 2pm^4x^3 + 2m^8 = 0,$$

qui admet une racine réelle *négative*, et au plus deux racines positives.

A chaque valeur réelle de x correspond une valeur réelle de y donnée par $xy = m^2$; donc le nombre des normales communes est au moins *un*, et au plus *trois*.

2. En remplaçant dans l'équation (1) x par pz et m^4 par p^4h, il vient

$$(2)\qquad z^7 - 2hz^3(z-1) + 2h^2 = 0,$$

(*) Je ne reproduis pas ces figures, que chacun peut se représenter. P.

d'où

$$h = \frac{z^3}{2}\left[z - 1 \pm \sqrt{(z-2)^2 - 3}\right]. \tag{3}$$

La quantité h ou $\frac{m^4}{p^4}$ étant réelle et positive, l'équation (3) montre que z ne peut avoir une valeur positive moindre que $2 + \sqrt{3}$ (*). D'autre part, il est évident que pour toute racine positive de l'équation (2), on a

$$2h(z-1) > z^4,$$

inégalité qui donne

$$2h > \frac{z^4}{z-1} > z^3 + z^2 + z + 1,$$

ou, parce que z est au moins égale à $2 + \sqrt{3}$,

$$2h > (2+\sqrt{3})^3 + (2+\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3}) + 1,$$

$$2h > 36 + 20\sqrt{3} > 70,$$

et par suite

$$h > 35, \quad \frac{m^4}{p^4} > 35, \quad 7p^4 < \frac{m^4}{5}.$$

Il n'y aura donc qu'une seule normale commune, si $7p^4$ est plus grand que $\frac{m^4}{5}$, et à plus forte raison si on a $7p^4 > 2m^4$.

3. Mais l'inégalité $h > 35$ n'exprime pas une condition suffisante pour que le nombre des normales communes soit *trois*; car la plus petite valeur entière que h puisse avoir lorsqu'il y a trois normales communes est 63. Cela résulte du calcul suivant.

(*) Par conséquent le minimum des valeurs positives de l'abscisse x est $p(2+\sqrt{3})$.

En posant

$$h = \alpha z^3 \quad \text{et} \quad z = \frac{2\alpha(\alpha+1)}{2\alpha-1},$$

l'équation (2) est vérifiée, quel que soit α. Pour que z et h soient positifs, il faut prendre $\alpha > \frac{1}{2}$.

La dérivée de h par rapport à α est

$$\frac{8\alpha^3(\alpha+1)^2}{(2\alpha-1)^4}(8\alpha^2-5\alpha-4);$$

en l'égalant à zéro, l'équation qui en résulte admet pour racine positive $\frac{5+\sqrt{153}}{16} = 1,08,\ldots$, et cette racine détermine le minimum des valeurs positives de h correspondantes à des valeurs positives de z. Pour $\alpha = 1,08,\ldots$, on a $z = 3,86,\ldots$, et, en remplaçant α et z par leurs valeurs dans l'équation $h = \alpha z^3$, on trouve $h > 62$ et $h < 63$; ainsi, en nombres entiers, le minimum de h est 63.

Lorsque h ou $\frac{m^4}{p^4}$ est égal à 63, les deux racines positives de l'équation

$$(1) \qquad px^7 - 2m^4x^4 + 2pm^4x^3 + 2m^8 = 0$$

sont comprises, l'une entre $p \times 3,8$ et $p \times 3,9$, et l'autre entre $p \times 3,9$ et $4p$.

Si $\frac{m^4}{p^4} = 64$, la plus grande des deux racines positives de l'équation est $4p$, et la plus petite est comprise entre $p \times 3,7$ et $p \times 3,8$. G.

SUR UNE RÈGLE DE CONVERGENCE DES SÉRIES;

PAR M. A. GENOCCHI.

Une règle assez remarquable pour déterminer la convergence ou divergence des séries peut être déduite très-simplement d'une formule identique due à Nicole (*). On a d'abord

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a+v_n}+\frac{b+v_n}{(a+v_n)(a-b)};$$

d'où, en remplaçant successivement v_n par v_0, v_1, $v_2,\ldots$, v_n, multipliant respectivement par les quantités 1, $\frac{b+v_0}{a+v_0}$, $\frac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)}$, etc., et ajoutant les produits, on tire, après des réductions faciles,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a-b}=\frac{1}{a+v_0}&+\frac{b+v_0}{(a+v_0)(a+v_1)}+\frac{(b+v_0)(b+v_1)}{(a+v_0)(a+v_1)(a+v_2)}+\ldots\\&+\frac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_{n-1})}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_n)}\\&+\frac{(b+v_0)(b+v_1)\ldots(b+v_n)}{(a+v_0)(a+v_1)\ldots(a+v_n)(a-b)}.\end{aligned}$$

Cette formule ne diffère pas de celle de Nicole, qu'on trouve en faisant $v_0=0$. Le second membre renferme les $n+1$ premiers termes d'une série avec un terme complémentaire. Désignons par w_n le terme général de la série, par R_n le terme complémentaire, nous aurons

$$\frac{1}{a-b}=w_0+w_1+\ldots+w_n+R_n,\qquad \frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{b+v_n}{a+v_{n+1}};$$

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1727, p. 257.

de plus,

$$\frac{1}{R_n} = (a-b)\left(1+\frac{a-b}{b+v_0}\right)\left(1+\frac{a-b}{b+v_1}\right)\cdots\left(1+\frac{a-b}{b+v_n}\right).$$

Si les quantités a, b, v_n sont positives, et que a soit $>b$, on aura évidemment

$$\frac{1}{R_n} > (a-b)\left(1+\frac{a-b}{b+v_0}+\frac{a-b}{b+v_1}+\ldots+\frac{a-b}{b+v_n}\right);$$

d'où il s'ensuit que si la série dont le terme général est $\frac{1}{b+v_n}$ est divergente, la valeur de $\frac{1}{R_n}$ augmentera indéfiniment avec n, et par conséquent celle de R_n décroîtra sans cesse et aura pour limite zéro, en sorte que la série Σw_n sera convergente. Soit

$$\frac{1}{b+v_n} = v'_n.$$

D'après un principe connu, une série Σu_n est divergente si l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v'_{n+1}}{v'_n},$$

et convergente si l'on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{w_{n+1}}{w_n},$$

pour n quelconque ou à partir d'une valeur donnée de n, les termes u_n étant supposés positifs. Il en résulte la règle suivante :

Une série composée de termes positifs u_n sera convergente s'il existe une autre série à termes positifs $\frac{1}{b+v_n}$ qui soit divergente et telle que, du moins à partir d'une *valeur donnée de n; on ait constamment*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b + v_n}{a + v_{n+1}},$$

a et b étant deux nombres déterminés positifs et $a > b$.

Au contraire, la même série sera divergente si l'on a sous les mêmes conditions

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{b + v_n}{b + v_{n+1}}.$$

Il est visible que la première partie de cet énoncé serait, à plus forte raison, vérifiée si la série $\Sigma \frac{1}{b + v_n}$ était convergente, et que dans ce cas il suffirait de la condition

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b + v_n}{b + v_{n+1}}.$$

On peut aussi mettre les inégalités précédentes sous les formes

$$(a + v_{n+1}) \frac{u_{n+1}}{u_n} - (a + v_n) < -(a - b),$$

$$(b + v_{n+1}) \frac{u_{n+1}}{u_n} - (b + v_n) > 0.$$

En remarquant que si la série $\Sigma \frac{1}{a + v_n}$ est divergente, la série $\Sigma \frac{1}{b + v_n}$ le sera à plus forte raison, on peut encore considérer seulement l'expression

$$(a + v_{n+1}) \frac{u_{n+1}}{u_n} - (a + v_n).$$

La série $\Sigma \frac{1}{a + v_n}$ étant supposée divergente si cette expression est positive, la série Σu_n sera aussi divergente;

si cette expression est négative *et toujours inférieure à une quantité déterminée négative*, la série Σu_n sera convergente. Si la série $\Sigma \frac{1}{a+v_n}$ était convergente, il suffirait, pour en conclure la convergence de la série Σu_n, que la même expression fût toujours négative. En supposant la série $\Sigma \frac{1}{a+v_n}$ divergente, on voit que *la série Σu_n sera convergente ou divergente suivant que l'expression indiquée aura pour n infini une limite négative ou une limite positive.*

Prenons, par exemple, $a+v_n=n$, nous retrouverons la règle connue de M. Duhamel. En faisant successivement

$$a+v_n=n, \quad =nln, \quad =nlnlln, \quad =nlnllnllln,$$

où la caractéristique l désigne des logarithmes népériens, nous obtiendrons un autre théorème connu (*), d'après lequel une série Σu_n est convergente ou divergente suivant que sera négative ou positive la première des expressions

$$\lim\left[(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}-n\right],$$

$$\lim\left[(n+1)\,l(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}-nln\right],$$

$$\lim\left[(n+1)\,l(n+1)\,ll(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}-nlnlln\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

qui ne sera pas égale à zéro. On sait, en effet, que dans tous ces exemples la série $\Sigma\frac{1}{a+v_n}$ est divergente.

Le théorème que nous venons de rappeler est surtout

(*) CATALAN, *Traité élémentaire des séries*, p. 23, théor. XIV.

utile lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ se présente sous l'une des formes

$$1 + \frac{k_n}{n},$$

$$1 - \frac{1}{n} + \frac{k_n}{nln},$$

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{nln} + \frac{k_n}{nlnlln},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

k_n désignant une fonction de n qui, pour n infini, a une limite finie différente de -1. Dans les deux premiers cas est comprise la règle de Gauss, qui suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{h}{n} + \frac{H}{n^2},$$

h étant une constante et H une fonction de n dont la valeur reste finie.

Le théorème que M. Rouché a donné dans les *Nouvelles Annales* (1866, p. 12) se déduit immédiatement de notre règle. Car, en supposant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-p-x}{n-p+1},$$

si la quantité x est positive, on fera

$$a = x, \quad b < x, \quad v_n = n - p - x,$$

et l'on aura

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b+v_n}{a+v_{n+1}};$$

si la quantité x est négative ou nulle, on fera

$$b + v_n = n - p,$$

et l'on aura

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \frac{b+v_n}{b+v_{n+1}};$$

donc la série Σu_n est convergente dans le premier cas, divergente dans le dernier.

La règle de convergence démontrée dans cette Note se rapproche de celle de M. Kummer (*), et, comme celle-ci, elle est applicable à une série quelconque, attendu qu'une série à termes positifs u_n étant donnée, il existe toujours une série auxiliaire $\Sigma \frac{1}{b+v_n}$, par laquelle l'une ou l'autre des inégalités ci-dessus indiquées sera vérifiée. En effet, si la série Σu_n est divergente, on peut prendre

$$b + v_n = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}}{u_n},$$

puisque, en vertu d'un théorème d'Abel, la série $\Sigma \frac{1}{b+v_n}$ sera aussi divergente, et il viendra

$$b + v_{n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} + u_n}{u_{n+1}}.$$

d'où

$$\frac{b+1+v_n}{b+v_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

et par suite

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{b+v_n}{b+v_{n+1}}.$$

Si la série Σu_n est convergente, on peut prendre

$$b + v_n = \frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots}{u_n},$$

d'où

$$b + v_{n+1} = \frac{u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots}{u_{n+1}}, \qquad \frac{b+v_n}{b+1+v_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

(*) *Journal de Crelle*, t. XIII.

et par suite

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{b + v_n}{a + v_{n+1}},$$

si a est une quantité comprise entre b et $b+1$.

NOTE SUR LES FONCTIONS PÉRIODIQUES;

Par M. Hermann LAURENT,
Répétiteur d'analyse à l'École Polytechnique.

On appelle *période* d'une fonction $f(x)$ une quantité ω telle, que l'on ait

$$f(x+\omega) = f(x).$$

Il est aisé de voir que si ω est une période, $-\omega$, $\pm 2\omega$, $\pm 3\omega$, etc., seront également des périodes. En effet, on a, par exemple,

$$f(x+3\omega) = f(x+2\omega) = f(x+\omega) = f(x);$$

on a aussi

$$f(x-\omega) = f(x-\omega+\omega) = f(x).$$

ω, 2ω,..., $n\omega$ ne constituent pas ce que l'on appelle des *périodes distinctes;* deux périodes ω et ω' sont distinctes lorsqu'il n'existe pas de période δ telle, que ω et ω' soient des multiples entiers de δ.

Lorsque ω et ω' sont deux périodes distinctes, $\omega+\omega'$ et en général $m\omega + m'\omega'$ sont également des périodes, m et m' désignant deux entiers positifs ou négatifs. Le but que nous nous proposons dans cette Note est de démontrer qu'une fonction ne peut avoir plus de deux périodes distinctes.

Pour le démontrer, nous ferons usage d'un principe très-fécond dû à Mourey, et que l'on peut énoncer comme il suit :

Si l'on représente la quantité imaginaire

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

par une droite de longueur r et faisant avec un axe fixe dans un plan fixe un angle égal à θ, la somme de deux imaginaires sera représentée par la résultante des droites qui représentent chacune de ses parties. En effet, considérons les imaginaires

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta), \quad r'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta');$$

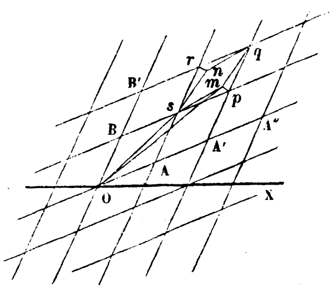
$r\cos\theta$ et $r'\cos\theta'$ sont les projections sur l'axe fixe des droites qui représentent les imaginaires en question; $r\cos\theta + r'\cos\theta'$ sera donc la projection sur le même axe de leur résultante, c'est-à-dire la partie réelle de l'imaginaire représentée par cette résultante, en considérant maintenant comme axe de projection une droite perpendiculaire à l'axe fixe de tout à l'heure, on verrait que $r\sin\theta$, $r'\sin\theta'$ et $r\sin\theta + r'\sin\theta'$ sont les projections des composantes et de leur résultante. Donc

$$r\cos\theta + r'\cos\theta' + \sqrt{-1}\,(r + \sin\theta + r'\sin\theta'),$$

somme des imaginaires considérées, est bien représentée par leur résultante.

Ceci posé, supposons qu'une fonction puisse admettre plusieurs périodes; soient a et b les périodes de cette fonction qui ont les plus petits modules, soient OA et OB les droites qui représentent a et b. Portons sur OA et OB prolongées dans les deux sens des longueurs AA', A'A'',... égales à OA, et BB',... égales à OB. Par les points B, B',..., A, A', A'',... menons des parallèles à OA et OB;

nous décomposerons ainsi le plan en parallélogrammes, et, en joignant le sommet q de l'un quelconque de ces



parallélogrammes au point O, la droite ainsi menée sera une période ; car elle sera la résultante de deux droites représentant deux imaginaires de la forme $\mu a + \nu b$, μ et ν désignant deux entiers.

Soit alors c une période distincte de a et de b, soit Om la droite qui représente cette imaginaire; Os étant une période, d'après ce que nous venons de dire, sm, résultante de mO et de Os, représentera encore une période; qn, égale et parallèle à sm, représentera une nouvelle période; rn et mp, résultantes de droites représentant des périodes, seront deux nouvelles périodes, ainsi que sn et qm.

Or le parallélogramme $qnsm$ a un périmètre moindre que $rqps$; donc

$$sm + mq < sp + pq;$$

donc l'une des droites sm, mq est moindre que la plus grande des droites sp, pq, qui ont des longueurs égales aux modules de a et b; donc, enfin, il existerait une période ayant un module moindre que celui de a ou de b, ce qui est contre notre hypothèse; donc, enfin, une fonction ne peut posséder plus de deux périodes. C. Q. F. D.

Une fonction ne peut même posséder deux périodes réelles ou ayant un rapport réel. En effet, en désignant par ω et ω' les deux périodes ayant le plus petit module, $\omega - \omega'$ serait encore une période et aurait un module moindre que celui de ω ou de ω', ce qui est contre notre hypothèse.

SUR LE CAS IRRÉDUCTIBLE DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ ;

Par M. A. HERMANN,
Ancien élève de l'École Normale supérieure.

I. — *Exposé de la méthode.*

Lorsque l'équation du troisième degré a ses trois racines réelles, la formule de Cardan devient illusoire et ne peut pas servir au calcul numérique des racines de l'équation ; il est cependant possible, dans ce cas, d'exprimer les racines à l'aide de formules pouvant servir à leur calcul numérique.

Soit

$$x^3 - px - q = 0$$

l'équation du troisième degré, dans laquelle je mets les signes en évidence. Je puis écrire l'équation sous la forme

$$x^3 = px + q,$$

$$x^2 = p + \frac{q}{x},$$

$$x = \sqrt{p + \frac{q}{x}},$$

le radical ayant une double détermination et la valeur de x sous le radical ayant le même signe que le radical. Cette formule peut servir de formule d'approximation successive pour deux des racines de l'équation du troisième degré.

Celle qui correspond au signe $+$ du radical est évidemment supérieure à $\sqrt{p}$;

$$x_1 = \sqrt{p}$$

est une valeur de cette racine approchée par défaut;

$$x_2 = \sqrt{p + \frac{q}{x_1}}$$

une valeur approchée par excès;

$$x_3 = \sqrt{p + \frac{q}{x_2}}$$

une valeur approchée par défaut.

Cette racine x' peut être exprimée à l'aide d'un nombre illimité de radicaux par la formule

$$x' = \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p + \cdots}}}}}$$

La deuxième x'' ne peut être exprimée que par défaut par la formule

$$x'' = -\sqrt{p - \frac{q}{\sqrt{p - \frac{q}{\sqrt{p - \cdots}}}}}$$

Ces formules sont susceptibles d'une interprétation géométrique très-simple.

Les racines de l'équation du troisième degré peuvent être considérées comme les abscisses des points communs à la parabole et à l'hyperbole :

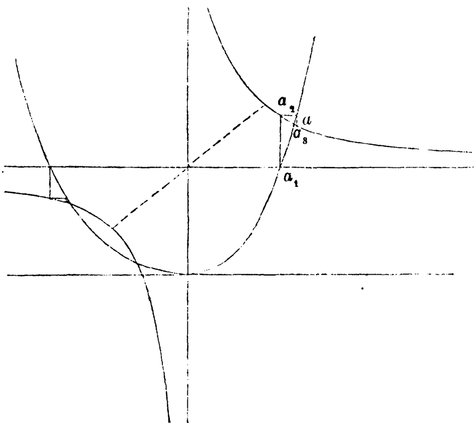
$$x^2 = y,$$

$$xy = px + q,$$

$$y = p + \frac{q}{x}.$$

Nous cherchons l'abscisse du point a.

Fig. 1.



La première valeur approchée

$$x_1 = \sqrt{p}$$

représente l'abscisse du point a_1, la deuxième l'abscisse du point a_2, la troisième l'abscisse du point a_3, etc. On voit sur la figure comme sur la formule que ces valeurs vont constamment en se rapprochant de la racine exacte.

La troisième racine peut être obtenue d'une manière un peu différente. L'équation peut s'écrire

$$x = -\frac{q}{p} + \frac{x^3}{p}.$$

La troisième racine est négative et supérieure en valeur absolue à $\frac{q}{p}$.

$$x_1 = -\frac{q}{p}$$

est une première valeur approchée de cette racine;

$$x^2 = -\frac{q}{p} + \frac{x_1^3}{p}$$

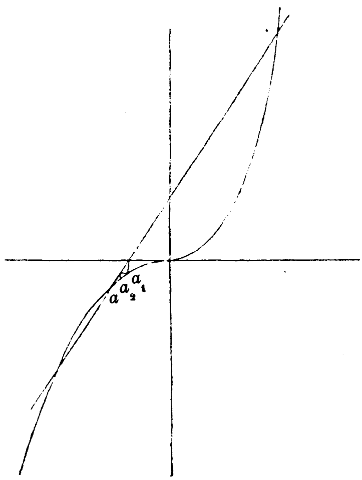
une deuxième valeur plus approchée, etc.

Cette formule est également susceptible d'une interprétation géométrique.

La racine que nous cherchons est l'abscisse de l'un des points d'intersection de la parabole cubique et de la droite

$$y = px + q.$$

Fig. 2.



La méthode d'approximation substitue à l'abscisse des points a les abscisses des points a_1, a_2,..., a_3, etc.

II. — *Calcul de l'erreur commise dans le calcul des racines par la méthode précédente après un certain nombre d'opérations.*

Considérons d'abord la première racine exprimée par la formule

$$x = \sqrt{p + \cfrac{q}{\sqrt{p + \cfrac{q}{\sqrt{p + \cdots}}}}}.$$

Désignons par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ les erreurs commises après 1, 2, 3,..., n opérations, nous aurons

$$\varepsilon_1 < \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}} - \sqrt{p} \quad \text{ou} \quad < \frac{\dfrac{q}{\sqrt{p}}}{\sqrt{p} + \sqrt{p + \dfrac{q}{\sqrt{p}}}};$$

j'augmente évidemment le deuxième membre en remplaçant $\sqrt{p + \dfrac{q}{\sqrt{p}}}$ par $\sqrt{p}$. J'aurai donc

$$\varepsilon_1 < \frac{q}{2p};$$

j'aurai de même

$$\varepsilon_2 < \sqrt{p + \frac{q}{\sqrt{p}}} - \sqrt{p + \cfrac{q}{\sqrt{p + \cfrac{q}{\sqrt{p}}}}},$$

$$\varepsilon_2 < \frac{\dfrac{q}{\sqrt{p}} - \cfrac{q}{\sqrt{p + \cfrac{q}{\sqrt{p}}}}}{\sqrt{p + \dfrac{q}{\sqrt{p}}} + \sqrt{p + \cfrac{q}{\sqrt{p + \cfrac{q}{\sqrt{p}}}}}},$$

ou

$$\varepsilon_2 < \frac{q\varepsilon_1}{\sqrt{p}\sqrt{p+\frac{q}{\sqrt{p}}}\left[\sqrt{p+\frac{q}{\sqrt{p}}}+\sqrt{p+\frac{q}{\sqrt{p+\frac{q}{\sqrt{p}}}}}\right]},$$

$$\varepsilon_2 < \frac{q\varepsilon_1}{2p\sqrt{p}} \quad \text{ou} \quad < \frac{q}{2p}\,\frac{q}{2p\sqrt{p}}.$$

On trouvera de même

$$\varepsilon_3 < \frac{q}{2p}\left(\frac{q}{2p\sqrt{p}}\right)^2,$$

$$\varepsilon_n < \frac{q}{2p}\left(\frac{q}{2p\sqrt{p}}\right)^{n-1}.$$

La méthode que je viens d'indiquer pour calculer une limite de l'erreur sera applicable toutes les fois que l'on aura

$$q < 2p\sqrt{p} \quad \text{ou} \quad q^2 < 4p^3.$$

Elle sera donc applicable dans une limite plus étendue que celle de la réalité des racines de l'équation du troisième degré, puisque, pour la réalité des racines, il suffit que l'on ait

$$27q^2 < 4p^3.$$

Si $q = 1$,

$$p = 100,$$

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{200} \times \frac{1}{2000} \quad \text{ou} \quad < \frac{1}{400000}.$$

Cette méthode est donc assez commode pour le calcul des racines, lorsque q est petit par rapport à p.

On pourrait de même calculer une limite de l'erreur commise dans le calcul des deux autres racines; mais comme la méthode que j'indique ne me paraît avoir d'intérêt qu'au point de vue théorique, ce que j'ai dit suffit pour le but que je me propose.

RECTIFICATION ET ADDITION A LA « NOTE SUR UN PROBLÈME D'ANALYSE INDÉTERMINÉE »

(voir p. 63);

PAR M. EUGÈNE CATALAN.

Actes de l'Académie de' Nuovi Lincei, 3 février 1867.

M. Le Besgue m'a fait observer que les formules (6) et (6′) ne sont pas assez générales : en les écrivant, j'ai supposé, tacitement, les valeurs de t, $\mu^2 - 1$ et $2\alpha + \mu^2 - 1$, premières entre elles deux à deux. Le même manque de généralité se remarque sur les formules (11) et (11′). Néanmoins les résultats indiqués dans le § V sont exacts, comme tous ceux que l'on déduirait des formules citées.

En cherchant à corriger la faute dont je viens de parler, je me suis aperçu que le problème en question se ramène très-simplement à la résolution, en nombres entiers, d'une équation de la forme

$$Ax^2 - By^2 = 1.$$

Cette nouvelle solution du problème est l'objet de la présente Note.

I.

Reprenons les équations

$$(a) \qquad 2x + y - 1 = z,$$

$$(b) \qquad 2yz = \alpha,$$

$$(c) \qquad y^2 + z^2 - 1 = \beta,$$

$$(d) \qquad \alpha\beta = 16t^2,$$

$$(e) \qquad s = t^2.$$

D'après (a), y *et* z *sont de parités différentes;* donc

α, β *sont des multiples de* 4. Soient

$$\alpha = 4\theta u^2, \quad \beta = 4\theta' v^2,$$

θ, θ' ne contenant aucun facteur carré; autrement dit,

$$\theta = abcde\ldots, \quad \theta' = a'b'c'd'e'\ldots,$$

a, b, c, d, e, ..., d'une part, et a', b', c', d', e', ..., de l'autre, étant des facteurs premiers *inégaux*. A cause de l'équation (d), $\theta\theta'$ doit être un carré; donc

$$a' = a, \quad b' = b, \quad c' = c, \ldots,$$

ou

$$\theta' = \theta;$$

et, par conséquent,

$$(f) \qquad \alpha = 4\theta u^2, \quad \beta = 4\theta v^2.$$

Soient

$$(g) \qquad y = p\gamma, \quad z = q\gamma,$$

p, q étant deux nombres donnés, l'un *pair*, l'autre *impair, premiers entre eux*. Les équations (b), (c) deviennent, à cause des valeurs (f),

$$(h) \qquad pq\gamma^2 = 2\theta u^2,$$

$$(k) \qquad (p^2 + q^2)\gamma^2 - 1 = 4\theta v^2.$$

Éliminant θ, on trouve

$$(p^2 + q^2)u^2 - 2pqv^2 = \frac{u^2}{\gamma^2};$$

donc u est divisible par γ,

$$(l) \qquad u = \gamma u',$$

et la relation (h) devient

$$(\text{A}) \qquad pq = 2\theta u'^2.$$

II.

Dans chaque cas particulier, on décomposera donc $\frac{pq}{2}$ en deux facteurs u'^2, θ, dont l'un soit un carré, l'autre n'admettant aucun facteur carré; après quoi l'on cherchera les solutions entières de l'équation

$$(B)\qquad (p^2+q^2)\gamma^2 - 4\theta v^2 = 1.$$

Si elle en admet, on emploiera les formules

$$(C)\ \begin{cases} x = \dfrac{(q-p)\gamma+1}{2}, \quad x+y-1 = \dfrac{(q+p)\gamma-1}{2}, \\ s = (u' v \theta \gamma)^2. \end{cases}$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 707

(voir 2ᵉ série, t. III, p. 253);

PAR M. MARCEL BERTRAND (*),
Élève du lycée Louis-le-Grand (classe de M. Bouquet).

On donne sur un plan deux coniques homofocales (O) *et* (O'). *Par un point fixe* A *de la première on trace une conique* (C) *tangente en ce point à la conique* (O), *et doublement tangente à la seconde conique* (O'). *Le lieu des points de concours des tangentes communes aux coniques* (O) *et* (C) *est une conique homofocale aux coniques données.* (MANNHEIM.)

(*) Fils de M. Joseph Bertrand.

Cette proposition est un cas particulier de la suivante :

Si d'un point fixe P, *pris d'une manière quelconque dans son plan, on mène deux tangentes à la conique* (O), *et que l'on considère les diverses coniques tangentes à ces deux droites et doublement tangentes à la conique* (O'), *le lieu des points de rencontre des tangentes communes à ces coniques et à la conique* (O) *se compose des deux coniques homofocales aux proposées et passant par le point* P.

Cette question, ainsi que la plupart de celles où il s'agit des points de rencontre de tangentes communes à deux courbes, se traite plus simplement par les coordonnées tangentielles. Rappelons d'abord les principes suivants :

L'équation de la droite étant prise sous la forme

$$mx + ny + 1 = 0,$$

si ses coefficients satisfont à une relation du premier degré

$$am + bn + 1 = 0,$$

la droite passe constamment par le point (a, b). On peut donc dire que

$$am + bn + 1 = 0$$

est l'*équation* de ce point. De même, si les coefficients m et n sont liés par une relation du second degré, la droite enveloppe une conique, et la relation entre m et n est l'*équation* de cette conique. Il est clair que toute conique inscrite dans un quadilatère dont les sommets ont pour équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0,$$

a une équation de la forme

$$\alpha\beta + k\gamma\delta = 0.$$

Plus généralement, soit $S = 0$ l'équation d'une conique. Toute conique qui a pour points de rencontre de ses tangentes communes avec cette première conique les points $\alpha = 0$, $\beta = 0$, a une équation de la forme

$$S + k\alpha\beta = 0;$$

par suite, la forme générale de l'équation des coniques doublement tangentes est

$$S + k\alpha^2 = 0.$$

Ceci posé, prenons pour axes, dans la question proposée, les axes communs des deux coniques (O) et (O′). Soit $2c$ la distance des foyers. Ces coniques sont inscrites dans le quadrilatère formé par les points

$$m + n\sqrt{-1} = 0, \quad m - n\sqrt{-1} = 0, \quad cm + 1 = 0, \quad cm - 1 = 0;$$

leurs équations sont donc

$$\text{(O)} \qquad k(m^2 + n^2) + c^2m^2 - 1 = 0,$$

$$\text{(O')} \qquad k'(m^2 + n^2) + c^2m^2 - 1 = 0.$$

Soient α et β les coordonnées du point P; appelons x et y les coordonnées d'un point du lieu. D'après ce qui précède, l'équation d'une conique satisfaisant à la première condition de l'énoncé est de la forme

$$(1) \quad k(m^2 + n^2) + c^2m^2 - 1 + \lambda(\alpha m + \beta n + 1)(xm + yn + 1) = 0.$$

Pour que cette conique soit doublement tangente à la conique (O′), il faut que son équation puisse s'identifier avec l'équation générale des coniques qui remplissent cette seconde condition, c'est-à-dire

$$(2) \quad k'(m^2 + n^2) + c^2m^2 - 1 + \mu(\gamma m + \delta n + 1)^2 = 0.$$

En identifiant, on trouve les cinq relations

$$\frac{c^2(\lambda-1)}{c^2(\mu-1)}=\frac{k+c^2+\lambda\alpha x}{k'+c^2+\mu\gamma^2}=\frac{-(k+\lambda\beta y)}{-(k^2+\mu\delta^2)}$$
$$=\frac{\lambda(\alpha y+\beta x)}{2\mu\gamma\delta}=\frac{\lambda(\alpha+x)}{2\mu\gamma}=\frac{\lambda(\beta+y)}{2\mu\delta}.$$

En éliminant λ, μ, γ, δ entre ces équations, on obtient une relation entre les coordonnées x et y d'un point du lieu, c'est-à-dire l'équation du lieu en coordonnées ordinaires.

Pour éliminer λ et μ, remplaçons une quelconque des trois premières fractions, comme cela est permis, par celle qu'on obtient en prenant le rapport de la somme de leurs numérateurs à la somme de leurs dénominateurs. Il suffit alors de supprimer les deux autres pour faire l'élimination, car $\frac{\lambda}{\mu}$ se trouve en facteur dans les quatre fractions restantes.

Il ne reste donc plus qu'à éliminer γ et δ entre les trois équations

$$\frac{\alpha y+\beta x}{2\gamma\delta}=\frac{\alpha+x}{2\gamma}=\frac{\beta+y}{2\delta}=\frac{\alpha x-\beta y+c^2}{\gamma^2-\delta^2+c^2}.$$

Remarquons maintenant que ces équations sont indépendantes de k et de k'; par suite, le lieu proposé reste le même, de quelque manière que les coniques (O) et (O') aient été choisies parmi celles du système. Nous pouvons donc supposer qu'elles coïncident et passent toutes deux par le point P; les coniques variables (C) sont alors doublement tangentes à une conique fixe, l'un des points de contact restant fixe. Il est clair que le second point de contact décrit toute la conique proposée; mais, dans ce cas particulier, le lieu demandé devient précisément le lieu de ce point de contact. On reconnaît donc ainsi que les deux coniques du système qui passent par le point P font toutes deux partie du lieu. Il est d'ailleurs facile de voir que l'élimination conduit à une équation du quatrième degré : donc ces deux coniques composent tout le lieu.

Ce résultat se vérifie bien simplement en achevant le calcul. On trouve pour l'équation du lieu

$$\begin{aligned}(\alpha y + \beta x)^2[(\alpha + x)^2 - (\beta + y)^2] + c^2(\alpha + x)^2(\beta + y)^2 \\ = 2(\alpha y + \beta x)(\alpha x - \beta y + c^2)(\alpha + x)(\beta + y),\end{aligned}$$

ou bien, en développant et réduisant,

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\beta^2 x^4 - \alpha^2 y^4 + (\beta^2 - \alpha^2 + c^2)x^2y^2 - \beta^2(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)x^2 \\ &\qquad + \alpha^2(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)y^2 + \alpha^2\beta^2c^2 = 0.\end{aligned}\right.$$

Or, pour former l'équation des deux coniques homofocales aux proposées, et passant par le point (α, β), il suffit d'éliminer b entre les deux équations

$$\frac{x^2}{b + c^2} + \frac{y^2}{b} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha^2}{b + c^2} + \frac{\beta^2}{b} = 1.$$

L'élimination, qui se fait sans difficulté, conduit précisément à l'équation (3). Le théorème est donc démontré.

Comme cas particulier, on retrouve un théorème connu. En effet, supposons k' infini, ce qui ne change pas la nature du lieu cherché. L'équation de la conique (O') se réduit alors à $m^2 + n^2 = 0$, c'est-à-dire que cette conique se réduit elle-même aux deux points circulaires à l'infini. Dans ce cas, toute conique doublement tangente est un cercle, et réciproquement tout cercle peut être considéré comme satisfaisant à la condition du double contact. Si, de plus, nous supposons le point P sur la conique (O), nous retombons sur le théorème relatif aux points de concours des tangentes communes à une courbe du second degré et à un cercle qui la touche en un point fixe.

Si on s'était proposé de déterminer l'enveloppe de la corde de contact de la conique variable avec la conique (O′), ou le lieu du pôle de cette corde, des considérations analogues aux précédentes auraient mené de même au résultat. En effet, pour avoir le lieu du pôle de la corde de contact, dont nous avons désigné les coordonnées par γ et δ, il suffit d'éliminer λ, μ, x et y entre les équations fournies par l'identification. L'élimination de λ et de μ faisant disparaître k et k', nous pouvons encore ramener le problème au cas beaucoup plus simple déjà considéré, et l'on reconnaît ainsi que le pôle de la corde des contacts se meut sur les deux tangentes menées aux coniques du système par le point P aux coniques qui passent par ce point. Par suite, la corde des contacts passe constamment par le pôle d'une de ces droites par rapport à la conique (O′).

On peut enfin remarquer que les théorèmes qui précèdent, n'ayant rapport qu'à des propriétés projectives, peuvent s'étendre à deux coniques inscrites dans un quadrilatère quelconque.

Question 771;

PAR M. A. LEMAITRE,
Répétiteur au lycée de Besançon.

Sur toutes les tangentes à une courbe S *et à partir du point de contact* M *on prend une longueur constante* MM_1. *La normale à la courbe* S_1, *lieu du point* M_1, *passe par le centre de courbure* O *de la courbe* S *au point* M. *Sur la normale* M_1O *et au point* O *élevons une perpen-*

diculaire qui coupe la tangente MM_1 *au point* T. *La droite* CT, *qui joint le point* T *au centre de courbure* C *de la développée de* S *au point* O, *coupe la normale* M_1O *en un point* O_1 *qui sera le centre de courbure de la courbe* S_1 *au point* M_1. (NICOLAÏDÈS.)

On peut considérer la courbe S comme engendrée par le point M fixe sur la normale MO roulant sans glissement sur la développée D de la courbe S. La tangente MM_1 sera alors une droite invariablement liée au mouvement de MO, et M_1 un point fixe pris sur cette droite mobile et la suivant dans son mouvement. Mais les normales aux trajectoires des différents points du système mobile et correspondant à une position particulière de ce système vont toutes passer par le point de contact de la ligne mobile et de la courbe fixe sur laquelle elle roule pour déterminer le mouvement du système mobile.

Ce point n'est ici autre que le point O.

Lorsqu'une ligne mobile OM roule sur une courbe fixe D en entraînant dans son mouvement un point fixe M_1, on sait que, R et R′ désignant les rayons de courbure de la courbe fixe et de la ligne mobile au point de contact O, par d la distance M_1O du point M_1 au point de contact O, par φ l'angle de la droite MO avec la tangente commune, et enfin par ρ le rayon de courbure O_1M_1 de la trajectoire du point M_1, on a

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \sin\varphi\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho - d}\right).$$

Dans le cas actuel, la ligne mobile est droite; par suite R′ est infini, et l'on a

$$\frac{1}{R} = \sin\varphi\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho - d}\right);$$

d'où l'on déduit

$$\rho - d = \frac{\mathrm{R}n\sin\varphi}{n - \mathrm{R}\sin\varphi} = \frac{\mathrm{R}n}{\dfrac{n}{\sin\varphi} - \mathrm{R}};$$

$\rho - d$ sur la figure, c'est OO_1, O_1 étant le centre de courbure. Supposons le point O_1 défini par l'intersection de CT et de OM_1, et montrons que OO_1 aura la même expression, nous aurons démontré la construction. Remarquons d'abord que CO, normale de la développée D, est perpendiculaire à la droite MO qui lui est tangente, et que par suite CO est parallèle à MT. Les deux triangles O_1M_1T, O_1OM sont par suite semblables, et l'on a

$$\frac{O_1M_1}{O_1O} = \frac{M_1T}{OC}$$

ou

$$\frac{O_1O}{O_1M_1 - O_1O}\ \frac{O_1O}{OM_1} = \frac{OC}{M_1T - OC}.$$

Mais, dans le triangle rectangle OM_1T, on a, en se rappelant que $M_1OM = \varphi$ et par suite $OM_1M = \frac{\varpi}{2} - \varphi$,

$$M_1T = \frac{M_1O}{\sin\varphi}.$$

Mais

$$M_1O = n, \quad OC = \mathrm{R};$$

l'égalité ci-dessus devient

$$\frac{O_1O}{n} = \frac{\mathrm{R}}{\dfrac{n}{\sin\varphi} - \mathrm{R}},$$

ce qui donne pour OO_1 la même expression que ci-dessus.

Note. — Autres démonstrations géométriques et analytiques par MM. Roux, Pellet, élèves du lycée de Nîmes; Adam Rymazewski, de l'École supérieure polonaise; de MM. Bodemer, Laisant et Maffiotti.

CORRESPONDANCE.

1. Les conseils que nous avons donnés au mois de janvier à nos jeunes correspondants n'ont point été perdus, et nous avons trouvé, depuis ce temps-là, dans les solutions des questions proposées une amélioration très-sensible. Quelques-uns cependant, mais en petit nombre, n'ont point suivi nos conseils, et nous ont obligé de leur renvoyer leur travail avec prière de vouloir bien corriger quelques inexactitudes ou négligences; or il est arrivé que, malgré notre recommandation, plusieurs se sont cachés sous des pseudonymes, en sorte que nos lettres ne sont pas toutes parvenues à leur adresse. Nous l'avons déjà dit plusieurs fois, nous tiendrons religieusement le secret de ceux qui désireront n'être pas connus des lecteurs, mais il faut qu'ils nous donnent leur nom et leur adresse. C'est un devoir de politesse auquel ne devraient pas manquer d'honnêtes jeunes gens. Pour éviter une correspondance qui peut nous prendre beaucoup de temps, quelquefois en pure perte, les élèves feraient bien de remettre leur rédaction à leur professeur, et de ne nous l'adresser qu'autant qu'un homme expérimenté leur aura donné l'assurance que ce travail est digne d'être publié. Nos collègues, nous en sommes sûrs, n'hésiteront pas à prendre cette légère peine.

2. Un abonné nous signale une composition donnée l'année dernière aux candidats de l'École des Mineurs de Saint-Étienne. Il paraîtrait que l'énoncé était très-obscur et présentait des contradictions, ce qui a fort embarrassé les élèves. Notre abonné nous prie de signaler cet

abus, et d'insister sur les inconvénients que peut avoir une pareille manière de faire. Nous nous contentons de signaler le fait sans y insister, nos réflexions ne pouvant rien apprendre à personne. Nous n'avons aucune propension à jouer le rôle de la mouche du coche et à gourmander ceux qui traînent le véhicule officiel :

> Çà, messieurs les chevaux, payez-moi de ma peine.

3. Un autre abonné nous demande de donner un type de calcul pour les triangles, afin d'instruire les élèves sur la manière la plus commode de disposer ce calcul. Nous croyons que la manière la plus commode est celle à laquelle on est habitué. Quoiqu'il fût plus avantageux pour la correction d'avoir un type uniforme où les mêmes choses seraient aux mêmes lieux, nous ne voulons nullement gêner les candidats qui se croiraient obligés d'adopter notre disposition. De même nous adoptons toutes les diverses manières de calculer : nous ne demandons aux candidats que l'exactitude dans les résultats, l'absence de ratures et de détails inutiles, avec une écriture lisible, des chiffres bien séparés les uns des autres. Il importe aux candidats de donner, mais sans phrases, tous les calculs accessoires. Cela est indispensable au correcteur pour juger de l'importance des fautes commises.

QUESTIONS.

812. Si par $3n - 1$ points *consécutifs* sur une courbe de troisième degré on fait passer une courbe quelconque du $n^{ième}$ degré, les coordonnées de l'intersection des deux courbes seront des fonctions du degré $(3n-1)^2$ des coordonnées du point de contact. (SYLVESTER.)

813. Démontrer les formules

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16},$$

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}.$$

(LINDMAN.)

814. Étant donnée une surface S du second ordre à centre, si l'on imagine une surface de révolution du second ordre ayant un de ses foyers au centre de la surface S et touchant les quatre faces d'un quelconque des tétraèdres conjugués par rapport à la surface S, la longueur de l'axe équatorial de la surface de révolution conserve une valeur constante, quel que soit le tétraèdre considéré. On suppose la surface de révolution autour de l'axe qui passe par le centre de la surface S.

(L. PAINVIN.)

815. Pour qu'une surface du second ordre soit transformée homologiquement en une sphère, il faut et il suffit : 1° que le plan d'homologie soit parallèle à l'un des plans cycliques de la surface (PONCELET, *Propriétés projectives*); 2° que le centre d'homologie soit un quelconque des points de la *conique focale* située dans le plan principal auquel le plan d'homologie est perpendiculaire. (L. PAINVIN.)

SUR LE PRINCIPE ET LA RÈGLE DES SIGNES;

PAR M. ABEL TRANSON.

I.

L'emploi des deux signes de l'addition et de la soustraction pour distinguer les directions opposées suivant lesquelles les segments d'une même ligne peuvent être parcourus, cet emploi est admis sans difficulté dans la Géométrie de Descartes, puisque, dans les équations que comporte cette application de l'Algèbre, il n'est aucun symbole littéral qui, s'il représente une distance mesurée parallèlement à une droite donnée, n'implique à la fois une valeur numérique et un signe, c'est-à-dire une grandeur et une direction.

Le principe des signes n'est pas moins indispensable, ainsi que M. Chasles l'a montré surabondamment, dans les calculs de cette autre Géométrie où le système artificiel des coordonnées est remplacé par la considération directe de segments interceptés sur telle ou telle ligne droite d'une figure par d'autres lignes, droites ou courbes, de la même figure.

Cependant la plupart des géomètres persistent à considérer l'attribution des signes *plus* ou *moins* à des quantités isolées comme étant absolument impossible et absurde, au moins lorsqu'il s'agit des calculs de l'Algèbre proprement dite (*).

Or, il semble naturel de croire que l'usage du principe

(*) *Voir*, à ce sujet, l'ouvrage récent de M. Duhamel : *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e Partie.

des signes, universellement accepté dans la Géométrie analytique, devra tôt ou tard réagir sur la manière de concevoir la théorie des quantités positives ou négatives dans l'Algèbre elle-même. Car il serait au moins étrange qu'un principe reconnu essentiel et indispensable à l'une des applications les plus étendues de la science du calcul lui fût étranger et contradictoire lorsqu'on la considère, cette même science, dans toute sa généralité.

II.

Comme une même distance ou un même chemin peuvent être parcourus en deux sens opposés, on comprend bien qu'il ne saurait être inutile de caractériser le sens de ce parcours par un symbole spécial; mais, qu'on ait affecté à cet emploi les signes préalablement admis pour représenter l'addition et la soustraction, voilà ce qui a besoin d'être expliqué; car l'addition comme la soustraction résultent de la combinaison de deux nombres au moins, et on peut trouver qu'il est contradictoire d'attribuer leurs symboles à des grandeurs isolées.

Cependant il suffit d'un peu de réflexion pour apercevoir la convenance de cette attribution : c'est que la réunion (*adjonction, juxtaposition*) des distances de même sens donne une distance résultante dont la grandeur métrique se forme de la *somme arithmétique* des distances partielles, au lieu que la réunion de deux distances de sens contraire donne une distance résultante numériquement égale à *l'excès arithmétique* de la plus grande sur la plus petite.

Aussi le signe *plus* ou le signe *moins*, attribué au nombre qui mesure une distance, n'implique en aucune façon l'idée d'une addition ou d'une soustraction actuelle, ce qui serait absurde. La présence d'un tel signe indique d'abord et principalement une manière d'être actuelle de la grandeur géométrique, mais aussi, par une circonstance très-heureuse, le rôle qu'une telle grandeur remplira lors de sa réunion, lors de son *addition* avec d'autres grandeurs de même nature et de sens divers.

III.

L'attribution des signes *plus* ou *moins* à des nombres isolés étant ainsi établie, en tant du moins que de tels nombres représentent des grandeurs linéaires, il est indispensable d'établir ensuite les règles qui sont relatives au produit ou au quotient de tels nombres. Transporter sans explication, comme il me semble qu'on le fait quelquefois, de l'Algèbre pure à la Géométrie analytique, ce qu'on appelle *la règle des signes des monômes*, c'est selon moi commettre, d'après l'état actuel de l'enseignement, une singulière inadvertance. Car, en Algèbre proprement dite, quelle valeur attache-t-on à cette règle des signes des monômes? Uniquement celle d'exprimer d'une manière abrégée le résultat de la combinaison de plusieurs polynômes. « Quand on multiplie deux polynômes l'un par l'autre, dit M. Duhamel, les différents termes du produit sont toujours formés par la multiplication d'un terme du multiplicande par un terme du multiplicateur; le signe de ce terme est + quand les deux termes qu'on a multipliés ont le même signe dans leurs polynômes respectifs; et le signe est — quand ils ont des signes différents.... Cette règle des signes a été démontrée sans difficulté, et nous l'admettrons; mais nous ferons bien observer qu'ELLE N'A DE SENS et qu'elle n'a été démontrée que dans le cas où les termes affectés du signe — sont précédés de termes additifs dont ils doivent être retranchés (*). »

(*) *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e Partie, p. 105.

Et dans la division : « ... Le signe du terme du quotient en résultera (de la règle de la multiplication), et sera + si les deux termes de degré le plus élevé du dividende et du diviseur ont le même signe; il sera — si ces termes sont de signes différents.... Cette proposition n'implique pas que l'on attache un sens à la division de quantités négatives isolées; elle est une simple conséquence des règles démontrées pour la multiplication, et il faut bien prendre garde à ce que le langage abrégé par lequel on énonce cette règle *ne fasse même pas soupçonner que l'on attache un sens* à une quantité isolée précédée du signe —, qui n'indiquerait pas qu'elle doit être retranchée d'une plus grande. Disons même qu'il n'y aurait aucun sens à attacher à une quantité positive isolée; car que signifierait le signe + mis devant une quantité qui ne doit être ajoutée à aucune autre (*)? »

Il est bien certain que si en Algèbre les signes *plus et moins* constituent exclusivement et toujours les symboles de l'addition et de la soustraction, il faut y contester l'existence des quantités positives ou négatives prises isolément. D'autre part on montre cependant que les quantités négatives, quoique insignifiantes par elles-mêmes, étant soumises à des opérations dirigées par des règles convenables conduisent le calculateur à des résultats vrais et utiles (**); mais des opérations effectuées sur des expressions qui ne représentent absolument rien peuvent-elles avoir elles-mêmes une signification quelconque? Il n'y a pas sur cela d'illusion à se faire, et on doit reconnaître la justesse de l'observation suivante : « *Observation.* Nous ne saurions trop rappeler que dans ce qui précède nous

---

(*) *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e Partie, p. 107.

(**) *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, 2e Partie, ch. XVI, Généralisation des formules par l'introduction des quantités négatives, p. 126.

n'avons attaché *aucun sens* aux opérations sur les quantités négatives. Nous ne nous sommes servi des locutions empruntées aux opérations sur les polynômes que pour indiquer d'une manière rapide et commode le moyen de tirer de la formule type tous les cas particuliers possibles.... Il faut bien se garder de prendre le langage dans un autre sens, et de voir, dans ce moyen commode de renfermer toutes les formules dans une seule, de véritables opérations effectuées sur des quantités négatives isolées, opérations dont on a souvent démontré les règles soit en les rattachant vicieusement à celles des polynômes, soit en cherchant à donner une existence à ces êtres fantastiques, et raisonnant comme si cette représentation arbitraire s'appliquait à tout (*). »

Est-ce donc à de telles extrémités que la science serait réduite? Le mécanisme de l'Algèbre comporterait l'emploi de certains êtres ou symboles *fantastiques* absolument dépourvus de signification, et qui, soumis à des opérations qui n'ont *aucun sens,* donneraient néanmoins des résultats utiles!

Cette doctrine prévaut dans l'enseignement, et je reconnais qu'au point de vue où s'est placé l'auteur à qui j'ai emprunté les citations précédentes elle est inévitable. Mais je demande si la Géométrie analytique, si la Géométrie des coordonnées et la Géométrie segmentaire, elles qui attribuent aux quantités précédées du signe *plus* ou du signe *moins* une signification très-précise, si elles peuvent accepter de cette doctrine leurs règles usuelles pour les signes du produit et du quotient.

Sur ce point les Traités de Géométrie analytique offrent à mon gré une lacune qu'il est d'ailleurs facile de faire disparaître.

(*) *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement,* 2e Partie, p. 132.

IV.

Le calcul d'une grandeur linéaire se réduit, comme on sait, à la détermination d'une ou de plusieurs quatrièmes proportionnelles ; un tel calcul comporte donc les opérations de la multiplication et de la division. Or, ayant désormais à opérer sur des quantités qui ne sont pas douées seulement d'une grandeur métrique, mais qui sont douées aussi d'une propriété de direction, il est indispensable d'étendre l'idée même de la multiplication. C'est une nécessité analogue à celle qu'on rencontre en Arithmétique lorsqu'on aborde le calcul des nombres non entiers. Autrefois on disait, à cette occasion, que multiplier un nombre par un autre c'est trouver un nombre qui soit composé avec le multiplicande comme le multiplicateur l'est avec l'unité. Les auteurs modernes préfèrent définir la multiplication par un exemple particulier, comme en disant que multiplier un nombre par $\frac{3}{4}$ c'est prendre trois fois le quart de ce nombre. Substituer ainsi un fait particulier à l'énoncé d'une idée générale offre peut-être quelque avantage qui m'échappe. Je m'en tiens pour l'objet actuel à la définition très-claire rapportée ci-dessus.

Or, la grandeur linéaire prise arbitrairement pour unité dans un calcul de distances a nécessairement un sens déterminé. Les distances de même sens qu'elle sont dites positives et sont affectées du signe +, tandis que les grandeurs de sens contraire sont négatives et affectées du signe —.

Si on applique aux nombres correspondants à ces sortes de grandeurs l'idée générale de la multiplication rappelée ci-dessus, il faudra dire que le produit est de même sens que le multiplicande ou de sens contraire, selon que le multiplicateur a ou n'a pas le même sens ou signe que l'unité. Cela entraîne la règle connue que *le produit est positif quand les deux facteurs sont de même signe, et négatif quand ils sont de signe contraire.*

V.

Dans l'enseignement actuel, l'Algèbre proprement dite ne connaît et ne représente par ses symboles littéraux que ce qu'on appelle des nombres absolus. Elle n'entend pas connaître ou représenter la qualité, particulière aux nombres qui mesurent des distances, de pouvoir s'accroître et se former en deux sens différents. Cependant l'application de l'Algèbre à la Géométrie et aussi à la Mécanique exige impérieusement cette distinction, de sorte qu'en se particularisant la science est obligée d'accepter des symboles et des règles qu'elle ne possède pas quand on l'étudie dans sa généralité. Cela paraît contraire à la logique, et il semblerait plus conforme à une saine philosophie que l'Algèbre attribuât aux grandeurs abstraites qu'elle symbolise toutes les propriétés particulières qu'elle est destinée à rencontrer dans les grandeurs concrètes auxquelles elle peut être appliquée.

Si on n'admet pas ce principe, il sera, je crois, difficile de se refuser au raisonnement suivant.

Les grandeurs géométriques, comme toutes les grandeurs continues, ont la propriété de se pouvoir diviser indéfiniment, et par là elles donnent lieu aux nombres fractionnaires aussi bien qu'aux nombres entiers. Il est au contraire des grandeurs discontinues dont la pluralité donne lieu exclusivement aux nombres entiers. Si la perfection de l'Algèbre consistait à n'attribuer au nombre abstrait que les propriétés qui se rencontrent universellement dans toutes les grandeurs concrètes, on devrait donc enseigner d'abord une Algèbre où les symboles littéraux ne représenteraient que des nombres entiers. Cependant la plus simple formule pouvant conduire à exprimer une division où le dividende ne serait pas un multiple du diviseur, il faudrait rejeter absolument de telles formules, comme on rejette actuellement, en Algèbre pure, les formules qui conduisent à soustraire un nombre plus grand d'un plus petit. A la vérité, *pour abréger l'expression des résultats* et *pour généraliser les formules,* on pourrait ensuite introduire dans le calcul ces quotients impossibles; mais on conviendrait d'y voir des êtres purement *fantastiques,* et on expliquerait avec le plus grand soin que les opérations à faire sur ces êtres de fantaisie n'auraient par elles-mêmes *aucun sens,* bien qu'elles dussent, étant soumises aux mêmes règles que les quotients de divisions possibles, conduire le calculateur à des résultats vrais et utiles. Après cela il y aurait à enseigner une Algèbre applicable aux grandeurs continues, par conséquent une Algèbre où le symbole de la division représenterait un être réel quand même le dividende ne serait pas un multiple du diviseur; et dans cette Algèbre appliquée il y aurait encore à affirmer le sens des opérations à faire sur ces symboles et à expliquer les règles de ces opérations.

Cependant n'est-il pas à la fois plus rationnel et plus simple d'admettre d'emblée, comme on le fait, que toute grandeur, objet du calcul algébrique, est essentiellement et indéfiniment divisible, sauf à rejeter toute solution non entière dans les applications du calcul aux grandeurs discontinues, c'est-à-dire aux grandeurs mesurées par une unité naturellement indivisible.

Pareillement, ne serait-il pas rationnel et simple d'attribuer d'emblée à toute grandeur abstraite, objet de l'Algèbre proprement dite, non-seulement la valeur métrique (numérique) que tous les géomètres lui accordent, mais aussi cette propriété directive que Kant appelle une *qualité* (par opposition à la *quantité* qui est exprimée par le nombre absolu), propriété que Cauchy à son tour appelle, dans ses *Leçons d'Analyse*, un *adjectif du nombre*, ce qui revient précisément à l'idée de Kant.

Il semble que ce serait là un moyen assuré de clore le trop long débat relatif à la théorie des quantités négatives. Car premièrement il n'y aurait plus lieu au malentendu de ceux qui s'arrêtent toujours à voir dans le signe attribué à une quantité isolée le symbole d'une opération. D'ailleurs, comme il arrive dans la réunion des quantités que le signe si heureusement choisi pour marquer la direction peut à volonté se changer en un symbole d'opération et réciproquement, la généralité des formules serait évidente *à priori*. En effet, en partant des équations les plus générales, on verrait que les transformations successives n'altéreraient pas plus le signe d'un des éléments du calcul qu'elles n'altèrent sa valeur numérique, puisque l'un et l'autre, le signe et la valeur, seraient défendus de toute atteinte, étant ensemble comme enveloppés dans le symbole littéral.

Et alors on passerait de plain-pied de la pratique d'une Algèbre vraiment générale à toutes ses applications sans avoir connu des symboles qui ne représentent rien et des opérations qui n'ont aucun sens! Étant bien entendu d'ailleurs que dans les applications à une sorte de grandeur concrète qui n'admettrait pas le double état direct et inverse des nombres, on regarderait toute solution négative comme l'indice d'une impossibilité.

VI.

Mais des nombres abstraits dont les uns seront *directs* et les autres *inverses!* Ce serait de la MÉTAPHYSIQUE, dira quelqu'un.

Je demande si, concevoir que l'unité abstraite est divisible, ce n'est pas aussi de la métaphysique. D'ailleurs, j'admets absolument cette appréciation; car je crois depuis longtemps qu'on ne fait pas de mathématiques sans faire de la métaphysique; et je crois de plus qu'il faut le savoir. Toute science, disait Descartes, n'est que PHYSIQUE ou que MÉTAPHYSIQUE.

QUESTIONS DE LICENCE;

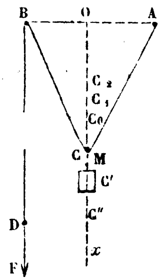
SOLUTIONS PAR M. TH. DIEU,
Agrégé, Docteur ès Sciences.

II. — PROBLÈME DE MÉCANIQUE.

Un cordon est fixé en A *par une de ses extrémités; il passe sur une poulie mobile* M *à laquelle est attaché un corps pesant* P, *puis sur une poulie fixe* B, *et une force verticale constante appliquée à l'autre extrémité* D *maintient l'équilibre. Quel sera le mouvement si cette force est augmentée ou diminuée tout à coup d'une certaine quantité? On fera abstraction de la roideur du cordon, de son extensibilité, de son poids et des frottements; de plus on regardera les poulies* M *et* B *comme des points, dont le second se trouve sur une horizontale passant par le point* A.

On doit considérer M comme un point matériel ayant une certaine masse m, libre et en repos dans une position donnée C_0 sur la verticale Ox du milieu de AB, et sur lequel agissent pour le mettre en mouvement, le poids mg et deux forces égales entre elles, de grandeur donnée mf, dirigées suivant C_0A, C_0B; la résultante de ces trois forces étant dirigée suivant Ox, le mouvement commencera dans cette direction. Admettons que M se trouve à

Fig. 1.



une époque quelconque dans une position C sur Ox, avec une vitesse acquise suivant cette droite; il ne doit pas s'en écarter, car la résultante de mg et des forces égales à mf agissant alors suivant CA, CB, qui font varier le mouvement, est toujours dirigée suivant Ox. Le mouvement commencé sur Ox continuera donc sur cette droite, soit dans le sens de la pesanteur, soit dans le sens opposé.

Soit $AB = 2a$. C étant la position de M à la fin d'une durée t comptée depuis l'origine du mouvement, soit $OC = x$. Enfin, soit v la vitesse de M dans la position C, positive dans le sens Ox, négative dans le sens opposé. L'équation du mouvement sera, d'après ce qui précède,

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{2fx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

car le cosinus des angles égaux ACO, BCO est $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$, et la somme, suivant Ox, des composantes des forces accélératrices f est par conséquent $\frac{2fx}{\sqrt{a^2+x^2}}$. On déduit immédiatement de cette équation

$$(2) \qquad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad \text{ou} \quad v^2 = \mathrm{A} + 2gx - 4f\sqrt{a^2 + x^2};$$

la constante A introduite par l'intégration est déterminée, d'après les conditions du problème, par

$$(3) \qquad \mathrm{A} = 4f\sqrt{a^2 + x_0^2} - 2gx_0,$$

x_0 désignant l'x de la position initiale C_0 de M.

Si l'on avait

$$g = \frac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}},$$

le système resterait en repos. Il faut examiner les deux hypothèses de

$$g > \frac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}, \quad \text{puis de} \quad g < \frac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}.$$

On voit tout de suite que deux cas doivent être distingués dans la première, celui de $g > 2f$ et celui de $g < 2f$.

1° $g > 2f$. *On a à fortiori* $g > \dfrac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}$. — Le rapport différentiel $\dfrac{dv}{dt}$ est d'abord positif et reste toujours tel, puisque le cosinus $\dfrac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ est toujours inférieur à l'unité; le mouvement doit donc commencer dans le sens de la pesanteur, et continuer dans ce sens tant que la longueur du cordon le permet.

2° $g < 2f$, *mais* $> \dfrac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}$. — Le rapport différentiel $\dfrac{dv}{dt}$ est d'abord positif. Il devient nul pour la valeur positive de x qui satisfait à l'équation

$$g\sqrt{a^2 + x^2} - 2fx = 0,$$

savoir :

$$x = \frac{ga}{\sqrt{4f^2 - g^2}} = x',$$

puis négatif pour $x > x'$. Le mouvement commence donc dans le sens de la pesanteur, et la vitesse croît jusqu'à la position C' où $x = x'$, puis décroît ensuite.

En C', où la vitesse atteint son maximum, on a

$$v^2 = A - 2a\sqrt{4f^2 - g^2},$$

d'après l'équation (2). On peut remarquer que si le point M était initialement dans cette position, la force mf établirait l'équilibre.

La vitesse, décroissante à partir de la position C', devient nulle en C'' déterminée par la valeur de x différente de x_0, qui satisfait à l'équation

$$A + 2gx - 4f\sqrt{a^2 + x^2} = 0 :$$

$$x = \frac{gA}{4f^2 - g^2} - x_0 = x_0 + \frac{4f\sqrt{a^2 + x_0^2}}{4f^2 - g^2}\left(g - \frac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}\right) = x''.$$

Le point M doit revenir de C'' vers la position initiale C_0, puisqu'on a $\frac{2fx''}{\sqrt{a^2 + x''^2}} > g$. D'après l'équation (2), il reprend dans chaque position C la même vitesse qu'il avait en sens inverse quand il y a d'abord passé. Le mouvement consistera donc en une série indéfinie d'oscillations isochrones. (Nous supposons bien entendu le fil assez long pour que M arrive en C''.)

3° $g < \frac{2fx_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}}$. — Le rapport différentiel $\frac{dv}{dt}$ est d'abord négatif. Il devient nul pour la valeur de x représentée ci-dessus par x' (cette valeur est ici inférieure à x_0), puis positif pour $x < x'$. Le point remonte donc en premier lieu avec une vitesse croissante (nous considérons la valeur absolue) jusqu'en C_1 déterminé par $x = x'$, et la vitesse décroît ensuite.

Le maximum de la vitesse a la même expression que dans le cas précédent, et la même remarque s'applique à la position C_1 qu'à C'.

La vitesse, décroissante en valeur absolue à partir de C_1, devient nulle dans la position C_2 déterminée par la valeur de x qui a été représentée par x'' (ici, x'' est inférieure à x').

Le point M doit revenir de C_2 vers C_0, car on a

$$g > \frac{2fx''}{\sqrt{a^2 + x''^2}}.$$

Il reprend dans chaque position en y revenant la vitesse avec laquelle il y a passé d'abord [équation (2)]. On a donc encore une série indéfinie d'oscillations isochrones.

III. — Application du principe de d'Alembert.

Une parabole, dont l'axe est vertical et la concavité en sens inverse de la pesanteur, tourne autour de son axe avec une vitesse constante ω. Quel sera le mouvement sur cette courbe d'un point matériel pesant assujetti à y rester, et partant d'une position donnée sans vitesse relative? On fait abstraction du frottement.

L'axe de rotation est pris pour axe des x, le sommet de la parabole pour origine et la position de son plan quand $t = 0$ pour $\widehat{xy}$. La direction de Oz est choisie de manière que la trace du plan de la parabole sur $\widehat{yz}$ tourne d'abord de Oy vers Oz, dans l'angle des y, z positifs.

Le principe de d'Alembert fournit l'équation

$$(1) \qquad \left(\frac{d^2x}{dt^2} + g\right)\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = 0.$$

On a

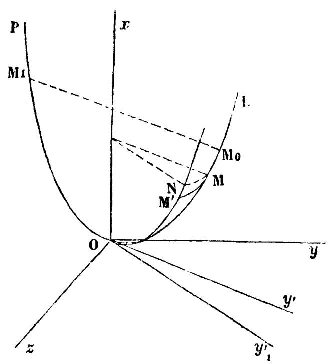
$$(2)\qquad 2px - y^2 - z^2 = 0, \quad y\sin\omega t - z\cos\omega t = 0,$$

d'où

$$(3)\qquad \frac{p\delta x - y\delta y - z\delta z}{\sqrt{p^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

$$(4)\qquad \delta y \sin\omega t - \delta z \cos\omega t = 0.$$

FIG 2.



Des équations (1), (3), (4), on déduit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g - \frac{p\lambda}{\sqrt{p^2 + y^2 + z^2}} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y\lambda}{\sqrt{p^2 + y^2 + z^2}} + \lambda' \sin\omega t = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z\lambda}{\sqrt{p^2 + y^2 + z^2}} - \lambda' \cos\omega t = 0;$$

λ est la réaction de la courbe rapportée à l'unité de masse et λ' celle du plan.

Pour éliminer λ et λ', il suffit de multiplier ces trois équations par $2x$, y, z et d'ajouter membre à membre;

eu égard aux équations (2), on a ainsi

$$2x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}+2gx=0.$$

L'équation du paraboloïde donne

$$p\frac{d^2x}{dt^2}-y\frac{d^2y}{dt^2}-z\frac{d^2z}{dt^2}-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=0.$$

Ajoutant membre à membre avec l'équation précédente, il vient

$$(5)\qquad (2x+p)\frac{d^2x}{dt^2}-\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+2gx=0.$$

Soient Oy' et Oy'_1 les traces du plan de la parabole sur $\widehat{yz}$ à la fin des temps t et $t+dt$, en sorte que

$$y'Oy'_1=\omega dt.$$

Soient encore $MM'=ds$ l'arc décrit dans l'espace par le mobile pendant la durée dt, et $NM'=ds'$ l'arc correspondant de la parabole; celui du parallèle de la surface est $MN=y'\omega dt$, y' désignant une nouvelle coordonnée comptée dans le plan de la parabole sur la tangente en son sommet. Le triangle $MM'N$ fournit

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \text{ ou } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2+y'^2\omega^2.$$

On a sur la parabole $\left(\frac{ds'}{dl}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2$. Remplaçant dans la formule précédente $\left(\frac{ds'}{dt}\right)^2$ par sa valeur, il vient

$$(6)\qquad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\left(\frac{dy'}{dt}\right)^3+y'^2\omega^2.$$

L'équation de la parabole dans son plan,

$$y'^2-2px=0,$$

donne

$$(7) \qquad p\frac{d^2x}{dt^2} - y'\frac{d^2y'}{dt^2} - \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 = 0.$$

De (5), (6), (7) et de l'équation de la parabole, on déduit sans difficulté

$$(8) \qquad (y'^2 + p^2)\frac{d^2y'}{dt^2} + y'\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 + ny' = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$p^2\left(\frac{g}{p} - \omega^2\right) = n.$$

Cette équation du mouvement sur la parabole se ramène au premier ordre en prenant y' pour variable indépendante. Si l'on pose simplement pour cela

$$\frac{dy'}{dt} = u, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = u\frac{du}{dy'},$$

les variables se séparent, et il vient

$$\frac{u\,du}{u^2 + n} + \frac{y'\,dy'}{y'^2 + p^2} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$(u^2 + n)(y'^2 + p^2) = C,$$

C désignant la constante arbitraire. Comme $\frac{dy'}{dt}$ ou u est nul pour $t = 0$, on doit avoir

$$n(y_0^2 + p^2) = C,$$

y_0 étant la valeur initiale de y'; l'intégrale particulière de l'équation (8) répondant au problème proposé est par conséquent

$$(9) \qquad \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2 = \frac{n(y_0^2 - y'^2)}{p^2 + y'^2}.$$

D'après cela, si v' représente la vitesse du mobile à la fin du temps t sur la parabole, on a

$$(10)\quad \begin{cases} v'^2 = \left(\dfrac{dy'}{dt}\right)^2\left[1+\left(\dfrac{dx}{dy'}\right)^2\right] \\ \quad = \dfrac{n(y_0^2 - y'^2)}{p^2+y'^2}\left(1+\dfrac{y'^2}{p^2}\right) = \dfrac{n(y_0^2-y'^2)}{p^2}. \end{cases}$$

Selon que n est une quantité positive ou négative, y'^2 doit donc être toujours moindre ou toujours plus grand que y_0^2; il est nécessaire d'examiner séparément ces deux cas. Si l'on avait $n = 0$, c'est-à-dire $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{p}}$, *le mobile ne changerait pas de position sur la parabole.*

1° $\omega^2 < \dfrac{g}{p}$ *ou* $n > 0$. — Supposons que le sens des y' positifs ait été choisi de manière que y_0 soit positif. D'après l'équation (9) ou (10), y' doit d'abord diminuer jusqu'à zéro; le mobile ira donc de sa position initiale M_0 jusqu'au sommet O de la parabole. La vitesse relative v' ayant en ce point, d'après l'équation (10), la valeur $\dfrac{y_0}{p}\sqrt{n}$ différente de zéro, le mobile doit le dépasser et remonter sur la partie OP, où il ira jusqu'à la position M_1 symétrique de M_0 par rapport à Ox, pour laquelle $y' = -y_0$ et par suite $v' = 0$. Comme le mobile se trouve en M_1 exactement dans les mêmes conditions qu'en M_0, il reviendra de M_1 en M_0, d'où il retournera en M_1, et ainsi de suite; le mouvement consistera donc en une série indéfinie d'oscillations, évidemment isochrones, entre les positions M_0, M_1. Enfin, de ce que la vitesse v' a les mêmes valeurs, d'après l'équation (10), pour les positions symétriques par rapport à Ox, il résulte que deux parties symétriques de M_0OM_1, en particulier OM_0, OM_1, seront toujours parcourues dans des durées égales entre elles, soit dans un sens, soit dans le sens opposé; la durée du parcours d'un arc est en effet $\int \frac{ds'}{v'}$ prise entre ses extrémités.

L'équation (9) donne

$$dt = \mp \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot dy' \sqrt{\frac{p^2 + y'^2}{y_0^2 - y'^2}},$$

où il faut prendre le signe supérieur ou le signe inférieur selon que le mobile va de M_0 vers M_1 ou, au contraire, de M_1 vers M_0. Si l'on pose $y' = y_0 \cos \varphi$, ce que les limites y_0, $-y_0$ de y' indiquent, il vient

$$dt = \frac{\sqrt{p^2 + y_0^2}}{\sqrt{n}} \cdot d\varphi \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{p^2 + y_0^2} \sin^2 \varphi},$$

en convenant de prendre zéro pour valeur initiale de φ et de faire croître cet angle indéfiniment. On voit facilement que, au facteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ près, l'expression de dt est celle de la différentielle de l'arc d'une ellipse de demi-axes égaux à $\sqrt{p^2 + y_0^2}$ et p, cet arc étant pris à partir d'une des extrémités du petit axe. Le premier quart de l'ellipse répond à M_0O en partant de l'origine du mouvement, les quarts suivants à OM_1, M_1O (retour de M_1 à O), etc.; des arcs de l'ellipse symétriques par rapport à son grand axe répondent à des parties symétriques de M_0O et de OM_1, dans la même oscillation ou dans des oscillations quelconques de même sens, et des arcs symétriques par rapport au petit axe répondent à une même partie de M_0M_1, dans deux oscillations successives ou de sens contraires quelconques. Tout cela s'accorde parfaitement avec ce qui a été dit ci-dessus sur l'isochronisme.

2° $\omega^2 > \frac{g}{p}$ *ou* $n < 0$. — Supposons encore que y_0 soit positif. D'après les équations (9) et (10), y' doit croître indéfiniment à partir de y_0, et v' à partir de zéro; le mobile ira donc de M_0 vers L, et se mouvra toujours dans ce sens avec une vitesse relative de plus en plus grande.

Nous ferons enfin remarquer qu'on arrive presque immédiatement à l'équation (10), en regardant la parabole comme fixe, et en appliquant au mobile considéré comme libre, outre la pesanteur et la réaction normale de la parabole, la force centrifuge due à la rotation autour de Ox. En effet on a ainsi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g + \frac{Np}{\sqrt{p^2+y'^2}}, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = \omega^2 y' - \frac{Ny'}{\sqrt{p^2+y'^2}},$$

d'où

$$\frac{ds}{dt}\cdot d\frac{ds}{dt} = \omega^2 y'\,dy' - g\,dx = -\left(\frac{g}{p} - \omega^2\right) y'\,dy', \ldots$$

N. B. — On a une question analogue, qu'on pourrait nommer *le problème du régulateur à force centrifuge*, en prenant une circonférence au lieu d'une parabole.

SUR LA RECHERCHE D'UN LOGARITHME ISOLÉ, AVEC UN GRAND NOMBRE DE DÉCIMALES;

PAR M. F. LEFORT.

La formule des différences, qui exprime le procédé d'interpolation de Mouton, est la seule que l'on puisse admettre aujourd'hui, lorsqu'il s'agit de calculer une table logarithmique un peu étendue, c'est-à-dire lorsque l'on veut avoir une série de logarithmes répondant à une série de nombres croissant suivant une loi déterminée. Mais son application à la recherche d'un logarithme isolé, par interpolation, dans les tables à un grand nombre de décimales, est très-laborieuse. Les formules variées qui donnent elles-mêmes le développement de la fonction logarithmique en séries plus ou moins convergentes, ne sont avantageusement applicables que dans des cas très-particuliers, et leur emploi exige beaucoup d'adresse de la part du calculateur. Je vais exposer ici trois procédés généraux qui me paraissent les moins pénibles et les plus sûrs parmi le grand nombre de ceux qui ont été proposés pour déterminer des logarithmes isolés, avec beaucoup de décimales. Ces trois procédés reposent sur la décomposition du nombre donné en facteurs, et ne diffèrent que dans la manière de l'opérer.

Le premier, dans l'ordre des dates, a été donné par Briggs, en 1624, au chapitre XIV de l'*Arithmetica logarithmica*; le deuxième par R. Flower, en 1771; le troisième par l'auteur de cette Note, dans un Mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1857.

Procédé de Briggs.

Soit N le nombre donné dont il s'agit de trouver le logarithme. Il peut toujours être considéré comme composé de deux parties D et d, dont l'une se trouvera dans la table que l'on possède, et qui, par le nombre de ses décimales, limite l'ordre de l'approximation. Je regarde ici D comme la partie entière du nombre, et d comme sa partie fractionnaire décimale. Cette hypothèse est faite uniquement pour abréger le discours et pour fixer les idées, car elle est sans influence sur la décomposition en facteurs, et sur la détermination du logarithme auquel on affectera en définitive la caractéristique convenable.

Ainsi

$$N = D + d = D\left(1 + \frac{d}{D}\right).$$

Appelons q_1 le premier chiffre décimal du quotient de d par D, et d_1 le reste; nous aurons

$$d = Dq_1 + d_1, \quad d_1 < d,$$

puis

$$N = D(1 + q_1) + d_1.$$

Posons

$$F_1 = Dq_1, \quad D_1 = D(1 + q_1) = D + F_1,$$

et divisons d_1 par D_1. Nous aurons

$$d_1 = D_1 q_2 + d_2, \quad d_2 < d_1.$$

Par suite

$$N = D(1 + q_1)(1 + q_2) + d_2.$$

Posons encore

$$F_2 = D_1 q_2, \quad D_2 = D_1(1 + q_2) = D_1 + F_2,$$

et divisons d_2 par D_2, il viendra

$$d_2 = D_2 q_3 + d_3, \quad d_3 < d_2.$$

Par suite

$$N = D(1 + q_1)(1 + q_2)(1 + q_3) + d_3.$$

En continuant ainsi jusqu'à ce que l'on arrive à un reste d_n, susceptible d'être négligé dans l'ordre d'approximation que l'on s'est fixé, on obtiendra

$$N = D(1 + q_1)(1 + q_2)\ldots(1 + q_n)$$

et

$$\log N = \log D + \log(1 + q_1) + \ldots + \log(1 + q_n).$$

Log N sera donc déterminé à l'aide de deux tables, dont l'une comprendra log D, et l'autre log $(1 + q_n)$.

J'applique à un exemple donné par Briggs lui-même, et je rapporte nos notations sur le tableau des calculs qu'elles servent ainsi à expliquer.

		N	2966,82051 456	
		D	2966	
D	2966	d	82051 456	
F_1	5932	Dq_1	5932	2... q_1
D_1	2966,5932	d_1	22731 456	
F_2	20766 1524	$D_1 q_2$	20766 1524	7... q_2
D_2	2966,80086 1524	d_2	1965 3036	
F_3	1780 08051 69	$D_2 q_3$	1780 08051	6... q_3
D_3	2966,81866 23291 69	d_3	185 22308 31	
F_4	178 00911 97	$D_3 q_4$	178 00911 97	6... q_4
D_4	2966,82044 24203 66	d_4	7 21396 34	
F_5	5 93364 09	$D_4 q_5$	5 93364 09	2... q_5
D_5	2966,82050 17567 75	d_5	1 28032 25	
F_6	1 18672 82	$D_5 q_6$	1 18672 82	4... q_6
D_6	2966,82051 36240 57	d_6	9359 43	
F_7	8900 46	$D_6 q_7$	8900 44	3... q_7
D_7	2966,82051 45141 03	d_7	458 97	
F_8	296 68	$D_7 q_8$	296 68	1... q_8
D_8	2966,82051 45437 71	d_8	162 29	
F_9	148 34	$D_8 q_9$	148 34	5... q_9
D_9	2966,82051 45586 05	d_9	13 95	
F_{10}	11 87	$D_9 q_{10}$	11 87	4... q_{10}
D_{10}	2966,82051 45597 92	d_{10}	2 08	
F_{11}	2 07	$D_{10} q_{11}$	2 07	7... q_{11}
D_{11}	2966,82051 45599 99	d_{11}	1	

Les facteurs sont ainsi donnés par le nombre symbolique

$$[1{,}00027\,66243\,1547],$$

en sorte que l'on a

$$2966{,}82051\,456 = 2966 \,.\, 1{,}0002 \,.\, 1{,}00007 \,.\, 1{,}0^5 6 \,.\, 1{,}0^6 6,\; 1{,}0^7 2 \,.\, 1{,}0^8 4 \,.\, 1{,}0^9 3 \,.\, 1{,}0^{10} 1 \,.\, 1{,}0^{11} 5\; 1{,}0^{12} 4 \,.\, 1{,}0^{13} 7.$$

L'indice placé en exposant indique le nombre des zéros qui suivent la virgule.

On prend alors dans les tables spéciales les logarithmes des facteurs ainsi qu'il suit (*) :

NOMBRES.	LOGARITHMES.
2966	3,47217 11466 9236
$1,0^3 2$	8 68502 1165
$1,0^4 7$	3 03995 4976
$1,0^5 6$	26057 5907
$1,0^6 6$	2605 7661
$1,0^7 2$	86 8589
$1,0^8 4$	17 3718
$1,0^9 3$	1 3029
$1,0^{10} 1$	434
$1,0^{11} 5$	217
$1,0^{12} 4$	17
$1,0^{13} 7$	3
Log 2966,82051 456 =	3,47229 12733 4952

Procédé de Flower.

Le procédé de Flower consiste à rechercher des facteurs binômes, analogues à ceux de Briggs, dont le produit par le quotient $\frac{N}{D}$ diffère très-peu de l'unité, mais en moins ; de telle sorte qu'en appelant P le produit des facteurs binômes $(1,0^n\alpha)$, $(1,0^{n'}6)$,..., on ait

$$\frac{N}{D}.P = 0,9999....$$

Alors, dans l'ordre d'approximation cherché,

$$\log N = \log D - \log P = \log D + \operatorname{colog} P.$$

Le premier facteur sera d'autant plus petit que $\frac{N}{D}$ différera moins de $0,99,\ldots$; on choisira donc D de manière

(*) J'ai rectifié dans les Tables de Briggs quelques chiffres inexacts.

à avoir 9 ou un nombre peu différent de 9 pour le premier chiffre du quotient. On obtiendra très-sûrement ce résultat en prenant pour D un nombre supérieur d'une unité à celui que fournissent les quatre premiers chiffres de N. On effectuera le quotient complet de N par D ainsi déterminé.

Il faut maintenant multiplier ce quotient par un nombre de la forme $1{,}0^n\alpha$ tellement choisi, que le produit diffère moins de l'unité que ce quotient lui-même. Or,

$$\frac{N}{D}\times 1{,}0^n\alpha = \frac{N}{D} + \frac{N}{D}\cdot\frac{\alpha}{10^{n+1}},$$

et

$$\frac{N}{D} = 0{,}9\ldots abc\ldots.$$

Il faut donc que $\frac{\alpha}{10^{n+1}}$ soit d'un ordre décimal tel, que son produit par $\frac{N}{D}$ étant ajouté à $\frac{N}{D}$ ne donne pas un nombre supérieur à 1. Ainsi $\frac{\alpha}{10^{n+1}}$ est nécessairement d'un ordre décimal supérieur d'une unité à celui du dernier 9 de la première série du quotient. Il faut de plus que son produit par 0,9 soit tel, qu'ajouté à a il reproduise 9. Il est facile d'en conclure que α doit être le complément de a à 9, puisque

$$(9-a)\,0{,}9+a=(9-a)(1-0{,}10)+a=9-\frac{9-a}{10}.$$

Le quotient total sera donc multiplié par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de 9 à l'origine, et d'un nombre qui sera le complément à 9 du premier chiffre du quotient différent de 9. Sur le produit obtenu, on répétera la même opération de multiplication que précédemment, par un facteur semblablement choisi, et on continuera ainsi jusqu'à ce que tous les chiffres du produit soient des 9 dans l'ordre d'approximation fixé d'avance.

J'applique ce procédé au nombre déjà choisi.

```
N = 2966,82051 456
    2670 3
    ------
     296 52
     267 03
     ------
18060  29 490
17802  26 703
-----  ------
 25800  2 7875
 23736  2 6703
 -----  ------
  20640   11721
  17802    8901
  -----   -----
   28380   2820 4
   26703   2670 3
   -----   ------
    16770   150 15
    14835   148 35
    -----   ------
     1935    1 8060
```

$D = 2967$

$\frac{N}{D} = 0{,}99993\ 95060\ 8695$

PRODUITS.	FACTEURS.
99993 95060 86950 5 99963 70365	1,00006
99999 95024 57315 3999 99801	$1{,}0^6 4$
99999 99024 57116 899 99991	$1{,}0^7 9$
99999 99924 57107	$[1{,}0^8 7542892]$

Le nombre symbolique $[1{,}0^8 7542892]$ se forme en prenant le complément à 9 des chiffres du dernier produit que nous avons calculé. Il indique la série des derniers facteurs $1{,}0^8 7$, $1{,}0^9 5$, $1{,}0^{10} 4$, etc. Il résulte en effet de la conduite des opérations que le dernier produit, comprenant dans la période des 9 un nombre de chiffres supérieur à la moitié des chiffres totaux que l'on conserve dans l'ordre d'approximation fixé, la multiplication, par le deuxième chiffre des facteurs binômes, ne pourra fournir pour terme additif qu'un nombre composé de zéros et du complément à 9 du premier chiffre différent de 9.

FACTEURS.	LOGARITHMES.
$1{,}00006$	00002 60568 87215
$1{,}0^6\,4$	1737 17758
$1{,}0^7\,9$	390 86502
$1{,}0^8\,7$	30 40061
$1{,}0^9\,5$	2 17147
$1{,}0^{10}\,4$	17372
$1{,}0^{11}\,2$	869
$1{,}0^{12}\,8$	347
$1{,}0^{13}\,9$	39
$1{,}0^{14}\,2$	1
	00002 62729 67311
Compl^{t} logarithm.	99997 37270 32689
Log 2967........	47231 75463 16840
Log N...........	3,47229 12733 4953

Procédé du rédacteur de cette Note.

Soit

$$X = 1,\ 0^{n-1}\ a_n \ldots a_{n'} \ldots a_{n''} \ldots$$

un nombre fractionnaire quelconque peu différent de l'unité, et ayant l'unité à sa partie entière. a désigne un quelconque des caractères de la numération décimale, non spécialement défini, et les indices n, n', n'',..., font connaître l'ordre décimal de ce chiffre, c'est-à-dire que

$$a_n = \frac{a}{10^n},\quad a_{n'} = \frac{a}{10^{n'}},\ldots,$$

les valeurs numériques pouvant d'ailleurs être différentes dans les termes successifs.

Posons

$$P = (1 + a_n)\ldots(1 + a_{n'})\ldots(1 + a_{n''})\ldots.$$

D'après la règle de formation du produit des facteurs binômes,

$$P = 1 + \sum a_x + \sum a_x a_{x'} + \sum a_x a_{x'} a_{x''} + \ldots,$$

le signe $\sum$ embrassant toutes les valeurs et toutes les combinaisons différentes des chiffres et de leurs indices; de telle sorte que

$$\sum a_x = a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n'} + a_{n'+1} + \ldots + a_{n''} + a_{n''+1} + \ldots,$$

$$\sum a_x a_{x'} = a_n . a_{n+1} + a_n . a_{n+2} + \ldots + a_{n+1} . a_{n+2} + \ldots,$$

c'est-à-dire que le signe $\sum$ représente successivement la somme des seconds termes, la somme de leurs produits différents, 2 à 2, 3 à 3, etc. Or, il résulte des principes de la numération décimale que

$$1 + \sum a_x = X, \quad \text{donc} \quad P > X.$$

Toutefois, si l'on fait abstraction dans X et dans P des zéros qui suivent immédiatement la virgule, et qui appartiennent également à ces deux nombres, on reconnaît que leurs n premiers chiffres sont communs, ou que la différence est au plus d'une unité sur le $n^{\text{ième}}$ chiffre. En effet,

$$\sum a_x a_{x'} < (a_n + a_{n+1} + \ldots)(a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots);$$

$$a_n + a_{n+1} + \ldots < \frac{1}{10^{n-1}}, \quad a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots < \frac{1}{10^n}.$$

Par suite,

$$\sum a_x a_{x'} < \frac{1}{10^{2n-1}} \quad \text{ou} \quad 1_{2n-1}.$$

Les autres termes de la série qui exprime P décroissent très-rapidement, et ne peuvent pas même fournir un chiffre de l'ordre $3n$. Les n premiers chiffres de X et de P seront donc communs, si

$$a_n\, a_{n+1} + a_{2n} < 1_{2n-1},$$

et la différence sera d'une unité sur le $n^{ième}$ chiffre, si

$$a_n\, a_{n+1} + a_{2n} = 1_{2n-1} + \mathcal{E}_{2n}.$$

Cela posé, cherchons de quelle manière devrait être formé un nombre X_1, analogue à X, mais plus petit que X, pour qu'en déduisant de ce nombre des facteurs analogues à ceux de P, on reproduise X. J'appelle α les seconds chiffres de ces facteurs, afin de les distinguer de ceux de P; d'ailleurs α représente, comme a, un des caractères de la numération, non spécialement défini. J'ai

$$\begin{aligned} X &= (1 + \alpha_n)\ldots(1 + \alpha_{n'})\ldots(1 + \alpha_{n''})\ldots \\ &= 1 + \sum \alpha_x + \sum \alpha_x\, \alpha_{x'} + \sum \alpha_x\, \alpha_{x'}\, \alpha_{x''} + \ldots \\ &= X_1 + \sum \alpha_x\, \alpha_{x'} + \sum \alpha_x\, \alpha_{x'}\, \alpha_{x''} + \ldots, \end{aligned}$$

en sorte que

$$X_1 = X - \sum \alpha_x\, \alpha_{x'} - \sum \alpha_x\, \alpha_{x'}\, \alpha_{x''} - \ldots.$$

D'après ce qui a été démontré plus haut, les n premiers chiffres de X, après les zéros, entreront dans X_1, si

$$a_n a_{n+1} + a_{2n} < 1_{2n-1},$$

et le $n^{ième}$ chiffre de X_1 sera moindre d'une unité que celui de X, si

$$a_n\, a_{n+1} + a_{2n} \overset{=}{>} 1_{2n-1}.$$

Cette vérification pouvant être faite à simple vue, j'admets que l'on connaît exactement les n premiers chiffres de X_1, c'est-à-dire la composition de X_1 jusqu'à l'ordre décimal $2n - 1$. Il est facile alors de calculer la partie de la série qui comprend exclusivement ces n chiffres. On n'aura d'ailleurs égard qu'au terme $\sum \alpha_x \alpha_{x'}$, attendu que les termes suivants donneraient des produits en dehors du premier ordre d'approximation que l'on peut obtenir. On écrira ainsi

$$\sum \alpha_n \alpha_{n'} = \sum_{n}^{2n-2} \alpha_x \sum_{n+1}^{2n-1} \alpha_{x'} + \sum_{n}^{\omega-1} \alpha_x \sum_{2n}^{\omega} \alpha_{x'}.$$

Le symbole $\sum\limits_{p}^{q} \alpha_x$ veut dire que l'on doit donner successivement à l'indice x toutes les valeurs entières depuis p jusqu'à q, et faire la somme des α_x qui en résultent. ω représente ici pour nous l'ordre décimal du dernier terme de X_1.

En retranchant de X, $\sum\limits_{n}^{2n-2} \alpha_x \sum\limits_{n+1}^{2n-1} \alpha_{x'}$ que l'on peut exactement calculer, on aura X_1 avec une erreur exprimée par

$$\sum_{n}^{\omega-1} \alpha_x \sum_{2n}^{\omega} \alpha_{x'} + \sum \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_{x''} + \ldots < 1_{2n-2}.$$

Par suite, $n - 1$ nouveaux chiffres de X_1 seront exactement déterminés, et ils serviront à calculer une nouvelle partie du reste de la série qui, retranchée du reste de X, donnera encore $n - 1$ nouveaux chiffres de X_1.

Il est évident que l'opération peut être indéfiniment continuée, et que l'on arrivera de cette manière à déterminer X_1, et, par suite, les facteurs cherchés, avec toute l'approximation que l'on croira devoir rechercher. Pour un ordre d'approximation déterminé, le nombre des opérations sera d'autant moindre que n sera plus grand, c'est-à-dire que, dans le nombre fractionnaire, l'unité sera suivie d'un plus grand nombre de zéros.

Appliquons ce procédé au nombre dont nous avons déjà cherché le logarithme par les procédés de Briggs et de R. Flower.

$$N = 2966{,}82051\ 456 \qquad D = \frac{2966}{X} \qquad X = 1{,}00027\ 66401\ 0789$$

		5932
3200		22731
2966		20762
23400		1969 4
20762		1779 6
26380		189 85
23728		177 96
26520		11896
		11864
		32
$\sum_4^6 \alpha_x \sum_5^7 \alpha_{x'}$		153 2
		4 62
		36
	1^re corr.	0^7 157 856
$\sum_4^9 \alpha_x \sum_8^{10} \alpha_{x'}$		04860
		1701
		146
		15
$\sum \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_{x''}$		84
		8
	2^e corr.	0^{11} 6814

X =	1,00027 66401 0789
	157 8560
	1,00027 66243 2229
	681
X_2 =	1,00027 66243 1548

NOMBRES.	LOGARITHMES.
2966	3,47217 11466 92360
1,0002	8 68502 11649
$1{,}0^4\ 7$	3 03995 49761
$1{,}0^5\ 6$	26057 59074
$1{,}0^6\ 6$	2605 76611
$1{,}0^7\ 2$	86 85890
$1{,}0^8\ 4$	17 37178
$1{,}0^9\ 3$	1 30288
$1{,}0^{10}\ 1$	4343
$1{,}0^{11}\ 5$	2171
$1{,}0^{12}\ 4$	174
$1{,}0^{13}\ 8$	35
Log 2966,82051 456 =	3,47229 12733 4953

Le dernier procédé me paraît d'une application plus sûre et moins laborieuse que les deux autres, mais il exige qu'indépendamment de la table des logarithmes des facteurs binômes on possède une table des logarithmes des nombres premiers compris dans les neuf premières chiliades. Cette dernière table, calculée sous la direction de Prony, avec dix-neuf décimales exactes, n'a reçu malheureusement qu'une publicité bien incomplète. On ne la trouve, à ma connaissance, que dans les deux manuscrits originaux des *Tables du Cadastre*, et dans le *Traité des fonctions elliptiques* de Legendre. J'ai cru qu'il serait utile d'en faire une publication spéciale, que l'on pourrait acquérir à un prix modique, et de l'accompagner d'une table des facteurs premiers des nombres compris entre 0 et 10000. La Note actuelle est en quelque sorte la préface de cette publication.

Retour des logarithmes aux nombres.

Pour résoudre le problème inverse, c'est-à-dire pour opérer le retour des logarithmes aux nombres, on retranche successivement, du logarithme du nombre, les logarithmes des facteurs dans lesquels ce nombre peut être décomposé à l'aide des tables; puis on effectue le produit de ces facteurs. La première table à dix-neuf décimales ne contenant que les logarithmes des nombres premiers de 1 à 10000, on s'aidera d'une table à quatre ou cinq décimales pour obtenir immédiatement les quatre premiers chiffres du nombre cherché, c'est-à-dire la quantité que nous avons appelée D précédemment. On décomposera D en ses facteurs premiers, et on en conclura son logarithme dans l'ordre d'approximation fixé.

Ce logarithme retranché du logarithme donné fournira un reste dont on soustraira successivement les logarithmes des facteurs binômes les plus approchés, jusqu'à ce que l'on arrive à un reste négligeable. Il ne restera plus ensuite qu'à effectuer le produit des facteurs obtenus.

Soit

$$\log N = 3{,}47229\,12733\,4953.$$

La table à quatre ou cinq décimales fait connaître que le nombre de quatre chiffres le plus voisin de N, en moins, est 2966. Conséquemment

$$D = 2966 = 2\ 1483$$

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}30102\ 99956\ 6398 \\ \log 1483 &= 3{,}17114\ 11510\ 2838 \\ \hline \log D &= 3{,}47217\ 11466\ 9236 \end{aligned}$$

Le calcul se dispose alors comme il suit :

LOGARITHMES.	FACTEURS.	PRODUITS.
3,47229 12733 49530		
3,47217 11466 92360	2966 (1)	(6)à(12) 1,00000 00243 15470
12 01266 57170		(5) 6000 00014
8 68502 11649	1,0002 (2)	1,00000 06243 15484
3 32764 45521		(4) 60000 3746
3 03995 49761	$1{,}0^{4}\ 7$ (3)	1,00000 66243 19230
28768 95760		(3) 7 00004 63702
26057 59074	$1{,}0^{5}\ 6$ (4)	1,00007 66247 82932
2711 36686		(2) 20 00153 24957
2605 76611	$1{,}0^{6}\ 6$ (5)	1,00027 66401 07889
105 60075		(1) 2966
86 85890	$1{,}0^{7}\ 2$ (6)	2966, 165 98406 47334
18 74185		1659 84064 7334
17 37178	$1{,}0^{8}\ 4$ (7)	24897 60971 001
1 37007		55328 02157 78
1 30288	$1{,}0^{9}\ 3$ (8)	IV 2966,82051 45599 98774
6719		
4343	$1{,}0^{10}\ 1$ (9)	
2376		
2171	$1{,}0^{11}\ 5$ (10)	
205		
174	$1{,}0^{12}\ 4$ (11)	
31		
30	$1{,}0^{13}\ 7$ (12)	
1		

On voit que, dans l'ordre d'approximation fixé, le produit des facteurs de (6) à (12) peut être immédiatement écrit.

Il est évident que l'on peut appliquer au calcul du produit des facteurs le procédé que nous avons déjà exposé. On corrigerait le nombre 1,00027 66243 1547 que fournissent les seconds termes des facteurs binômes, au moyen de la série

$$\sum \alpha_x \alpha_{x'} + \sum \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_{x''} + \ldots,$$

mais ici les corrections seraient additives.

$$\begin{array}{rcr}
X_1 & = & 1,00027\ 66243\ 1547 \\
1^{re}\ \text{corr.} & + & 157\ 8560 \\
\hline
 & & 1,00027\ 66401\ 0107 \\
2^{e}\ \text{corr.} & + & 681 \\
\hline
X & = & 1,00027\ 66401\ 0788
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\sum_4^6 \alpha_x \sum_5^7 \alpha_{x'} & 153\ 2 \\
 & 4\ 62 \\
 & 36 \\
\hline
1^{re}\ \text{corr.} & 157\ 856 \\
\hline
\sum_4^9 \alpha_x \sum_8^{10} \alpha_{x'} & 4860 \\
 & 1701 \\
 & 146 \\
 & 15 \\
\sum \alpha_x \alpha_{x'} \alpha_{x''} & 84 \\
 & 8 \\
\hline
2^{e}\ \text{corr.} & 6814 \\
\hline
\end{array}$$

Le reste du calcul s'achèverait en multipliant X par D.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 447

(voir t. XVII, p. 358);

PAR MM. BERQUET ET JOUFFRAY,
Élèves du lycée de Lyon.

Soient

$$x_1 = p^{\frac{1}{2}},$$

$$x_2 = \left(p + \sqrt{p^2 + qx_1}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$x_3 = \left(p + \sqrt{p^2 + qx_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

. . . .

$$x_n = \left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

p et q sont supérieurs à zéro. Démontrer que :

1° *Les termes* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *vont en croissant ;*

2° $x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p$ *est une quantité positive ;*

3° $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1}$ *n'est pas inférieure à* $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2p)^{\frac{n-2}{2}}$;

4° $x_n - x_{n-1} < \dfrac{1}{2^{(2n-2)\frac{1}{4}}}\left(\dfrac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{q^2}{8p^3}\right)^{\frac{n-2}{4}}.$

(GRUNERT.)

1° Si nous considérons la suite des termes x_1^2, x_2^2, $x_3^2, \ldots, x_n^2$, nous voyons qu'ils vont en croissant, puisque pour les avoir on ajoute à x_1^2 des quantités de plus en plus grandes. La suite x_1, x_2, $x_3, \ldots$, x_n sera donc formée de termes croissants.

2° Nous avons

$$x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p = \sqrt{p^2 + qx_{n-1}} + \sqrt{p^2 + qx_{n-2}},$$

qui est évidemment une quantité positive, comme somme de deux quantités positives.

3° Si nous effectuons le produit $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-2}$, il vient

$$p^{\frac{1}{2}}\left(p + \sqrt{p^2 + qx_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(p + \sqrt{p^2 + qx_2}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots \left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si nous diminuons cette expression et que nous prouvions que la nouvelle quantité n'est pas inférieure à

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(2p)^{\frac{n-2}{2}},$$

la proposition sera démontrée.

Or, si nous supprimons qx_1, $qx_2, \ldots,$ qx_{n-3} sous les radicaux, l'expression devient

$$p^{\frac{1}{2}}(2p)^{\frac{n-3}{2}},$$

que nous pouvons écrire

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(2p)^{\frac{n-2}{2}}.$$

Mais l'expression $x_1 x_2 \ldots x_{n-2}$ n'est jamais inférieure à cette quantité et pourra lui être égale dans le cas où l'on fait $n - 2 = 1$, car alors le produit $x_1 x_2 \ldots x_{n-2}$ se réduit à $p^{\frac{1}{2}}$, et si dans l'expression donnée on fait $n = 3$, il reste $p^{\frac{1}{2}}$. La troisième partie de l'énoncé se trouve donc ainsi établie.

4° Pour démontrer cette quatrième proposition, nous ferons voir d'abord qu'elle est vraie pour $n = 2$; dans ce cas, on a

$$x_2 - x_1 = \left(p + \sqrt{p^2 + qx_1}\right)^{\frac{1}{2}} - (p)^{\frac{1}{2}},$$

et il faut montrer que l'on a

$$\left(p + \sqrt{p^2 + qx_1}\right)^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou

$$\left(p + \sqrt{p^2 + qx_1}\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}}.$$

Élevant au carré les deux membres, il vient, toutes réductions faites,

$$\left(p^2 + q\sqrt{p}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(p^2 + q\sqrt{p}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{p^2 + q\sqrt{p}}{4p},$$

inégalité qui est évidente.

Nous allons maintenant démontrer que la proposition étant vraie pour $n - 1$, elle le sera pour n; à cet effet, nous prenons le rapport

$$\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}}.$$

Si nous démontrons que ce rapport est plus grand que le rapport des seconds membres correspondants, comme on suppose que l'on a

$$x_{n-1} - x_{n-2} < \frac{1}{2^{(2n-4)\frac{1}{4}}} \left(\frac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q^2}{8p^3}\right)^{\frac{n-3}{4}},$$

on en conclura l'inégalité

$$x_n - x_{n-1} < \frac{1}{2^{(2n-2)\frac{1}{4}}} \left(\frac{p^2 + q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{q^2}{8p^3}\right)^{\frac{n-2}{4}}.$$

Calculons

$$\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}}.$$

On a

$$x_n^2 = p + \sqrt{p^2 + qx_{n-1}},$$
$$x_{n-1}^2 = p + \sqrt{p^2 + qx_{n-2}}$$

et

$$(x_n^2 - p)^2 = p^2 + qx_{n-1},$$
$$(x_{n-1}^2 - p)^2 = p^2 + qx_{n-2};$$

d'où, en retranchant membre à membre,

$$(x_n^2 + x_{n-1}^2 - 2p)(x_n^2 - x_{n-1}^2) = q(x_{n-1} - x_{n-2}).$$

On en déduit donc

$$\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{1}{q}\left(\sqrt{p^2 + qx_{n-1}} + \sqrt{p^2 + qx_{n-2}}\right)$$
$$\times\left[\left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

La question se trouve donc ramenée à prouver que l'on a

$$\frac{1}{q}\left(\sqrt{p^2 + qx_{n-1}} + \sqrt{p^2 + qx_{n-2}}\right)$$
$$\times\left[\left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(p + \sqrt{p^2 + qx_{n-2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$> 2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8p^3}{q^2}\right)^{\frac{1}{4}},$$

inégalité qui sera évidemment remplie si l'on a

$$\frac{4}{q}\sqrt{p^2 + q\sqrt{p}}\left(p + \sqrt{p^2 + q\sqrt{p}}\right)^{\frac{1}{2}} > 2^{\frac{1}{2}}\left(\frac{8p^3}{q^2}\right)^{\frac{1}{4}},$$

ou

$$\frac{16}{q^2}\left(p^2 + q\sqrt{p}\right)\left(p + \sqrt{p^2 + q\sqrt{p}}\right) > 2\left(\frac{8p^3}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette dernière condition est toujours remplie, car en effectuant le produit dans le premier membre, on a

$$\frac{16}{q^2}\left(qp.\sqrt{p}+\ldots\right) > 2\left(\frac{8p^3}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

les points dans la parenthèse remplaçant des termes tous positifs. Le premier terme seul étant plus grand que le deuxième membre, l'inégalité sera satisfaite, et l'on a

$$x_n - x_{n-1} < \frac{1}{2^{(2n-2)\frac{1}{4}}}\left(\frac{p^2+q\sqrt{p}}{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{q^2}{8p^3}\right)^{\frac{n-2}{4}},$$

ce qu'il s'agissait d'établir.

Question 547;

(voir t. XIX, p. 405);

PAR M. DRIANT,
Élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout).

Lorsqu'une conique est circonscrite à un triangle, la somme des carrés de ses demi-axes est égale au carré de la tangente menée de son centre au cercle des neuf points, multiplié par le produit des distances de ce centre aux côtés du triangle, et divisé par le produit des distances de ce centre aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle. (FAURE.)

Je prends pour axes deux côtés du triangle donné; soient a et c les longueurs respectives de ces côtés et θ leur angle. L'équation d'une conique circonscrite sera

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 - Aax - Ccy = 0.$$

Pour calculer la somme des carrés des axes de cette conique, je vais la couper par un cercle ayant même centre que la conique, et en exprimant que ce cercle est bitangent à la conique, j'obtiendrai une équation du second degré en R^2 dont les racines seront les carrés des demi-axes.

Les coordonnées x_1, y_1 du centre de la conique sont

$$x_1 = \frac{C(Bc - 2Aa)}{B^2 - 4AC}, \quad y_1 = \frac{A(Ba - 2Cc)}{B^2 - 4AC}.$$

Si on transporte l'origine en ce point, l'équation de la conique devient

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \frac{AC(Cc^2 + Aa^2 - Bac)}{B^2 - 4AC} = 0.$$

L'équation d'un cercle concentrique est

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - R^2 = 0.$$

L'équation de l'ensemble de deux droites passant par l'intersection de ces deux courbes est

$$(AR^2 + \alpha)x^2 + (BR^2 + 2\alpha\cos\theta)xy + (CR^2 + \alpha)y^2 = 0,$$

en posant

$$\alpha = \frac{AC(Cc^2 + Aa^2 - Bac)}{B^2 - 4AC}.$$

Pour que ces deux droites se confondent, on doit avoir

$$R^4(B^2 - 4AC) - 4R^2(A + C - B\cos\theta)\alpha + \ldots = 0.$$

La somme des carrés des demi-axes est donc

$$(1) \qquad 4AC\frac{(Aa^2 + Cc^2 - Bac)}{(B^2 - 4AC)^2}(A + C - B\cos\theta).$$

Le produit des distances du centre aux trois côtés du triangle est

$$\frac{x_1 y_1\left(\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{c} - 1\right)\sin^3\theta}{\pm\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2}{ac}\cos\theta}}.$$

Le produit des distances du centre de la conique aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle a pour expression

$$\frac{\left(\frac{c}{2}-y_1\right)\left(\frac{a}{2}-x_1\right)\left(\frac{2x_1}{a}+\frac{2y_1}{c}-1\right)\sin^3\theta}{\pm 2\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{ac}\cos\theta}}.$$

Le rapport de ces deux produits est

$$\frac{8x_1y_1(cx_1+ay_1-ac)}{(c-2y_1)(a-2x_1)(2cx_1+2ay_1-ac)}.$$

Si on remplace dans cette expression x_1 et y_1 par leurs valeurs, on trouve

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} 8AC(Bc-2Aa)(Ba-2Cc) \\ \times[Cc(Bc-2Aa)+Aa(Ba-2Cc)-ac(B^2-4AC)] \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} [c(B^2-4AC)-2A(Ba-2Cc)] \\ \times[a(B^2-4AC)-2C(Bc-2Aa)] \\ \times[2Cc(Bc-2Aa)+2Aa(Ba-2Cc)-ac(B^2-4AC)] \end{array}\right\}},$$

ce qui se réduit à

$$(2)\qquad \frac{8AC(Cc^2+Aa^2-Bac)}{B[2B(Cc^2+Aa^2)-ac(B^2+4AC)]}.$$

Il reste à calculer la puissance du centre de la conique par rapport au cercle des neuf points du triangle; l'équation de ce cercle est

$$x^2+y^2+2xy.\cos\theta-\left(\frac{a}{2}+c.\cos\theta\right)x$$
$$-\left(\frac{c}{2}+a.\cos\theta\right)y+\frac{ac.\cos\theta}{2}=0.$$

La puissance cherchée est donc

$$x_1^2+y_1^2+2x_1y_1\cos\theta$$
$$-\left(\frac{a}{2}+c\cos\theta\right)x_1-\left(\frac{c}{2}+a\cos\theta\right)y_1+\frac{ac.\cos\theta}{2}\mp 0.$$

Si on remplace x_1 et y_1 par leurs valeurs, on a une expression dont le dénominateur est

$$(B^2 - 4AC)^2,$$

et le numérateur est

$$\begin{aligned}
&C^2(Bc - 2Aa)^2 + A^2(Ba - 2Cc)^2 \\
&\quad + 2\cos\theta . AC(Bc - 2Aa)(Ba - 2Cc) \\
&\quad - (B^2 - 4AC)\left[A(Ba - 2Cc)\left(\frac{c}{2} + a\cos\theta\right)\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + C(Bc + 2Aa)\left(\frac{a}{2} + c\cos\theta\right)\right] \\
&\quad + \frac{ac\cos\theta}{2}(B^2 - 4AC)^2,
\end{aligned}$$

ce qui devient, en développant,

$$\begin{aligned}
&B^2(C^2c^2 + A^2a^2) + 4A^2C^2(a^2 + c^2) - 4ABC(A + C)ac \\
&\quad + 2B^2AC\cos\theta . ac - 4ABC\cos\theta(Aa^2 + Cc^2) + 8A^2C^2ac\cos\theta \\
&\quad - \frac{(B^2 - 4AC)}{2}[Ac(Ba - 2Cc) + 2Cc\cos\theta(Bc - Aa) \\
&\qquad\qquad + 2Aa\cos\theta(Ba - 2Cc) + Ca(Bc - 2Aa)] \\
&\quad + \frac{B^4 ac\cos\theta}{2} - 4B^2AC\cos\theta . ac + 8A^2C^2ac\cos\theta.
\end{aligned}$$

Cette expression peut s'écrire en divisant tout par B :

$$\begin{aligned}
&B(C^2c^2 + A^2a^2) - 2AC(A + C)ac + 2BACac . \cos\theta \\
&\quad + \frac{B^3ac\cos\theta}{2} - \frac{B^2ac(A + C)}{2} \\
&\quad + BAC(a^2 + c^2) - B^2(Cc^2 + Aa^2)\cos\theta,
\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned}
&-\frac{A + C}{2}(B^2 + 4AC)ac - \frac{B\cos\theta}{2}[2B(Cc^2 + Aa^2)] \\
&\quad + \frac{ac\cos\theta B}{2}(B^2 + 4AC) + \frac{2B(A + C)(Aa^2 + Cc^2)}{2}.
\end{aligned}$$

La puissance du centre de la conique par rapport au cercle des neuf points est donc

$$(3)\quad \frac{B(A+C-B\cos\theta)\times[2B(Aa^2+Cc^2)-ac(B^2+4AC)]}{2(B^2-4AC)^2}.$$

Si on fait le produit des équations (2) et (3), on obtient pour résultat l'équation (1). C. Q. F. D.

Question 796;

PAR M. MUZEAU,
Lieutenant d'artillerie.

On propose de démontrer que la circonférence de l'ellipse, dont les axes sont $2a$ *et* $2b$, *est égale à la circonférence du cercle dont le rayon* R *est déterminé par la formule*

$$4R = \sqrt{a^2(2+\sqrt{2})+b^2(2-\sqrt{2})} + \sqrt{a^2(2-\sqrt{2})+b^2(2+\sqrt{2})},$$

en négligeant seulement la huitième puissance de l'excentricité, et l'on demande de construire R.

(HERMITE.)

$$\sqrt{a^2(2+\sqrt{2})+b^2(2-\sqrt{2})} = \sqrt{2(a^2+b^2)+\sqrt{2}(a^2-b^2)}$$

ou, en posant $a^2-b^2 = a^2e^2$,

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2(2+\sqrt{2})+b^2(2-\sqrt{2})}\\ &= \sqrt{2a^2+2a^2-2a^2e^2+\sqrt{2}\,a^2e^2}\\ &= a\sqrt{4-e^2(2-\sqrt{2})} = 2a\sqrt{1-e^2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)}\end{aligned}$$

$$= 2a\left[1 - \frac{1}{2}\frac{e^2(2-\sqrt{2})}{4} - \frac{1.1}{2.4}\frac{e^4(2-\sqrt{2})^2}{16} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{e^6(2-\sqrt{2})^3}{64} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\frac{e^8(2-\sqrt{2})^4}{256} - \ldots\right].$$

On a de même

$$\sqrt{a^2(2-\sqrt{2}) + b^2(2+\sqrt{2})} = 2a\sqrt{1 - e^2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)}$$

$$= 2a\left[1 - \frac{1}{2}\frac{e^2(2+\sqrt{2})}{4} - \frac{1.1}{2.4}\frac{e^4(2+\sqrt{2})^2}{16} - \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{e^6(2+\sqrt{2})^3}{64} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\frac{e^8(2+\sqrt{2})^4}{256} - \ldots\right].$$

En négligeant la huitième puissance de l'excentricité, on a donc

$$4R = 4a\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2\right],$$

$$2\pi R = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}e\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2\right];$$

le second membre de la dernière égalité est, en négligeant seulement la huitième puissance de l'excentricité, la mesure de la circonférence de l'ellipse dont les axes sont $2a$ et $2b$.

Note. — M. Muzeau fait suivre ce calcul d'une construction de R assez compliquée. Mais il en existe une plus simple, conséquence d'un théorème dû à Bernoulli. Soient $AC = AB + BC = a + b$ le diamètre d'un cercle, ADEFC le demi-octogone régulier inscrit dans ce cercle, on aura

$$R = \frac{BD + BF}{2}.$$

On aura ainsi une valeur approchée par excès de la circonférence de l'ellipse (voir *Nouvelles Annales*, t. XIII, p. 346, et t. XXIII, p. 403).

Autres solutions par MM. Lucien Bignon, de Lima, et Th. Willière, de Thuin.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

(Tous les ouvrages annoncés se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

MAYER (Adolph). — Beiträge.... *Contribution à la théorie des maxima et des minima des intégrales simples*. In-8 de VIII-86 pages. Leipzig; Teubner, 1866.

Réduction de la seconde variation d'une intégrale à sa forme la plus simple. — Criteria des maximums et minimums des intégrales simples. — Applications.

SIVERING (Joseph), ingénieur, membre de la Société des sciences naturelles de Luxembourg. — *De l'équilibre et de la stabilité des corps flottants*. (Extrait du tome IX des publications de la Société des Sciences naturelles.) In-8 de 27 pages et une planche; 1866.

DE COMMINES DE MARSILLY. — *Recherches mathématiques sur les lois fondamentales du monde physique*. — Premier Mémoire : *Actions simples*. In-8 de 60 p. Paris, 1865; Gauthier-Villars. — Prix : 1 fr. 50 c.

Dans cette brochure, notre collaborateur aborde de grandes questions relatives à la constitution interne des corps et aux forces primaires qui sont propres à leurs dernières molécules. On ne peut pénétrer dans ce milieu ardu que par des inductions et des hypothèses qu'il faudra vérifier ensuite par leurs conséquences souvent les plus éloignées. L'hypothèse probable de l'auteur est que les corps sont composés de molécules simples ou composées, mais ayant toutes la même masse et la même forme dans le même corps. Il arrive à cette conclusion, que l'adhésion, le frottement et la capillarité peuvent résulter d'une force en raison inverse de la quatrième puissance ou d'une plus grande puissance des distances.

PEIGNÉ. — *Conversion des monnaies et poids de tous les pays étrangers, en mesures, monnaies et poids de la France.* In-12 de XII-195 pages. Paris, 1867; Gauthier-Villars. — Prix : 2 fr. 50 c.

Ouvrage dont le titre seul indique l'utilité. L'auteur a donné sur chaque pays dont il parle des notions succinctes, statistiques et géographiques. Dans une nouvelle édition, l'auteur pourrait encore augmenter l'utilité de son ouvrage en ajoutant la comparaison des thermomètres de Réaumur et centigrade, les hauteurs du baromètre exprimées en pouces et en millimètres, la comparaison des divers calendriers, etc.

MILLER (W.-J.). — Mathematical questions.... *Questions mathématiques avec leurs solutions,* tirées de *The Educational Times,* avec diverses notes et solutions non publiées dans ce journal, t. V, de janvier à juillet 1866. In-8 de XVI-120 pages. London, 1866.

QUESTIONS.

816. En supposant répartie le long d'une spirale logarithmique une densité proportionnelle à la courbure, le centre de gravité d'un arc quelconque s'obtient en joignant le pôle au point de contact de cet arc avec la tangente parallèle à la corde, et portant sur ce rayon vecteur une longueur égale au rapport de cette corde à l'angle des rayons extrêmes. (HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

817. Si l'on considère de même une cycloïde dont la densité soit proportionnelle à la courbure, et un arc quelconque symétrique par rapport au sommet, le centre de gravité de cet arc se trouve sur l'axe de la courbe à une hauteur au-dessus de son milieu qui est une quatrième proportionnelle au rayon du cercle générateur et aux deux segments que la tangente du point extrême détermine sur l'abscisse de ce point comptée à partir du sommet sur la tangente horizontale.

Pour la cycloïde entière, le centre de gravité de la courbure se trouve, d'après cela, au milieu de la hauteur.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

818. Si l'on envisage enfin une chaînette dont la densité soit en raison de la courbure et un arc quelconque symétrique par rapport au sommet, le centre de gravité de cet arc sera sur l'axe de la courbe à une hauteur au-dessus de la directrice marquée par le rapport de l'abscisse à l'inclinaison extrême. (HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

819. Si, au contraire, la densité de la chaînette varie en raison inverse de la hauteur au-dessus de la directrice, le centre de gravité d'un arc quelconque compté à partir du sommet a pour abscisse la moitié de l'abscisse extrême, et pour ordonnée la hauteur du rectangle qui aurait la même aire et la même base horizontale que la courbe, et que l'on sait facilement construire.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

820. On coupe une surface du second degré (S) par un plan. On prend, sur la courbe d'intersection C, quatre points arbitraires (non en ligne droite) a, b, g, h, et l'on mène en ces points les normales A, B, G, H à la surface (S). On construit le couple de droites D, Δ rencontrant à la fois ces quatre normales et l'on détermine la droite I, issue d'un point fixe i, qui s'appuie sur D et Δ.

Démontrer que lorsque l'on fait varier la position des points a, b, g, h sur C, les droites telles que I engendrent un plan. (MANNHEIM.)

821. Les données restant les mêmes, on construit comme précédemment le couple de droites D, Δ. On prend les traces de ces droites sur un plan fixe (P); on joint ces traces par une droite M.

Démontrer que, lorsque l'on fait varier la position des points a, b, g, h sur C, les droites telles que M passent par un point fixe. (MANNHEIM.)

822. Un trièdre trirectangle est circonscrit à une surface du second degré. Démontrer que les normales à cette surface aux points de contact des faces du trièdre et le diamètre qui passe par le sommet de ce trièdre appartiennent à un même hyperboloïde.

823. Deux surfaces gauches ayant une génératrice commune sont telles, que leurs deux plans tangents communs se coupent à angle droit. Démontrer que, pour la génératrice commune, le plan central (*) de l'une touche l'autre au point où le plan central de celle-ci touche la première. (MANNHEIM.)

(*) Le plan central est le plan tangent au point central.

NOTE SUR L'USAGE ET L'EMPLOI DES QUANTITÉS NÉGATIVES;

PAR M. PROUHET (*).

1. Les quantités négatives, telles qu'elles se sont présentées à nous jusqu'ici, sont de véritables symboles d'impossibilité, car un problème doit être évidemment considéré comme impossible quand on ne peut le résoudre sans en modifier l'énoncé. Ce caractère est d'ailleurs exprimé par la qualification même dont on accompagne ces quantités et qui désigne bien l'absence de toute solution. Par opposition, les quantités qui résolvent le problème dans le sens précis de son énoncé sont dites *positives* ou *affirmatives;* on ne doit les faire précéder d'aucun signe.

Les quantités négatives, en tant qu'elles signifient une impossibilité, ne peuvent être, en Algèbre, que d'une utilité fort restreinte. On peut même dire que la recherche des modifications à introduire dans l'énoncé du problème, pour le rendre possible, sort des limites de la question; car toute question est nécessairement terminée, soit lorsqu'on en a trouvé la solution, soit lorsqu'on a reconnu qu'elle n'en admet aucune. Ce qui achève d'ailleurs d'enlever tout intérêt à cette recherche, c'est qu'il y a souvent, ainsi que M. Lacroix l'a déjà remarqué, plusieurs manières de former des questions analogues à la proposée et qui soient résolues par la valeur absolue du nombre négatif que l'on avait trouvé.

2. La principale utilité des quantités positives ou né-

(*) Extrait de l'*Algèbre* de LACROIX, 22e édition, revue, corrigée et annotée par M. Prouhet, 1867.

gatives *isolées* résulte de leur emploi en vertu d'une convention expresse, à l'effet de représenter un élément important de certaines grandeurs : c'est ce que quelques exemples vont faire comprendre.

Supposons que l'on veuille assigner sur une ligne droite la position d'un point M rapporté à un point fixe et bien connu O, pris sur cette droite. Cette position sera complétement déterminée si l'on indique : 1° la valeur numérique de la distance qui sépare les deux points, valeur qui dépendra d'une unité choisie arbitrairement; 2° la situation de cette distance comme étant placée à droite ou à gauche du point O.

Ainsi la position du point M sera déterminée si l'on dit qu'il est à 20 mètres *à droite* du point O, ou à 15 mètres *à gauche* de ce point.

Supposons que l'on rapporte divers événements à une époque fixe. L'époque d'un de ces événements sera connue sans ambiguïté si l'on donne la grandeur de l'intervalle qui le sépare de l'époque fixe, et en même temps si l'on marque par les mots *avant* ou *après* que cet événement a *précédé* ou *suivi* l'époque fixe.

On voit, par ces deux exemples, que certaines grandeurs ne sont pas complétement déterminées par leur valeur absolue; il faut y joindre la désignation d'une certaine manière d'être qu'on nomme leur sens et qui, dans le langage ordinaire, s'exprime par les mots *à droite, à gauche; avant, après; au-dessus, au-dessous* et autres analogues.

Dans ce qui suit, nous prendrons surtout pour exemple les distances comptées sur une même droite à partir d'un certain point; mais on verra sans peine que ce que nous dirons s'appliquera à toutes les grandeurs susceptibles d'affecter deux sens complétement opposés. D'ailleurs, toute grandeur peut être assimilée à une distance, et c'est ce que l'on fait souvent, même dans le langage ordinaire, où la plupart des expressions relatives au temps sont empruntées à la notion d'espace.

3. Cela posé, les Mathématiques ayant pour but l'étude des grandeurs, on comprend que cette étude sera d'autant plus parfaite que les grandeurs seront représentées non-seulement dans leur valeur numérique, mais encore dans le sens qu'elles affectent. L'Algèbre devra donc avoir des signes pour exprimer ce qui, dans le discours, se rend par les mots *à droite, à gauche; au-dessus, au-dessous, etc.*

Les signes destinés à cet usage devront être très-simples et généraux, c'est-à-dire exprimer l'idée commune aux mots que nous venons de citer, mais en la dégageant de tout ce qui se rapporte à une grandeur spéciale.

Or, ce double caractère de simplicité et de généralité se retrouvant dans les signes $+$ et $-$ qui désignent déjà les deux modifications opposées que l'on peut concevoir dans une grandeur, savoir l'augmentation et la diminution, ce sont ceux que nous adopterons désormais pour représenter les deux sens dont certaines grandeurs sont susceptibles.

4. Voici maintenant comment on procédera quand il s'agira de distances comptées sur une même ligne. On verra sans peine ce qu'il faudrait faire dans des cas analogues.

Toutes les distances comptées à partir d'un certain point ou *origine* O, et dans un sens convenu, de gauche à droite par exemple, seront représentées par leur valeur numérique précédée du signe $+$, et toutes les distances comptées dans le sens opposé seront représentées par leur valeur numérique précédée du signe $-$.

Ainsi, $+5$ désignera une distance de 5 unités comptée à droite du point O, et -5 une distance égale à la première, mais comptée à gauche de ce point.

La distance considérée aura donc une expression composée : 1° d'un nombre qui indique son rapport à l'unité et que l'on nomme sa valeur absolue ou numérique; 2° du signe $+$ ou du signe $-$ qui indique le sens de la grandeur. La distance est dite positive dans le premier cas, et négative dans le second.

Dans ces expressions composées, les signes $+$ et $-$, suivant l'heureuse remarque de Cauchy, sont comme des adjectifs qui, sans détruire la signification propre des substantifs auxquels ils sont joints, y ajoutent seulement une idée de relation.

On se contente quelquefois d'énoncer la valeur absolue des quantités positives; mais le signe $+$ doit être sous-entendu.

Quoique l'expression complète d'une grandeur se compose d'un nombre et d'un signe, rien n'empêche de la représenter encore par une seule lettre. Ainsi une grandeur, dont a' est la valeur absolue et qui affecte le sens que l'on convient de désigner par le signe $-$, peut être représentée par la seule lettre a, en posant

$$a = -a'.$$

5. Deux grandeurs affectées de signes sont *égales* lorsqu'elles ont à la fois *la même valeur numérique* et *le même signe*. Elles ne sont égales qu'en valeur absolue lorsque la première condition est seule remplie.

Une distance a est dite plus grande ou plus petite qu'une distance b qui a la même origine, suivant que la première se termine à droite ou à gauche de la seconde, en supposant, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que les distances soient comptées positivement de gauche à droite.

La relation d'inégalité s'exprime par les signes $\gtrless$:

$a > b$ signifie que a est plus grand que b; $a < b$ signifie le contraire.

On voit, par notre définition, que les mots *plus grand que, plus petit que* se rapportent plutôt à la situation qu'à l'étendue. On ne devra donc pas être étonné, si une inégalité relative aux valeurs numériques de deux grandeurs se trouve quelquefois renversée quand on a égard à leurs signes.

En effet, soient a' et b' les valeurs numériques de a et de b, et supposons

$$a' > b';$$

si l'on a

$a = +a'$,	$b = +b'$,	on aura	$a > b$,
$a = +a'$,	$b = -b'$,	»	$a > b$,
$a = -a'$,	$b = +b'$,	»	$a < b$,
$a = -a'$,	$b = -b'$,	»	$a < b$.

Ainsi, de deux quantités négatives, la plus petite est celle qui a la plus grande valeur absolue.

Si $b' = 0$ et $a = -a'$, on aura

$$a < 0.$$

Une quantité négative est donc moindre que zéro.

Les mots *plus grand que zéro*, *plus petit que zéro*, ont ici le même sens que les mots *au-dessus de zéro, au-dessous de zéro,* employés pour désigner des températures supérieures ou inférieures à une température *initiale*.

6. L'introduction des quantités positives et négatives dans le calcul demande aussi que l'on étende la signification primitivement attribuée aux principales opérations de l'Arithmétique.

Ajouter une distance b à une distance a, ce sera porter la première à la suite de la seconde dans le sens indiqué par son signe. La somme sera la distance qui sépare l'origine de a de l'extrémité de b.

Retrancher b de a, ce sera ajouter b changé de signe à la distance représentée par a.

Les exemples suivants feront comprendre l'emploi et la convenance de ces locutions.

Un courrier se mouvant sur la droite AB, à partir du point O, a parcouru d'abord 5 kilomètres dans le sens AB, et ensuite 3 kilomètres dans le même sens : à quelle distance du point O se trouve-t-il?

Réponse : à 8 kilomètres à droite du point O.

Si nous convenons de considérer les espaces parcourus dans le sens AB comme positifs, le résultat précédent s'exprimera par l'égalité suivante :

$$(+5)+(+3)=+8.$$

Si le sens de la vitesse avait été contraire, le résultat se serait exprimé par l'égalité

$$(-5)+(-3)=-8.$$

D'où l'on voit que *deux grandeurs de même signe étant* ajoutées *donnent un résultat de même signe et dont la valeur absolue est égale à la somme arithmétique des valeurs absolues de ces grandeurs.*

Supposons maintenant que le courrier, ayant parcouru 5 kilomètres dans le sens AB, vienne à parcourir ensuite 8 kilomètres dans le sens contraire. Il est clair qu'il reviendra au point O, et ensuite parcourra 3 kilomètres à gauche de ce point. L'ensemble des chemins parcourus équivaudra donc à 3 kilomètres parcourus à gauche, ce que nous exprimerons ainsi :

$$(+5)+(-8)=-3;$$

on aurait de même

$$(-5)+(+8)=+3.$$

D'où l'on voit que la *somme algébrique de deux quantités de signes différents est égale à la différence arithmétique de leurs valeurs absolues, et doit être affectée du signe de la plus grande.*

Le lecteur trouvera facilement, dans le même ordre d'idées, des exemples de soustraction, et verra que la *suppression* ou soustraction d'un chemin parcouru dans un sens équivaut à l'addition du même chemin parcouru dans l'autre sens. En résumé, les principes relatifs à l'addition et à la soustraction *algébrique* des monômes s'exprimeront par les identités suivantes, où a et b désignent des valeurs absolues :

$$\begin{aligned}
&(+a)+(+b)=+(a+b),\\
&(+a)+(-b)=+(a-b)=-(b-a),\\
&(+a)-(+b)=+(a-b)=-(b-a),\\
&(+a)-(-b)=+(a+b),\\
&(-a)-(-b)=+(b-a).
\end{aligned}$$

6. Les règles de la multiplication dérivent tout naturellement de celles de l'addition.

Supposons qu'un courrier fasse 5 fois 3 kilomètres dans le sens AB, il est clair qu'il aura parcouru en définitive 15 kilomètres dans le sens AB. On aura donc

$$(+3)\times(+5)=+15,$$

on aurait de même

$$(-3)\times(+5)=-15.$$

Si, le même courrier étant supposé se mouvoir depuis un temps indéfini, on vient à supprimer 5 fois 3 kilomètres parcourus dans un sens, il est clair que cela équivaudra à 15 kilomètres parcourus dans le sens opposé. Par conséquent

$$(+3) \times (-5) = -15,$$
$$(-3) \times (-5) = +15,$$

et l'on voit que les règles des signes sont les mêmes pour les quantités positives et négatives, quand elles sont isolées, que pour les termes additifs ou soustractifs des polynômes. La même conclusion s'applique à la division des monômes affectés de signes.

7. Si l'on considère, dans un polynôme, les différents termes comme comprenant à la fois leur valeur absolue et leur signe, le polynôme pourra être assimilé à une somme, et les diverses règles pourront être ramenées à un moins grand nombre, qui sont les suivantes :

1° On ajoute un polynôme à un autre en *ajoutant* au second successivement tous les termes du premier.

2° On retranche un polynôme d'un autre en *retranchant* successivement du second tous les termes du premier.

3° On multiplie deux polynômes entre eux en *ajoutant* tous les produits des termes du premier *multipliés* par les termes du second.

Un peu d'attention montrera au lecteur que ces énoncés, en attribuant aux mots *ajouter, retrancher, etc.*, leur signification *algébrique*, conduisent aux mêmes résultats que ceux auxquels on est parvenu en traitant à part la valeur absolue des termes et leur signe.

Il suit encore de là, et c'est une conséquence naturelle, que toutes les transformations que nous faisons subir aux équations pour les résoudre s'appliquent encore au cas où les lettres désignent des nombres affectés de signes. Une quantité négative donnée par la résolution d'une équation y satisfera donc en effectuant les opérations d'après les règles que nous venons d'indiquer.

8. Voyons maintenant quel avantage nous pouvons retirer de l'emploi des quantités positives et négatives.

Dans les questions de pur calcul, cet avantage consistera à ramener à un même type toutes les expressions algébriques de même forme, c'est-à-dire celles qui ne diffèrent que par le signe de quelques-uns de leurs termes. Toutes les équations du premier degré à une inconnue seront comprises dans la forme $ax = b$; toutes celles qui renferment deux inconnues, dans la forme $ax + by = c$, etc., tandis qu'il aurait fallu sans cela considérer autant de cas que les signes des termes peuvent présenter de combinaisons distinctes.

Si l'on s'interdisait l'emploi des quantités négatives, on serait arrêté à chaque instant dans les transformations. On ne pourrait faire passer un terme d'un membre dans un autre, multiplier ou diviser par une différence $a - b$, etc., avant d'être assuré que les soustractions indiquées peuvent s'effectuer. Non-seulement il faudrait distinguer autant de cas particuliers que l'on peut former de combinaisons en faisant varier les signes, mais encore ces cas se subdiviseraient eux-mêmes en plusieurs autres selon la grandeur relative des quantités dont le calcul conduirait à prendre la différence.

9. Les avantages que l'on retire des quantités isolées affectées d'un signe résultent, dans les problèmes, de la possibilité de traiter par le même raisonnement et par la même formule toutes les questions qui ne diffèrent que par le sens des diverses grandeurs que l'on y considère.

Exemple. — *Un courrier est supposé se mouvoir sur une droite* AB, *depuis un temps indéfini, avec une vitesse dont la grandeur et la direction sont connues. A une* *certaine époque, il se trouvait au point* O. *On demande quelle est la distance qui le sépare du point* O *à une autre époque donnée.*

Soit t la valeur *algébrique* du temps qui sépare les deux époques, c'est-à-dire le nombre d'heures comprises dans cet intervalle, nombre affecté du signe $+$ ou du signe —, suivant que l'époque considérée est postérieure ou antérieure à l'époque initiale.

Soit v la valeur *algébrique* de la vitesse, c'est-à-dire le nombre de kilomètres parcourus dans une heure, nombre affecté du signe $+$ ou du signe —, suivant que la vitesse est dirigée de gauche à droite ou dans le sens contraire.

Il est d'abord visible que la distance inconnue est toujours représentée en valeur absolue par le produit vt. Je dis que le signe de ce produit en représente aussi le sens.

En effet, si le courrier marche vers la droite, et que l'époque donnée soit postérieure à l'époque initiale, le produit vt sera positif; mais la distance cherchée est bien à droite du point O. Son signe sera donc celui de vt.

Si le courrier marche vers la droite et que l'époque donnée soit antérieure à l'époque fixe, le produit vt sera négatif; mais la distance cherchée est alors à gauche du point O. Son signe est donc encore celui de vt.

Si le courrier marche vers la gauche et que l'époque donnée soit antérieure à l'époque initiale, le produit vt sera négatif : la distance cherchée, étant évidemment à gauche du point O, a donc le signe de vt.

Si le courrier marche vers la gauche et que t soit négatif, le produit vt est positif, et c'est encore le signe qui convient à la distance cherchée.

On conclut de là qu'en appelant x la valeur algébrique de cette distance, on a dans tous les cas

$$x = vt.$$

Problème des courriers généralisé. — Reprenons maintenant le problème du n° 64 et avec les mêmes notations, mais en laissant indéterminé le sens des vitesses, et en supposant que les lettres b, c, x, y représentent les valeurs algébriques des quantités considérées.

Cela posé, soit t la valeur algébrique du temps qui sépare l'époque de la rencontre de l'époque initiale où les deux courriers étaient simultanément l'un en A, l'autre en B. A étant l'origine de la distance nommée x et B l'origine de la distance nommée y, comptons les x positivement dans le sens AB et les y positivement dans le sens BA, ce qui détermine le signe de chaque vitesse d'après son sens. On aura, d'après le problème précédent et dans tous les cas,

$$x = bt, \quad y = ct,$$

d'où

(1) $$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

D'un autre côté, on s'assurera facilement, en examinant les diverses positions relatives du point de rencontre et des points A et B, que l'on a toujours, en tenant compte des signes,

(2) $$x + y = a.$$

Les équations (1) et (2) sont donc les équations les plus générales du problème. On en tirera les formules

$$x = \frac{ab}{b+c}, \quad y = \frac{ac}{b+c},$$

qui résoudront ce problème, quelles que soient les hypothèses faites sur le sens des vitesses données.

Ces exemples suffisent pour montrer que l'emploi des signes + et — permet d'atteindre à un haut degré de généralité. Nous remarquerons que l'on suit quelquefois une marche inverse. On établit les formules pour une hypothèse particulière faite sur le sens des grandeurs; on fait voir ensuite qu'elles s'étendent à tous les cas.

10. La plupart des difficultés auxquelles ont donné lieu les quantités négatives viennent de ce qu'on a souvent confondu leur rôle comme symbole d'impossibilité avec celui qu'elles remplissent quand elles servent à marquer un certain état des grandeurs.

On serait peut-être moins exposé à tomber dans cette confusion d'idées, si, prenant en considération, au début de l'Algèbre, le double aspect des grandeurs (valeur numérique et sens), on établissait dès lors les diverses conventions nécessaires pour en tenir compte dans le calcul. L'esprit, naturellement frappé du principal rôle des quantités négatives, verrait bien qu'elles ne sont qu'accidentellement des caractères d'impossibilité, et qu'en cela elles ne se distinguent pas des quantités positives (*).

NOTE SUR DEUX THÉORÈMES DE STURM ET D'OSTROGDSKI;

Par M. DESBOVES.

Le théorème de Sturm relatif à la résolution des équations numériques s'applique sans modification au cas des racines égales, seulement il ne fait pas connaître en même temps l'ordre de multiplicité de la racine calculée. Mais, sans avoir recours à la théorie des racines égales, on peut

(*) On peut lire de judicieuses réflexions sur ce sujet dans une Note de M. Abel Transon, insérée aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. III, p. 318, année 1844.

déterminer l'ordre de multiplicité par le théorème suivant, dû à Sturm.

Théorème. — *Divisez la fonction, premier membre de l'équation donnée, et la dérivée de cette fonction, par leur plus grand commun diviseur, substituez la racine de l'équation donnée dans le second quotient et dans la dérivée du premier, le quotient des deux nombres obtenus sera égal à l'ordre de multiplicité de la racine.*

Démonstration. — Soient X la fonction donnée; X' sa dérivée; D leur plus grand commun diviseur; Q et Q_1 les quotients obtenus en divisant X et X' par D; on a

$$X = DQ, \quad X' = DQ_1, \quad \text{d'où} \quad \frac{Q_1}{Q} = \frac{X'}{X}.$$

a étant une racine de l'ordre de multiplicité p, on pose

$$X = (x - a)^p \varphi x,$$

d'où

$$X' = p(x - a)^{p-1} \varphi x + (x - a)^p \varphi' x;$$

par suite,

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{p \varphi x + (x - a) \varphi' x}{(x - a) \varphi x}.$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$Q_1 : \frac{Q}{x - a} = p + (x - a) \frac{\varphi' x}{\varphi x}.$$

En y faisant $x = a$, $\dfrac{Q}{x - a}$ devient, comme on sait, égal au résultat de la substitution de a à la place de x dans la dérivée Q' du polynome Q, et le second membre se réduit à p. Si donc on désigne par $(Q_1)a$, $(Q')a$ les résultats de la substitution de a à la place de x dans Q_1

et Q', on a

$$p = \frac{(Q_1)a}{(Q')a}.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Théorème d'Ostrogdski. — L'égalité précédente montre que l'équation $Q_1 - pQ' = 0$ est satisfaite par une racine quelconque a de l'ordre de multiplicité p; le polynôme $Q_1 - pQ'$ est donc divisible par tous les facteurs binômes correspondants aux racines de l'ordre de multiplicité p.

Mais, comme on va le voir, le même polynôme n'est pas divisible par les facteurs correspondants aux racines d'un autre ordre de multiplicité q. En effet, les racines de l'ordre q doivent satisfaire à l'équation

$$Q_1 - qQ' = 0;$$

si elles satisfaisaient en même temps à l'équation

$$Q_1 - pQ' = 0,$$

elles seraient racines par cela même de l'équation

$$Q_1 = 0;$$

mais cela est impossible, puisque cette dernière équation ne contient aucune des racines de l'équation proposée.

D'autre part, nous remarquons que Q est le produit de tous les facteurs binômes correspondants à toutes les racines de l'équation proposée, mais pris à la première puissance. *Donc, en égalant à zéro le plus grand commun diviseur entre Q et $Q_1 - pQ'$, on aura l'équation dont les racines sont toutes celles de l'ordre de multiplicité p, mais prises chacune une fois. C'est le théorème d'Ostrogdski.*

NOTE SUR LA SIMPLIFICATION ET LA VÉRIFICATION DES CALCULS RELATIFS AU THÉORÈME DE STURM

(voir p. 240);

PAR M. HOUSEL.

Si l'on substitue des unités dans l'équation proposée par Sturm

$$X = 10x^4 - 5x^3 - 76x^2 + 58x - 11 = 0,$$

on voit d'abord qu'il y a une racine négative comprise entre -2 et -3 : on reconnaît même qu'il n'y en a pas d'autre ; car, si l'on change x en $-x$, l'équation se divise en deux parties consécutives de signe différent.

On observe aussi qu'il y a une racine positive entre 2 et 3. Quant aux deux autres, on peut en soupçonner la réalité à cause du théorème de Rolle, car l'équation dérivée

$$X' = 40x^3 - 15x^2 - 152x + 58 = 0$$

a une racine comprise entre 0 et 1 ; or, si les quatre racines de $X = 0$ sont réelles, on sait que les deux dernières sont aux environs de cette valeur ; mais le théorème de Sturm peut seul montrer d'avance qu'en effet ces racines existent, et même qu'elles sont aussi comprises entre 0 et 1.

Cependant la substitution des dixièmes, des centièmes et même des millièmes ne suffit pas pour les séparer. Mais comme on s'aperçoit que les valeurs de X sont plus petites pour $x = 0,38$ et $x = 0,382$ qui donnent successivement

$$X = -0,0002464 \quad \text{et} \quad X = -0,00000070224,$$

on voit que c'est aux environs de ces valeurs qu'il faudra substituer d'abord des millièmes, puis des dix-millièmes.

En effet,

$$x = 0,3819$$

donne

$$\mathrm{X} = 0,000001006951376.$$

On trouvera de même que l'autre racine est comprise entre 0,3817 et 0,3818.

Du reste, cette équation en particulier est facile à résoudre si l'on songe à décomposer le polynôme du quatrième degré en facteurs rationnels du second ; on a alors

$$\begin{aligned} &10x^4 - 5x^3 - 762^2 + 58x - 11 \\ &\quad = (x^2 - 3x + 1)(10x^2 + 25x - 11), \end{aligned}$$

ce qui donne les quatre racines

$$\begin{aligned} x_1 &= 2,61803, & x_2 &= 0,38196, \\ x_3 &= 0,38172, & x_4 &= -2,88172. \end{aligned}$$

Pour venir à l'objet de cette Note, observons que la meilleure réponse à faire aux objections sur la difficulté des calculs qu'entraîne la méthode de Sturm consiste assurément à donner un moyen de les simplifier, et surtout de les vérifier.

Voici comment y parvenait feu M. Binet, professeur au collége Bourbon, actuellement lycée Bonaparte. Il suffit de démontrer le théorème suivant :

Si l'on divise un polynôme

$$\mathrm{A} = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + dx^{m-3} + \ldots$$

par un autre polynôme

$$\mathrm{B} = a'x^{m-1} + b'x^{m-2} + c'x^{m-3} + d'x^{m-4} + \ldots,$$

dont le degré est inférieur d'une unité, le facteur a'^2, *que l'on introduit pour faciliter la division, se retrouve dans le second reste* R' *obtenu en divisant* B *par le premier reste* R.

En faisant la division indiquée par

$$a'^2 A = BQ + R,$$

on trouve

$$Q = aa'x + a'b - ab';$$

soit

$$R = a'' x^{m-2} + b'' x^{m-3} + \ldots,$$

on a aussi

$$a'' = a'(a'c - ac') - b'(a'b - ab')$$

et

$$b'' = a'(a'd - ad') - c'(a'b - ab').$$

La seconde division est indiquée par

$$a''^2 B = Q'R + R'$$

en posant

$$Q' = a'a''x + a''b' - a'b''.$$

On a

$$R' = a''^2 B - Q'R = - a'^2 Q'A + B(a''^2 + QQ').$$

Par conséquent, le théorème de M. Binet sera démontré si l'on fait voir que $a''^2 + QQ'$ est divisible par a'^2. Or, on a

$$\begin{aligned} a''^2 + QQ' = {} & [a'(a'c - ac') - b'(a'b - ab')]^2 \\ & + (aa'x + a'b - ab')(a'a''x + a''b' - a'b''). \end{aligned}$$

En développant le second membre, nous laisserons de côté les termes où se trouve le facteur a'^2, tels que

$$a'^2(a'c - ac')^2 \quad \text{et} \quad a'^2 x^2 . aa''.$$

Les termes en x seront

$$a'x[a(a''b' - a'b'') + a''(a'b - ab')];$$

on pourra aussi les mettre de côté, puisque ceux qui ne contiennent pas a'^2 se détruisent. Il reste donc, en supprimant encore le facteur commun $a'b - ab'$, la quantité

$$b'^2(a'b - ab') - 2a'b'(a'c - ac') + a''b' - a'b''.$$

Dans $a''b' - a'b''$, supprimant encore

$$- a'^2(a'd - ad'),$$

il reste

$$b'^2(a'b - ab') - 2a'b'(a'c - ac') + a'b'(a'c - ac')$$
$$- b'^2(a'b - ab') + a'c'(a'b - ab'),$$

ce qui revient à

$$- a'b'(a'c - ac') + a'c'(a'b - ab') = a'^2(bc' - b'c).$$

On voit enfin que R' est divisible par a'^2.

Comme a' et a'' n'ont point, en général, de facteur commun, la suppression du facteur a'^2 dans R' n'empêchera pas R'' d'être divisible par a''^2.

Ce théorème est toujours vrai, même quand B n'est pas la dérivée de A. Du reste, voici, dans l'exemple cité, les polynômes de Sturm, simplifiés par le théorème de M. Binet :

$$X = 10x^4 - 5x^3 - 76x^2 + 58x - 11,$$
$$X' = 40x^3 - 15x^2 - 152x + 58,$$
$$X_1 = 1231x^2 - 1240x + 294,$$
$$X_2 = 6443876x - 2460539 \text{ (après division par } 32 = 2.4^2),$$
$$X_3 = 1065 \text{ (après division par } 1515361 = (1231)^2.$$

DISCUSSION DE L'ÉQUATION
Qui donne les plans principaux d'une surface du second degré;

PAR M. CH. FORESTIER,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Toulouse.

On sait que les équations suivantes déterminent la direction des cordes principales et les plans diamétraux principaux de la surface

$$\begin{gathered}Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0:\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0,\\ B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma = 0,\\ B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma = 0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(S - A)(S - A')(S - A'') - B^2(S - A)\\ - B'^2(S - A') - B''^2(S - A'') - 2BB'B'' = 0,\end{gathered}$$

$$S[\alpha x + \beta y + \gamma z] + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

Supposons d'abord qu'aucun des coefficients B, B', B'' ne soit nul.

I.

L'équation en S *a ses trois racines réelles.*

Cette équation peut s'écrire :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&(S - A'')[(S - A)(S - A') - B''^2]\\ &\quad - B^2(S - A) - B'^2(S - A') - 2BB'B'' = 0.\end{aligned}\right.$$

Prenons l'équation auxiliaire

$$(2)\qquad (S - A)(S - A') - B''^2 = 0.$$

Elle a ses racines réelles, l'une inférieure et l'autre supérieure à A et A'. Désignons-les par a et b, et soit $a < b$.

Pour une valeur de S tirée de (2), on a

$$S - A' = \frac{B''^2}{S - A},$$

et le résultat de la substitution dans (1) se réduit à

$$- \frac{1}{S - A} [B(S - A) + B'B'']^2,$$

de sorte que pour $S = a$, le résultat est positif, et pour $S = b$, négatif. Les quatre quantités $-\infty$, a, b, $+\infty$ séparent les trois racines de l'équation (1) (*).

II.

Conditions pour que l'équation en S *ait deux racines égales.*

Les conditions nécessaires et suffisantes sont que l'une des racines de l'équation auxiliaire soit racine de l'équa-

---

(*) Cet ingénieux moyen de séparer les racines de l'équation en s et d'établir leur réalité est dû, comme on sait, à M. Cauchy. En modifiant un peu la démonstration, M. Forestier l'a encore simplifiée, particulièrement en ce qui concerne les conditions de l'égalité de deux des racines. Les coefficients d'une équation dont deux racines ont la même valeur ne sont assujettis qu'à remplir une seule condition qui est pour le troisième degré

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = 0,$$

en désignant, d'une manière générale, par S_m la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des racines. Mais, dans le cas actuel, cette équation de condition se décompose en deux autres (*voir* l'article de M. Mathieu, p. 177).

G.

tion (1) et de sa dérivée; ce qui donne immédiatement

$$B(S-A)+B'B''=0,$$
$$(S-A)(S-A')-B''^2=0,$$
$$(S-A'')[(S-A)+(S-A')]-B^2-B'^2=0.$$

D'où l'on déduit

$$S=A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{BB''}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}.$$

III.

Lorsqu'on porte dans les trois équations en α, β, γ une valeur de S, racine double de l'équation (1), ces trois équations se réduisent à une seule qui est

$$\frac{\alpha}{B}+\frac{\beta}{B'}+\frac{\gamma}{B''}=0.$$

La surface a une infinité de cordes principales parallèles à un même plan et une infinité de plans principaux. On montre que tous ces plans se coupent suivant une même droite, et que la surface est de révolution autour de cette droite. Mais si l'on porte dans ces trois équations une valeur de S, racine simple de l'équation (1), elles se réduisent à deux distinctes, qui déterminent une direction de cordes principales. En effet, si elles devenaient identiques, on aurait

$$\frac{A-S}{B''}=\frac{B''}{A'-S}=\frac{B'}{B},\quad \frac{A-S}{B'}=\frac{B''}{B}=\frac{B'}{A''-S},$$

d'où

$$S=A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{BB''}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''}.$$

Donc cette valeur de S serait racine double, ce qui est contre l'hypothèse.

IV.

Lorsque $B'' = 0$, la discussion se fait avec plus de facilité.

L'équation (1) se réduit à

$$(3)\quad (S-A)(S-A')(S-A'') - B^2(S-A) - B'^2(S-A') = 0,$$

et l'équation auxiliaire à $(S-A)(S-A') = 0$, soit $A < A'$.

Les quatre quantités $-\infty$, A, A', $+\infty$ séparent les trois racines de l'équation (3).

Pour que l'équation (3) ait deux racines égales, comme dans le premier cas, il faut et il suffit que l'une des racines de l'équation auxiliaire soit racine double de (3). Or, le résultat de la substitution de $S = A$ est

$$-B'^2(A-A'),\quad \text{d'où}\quad B' = 0\quad \text{ou}\quad A = A'.$$

Prenons la première hypothèse $B' = 0$. L'équation (3) se réduit à

$$(S-A)[(S-A')(S-A'') - B^2] = 0.$$

Donc, pour que $S = A$ soit racine double, il faut

$$B^2 = (A-A')(A-A'').$$

En prenant la seconde hypothèse, $A = A'$, l'équation (3) devient

$$(S-A)[(S-A)(S-A'') - B^2 - B'^2] = 0,$$

et pour que A soit racine double, il faut

$$B = 0,\quad B' = 0.$$

Les autres points de la discussion s'établissent ensuite avec la même facilité.

RÉSOLUTION GRAPHIQUE

Des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue, et description d'un instrument inventé dans ce but;

Par M. E. LILL,
Capitaine du génie au service de l'Autriche.

Soit

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \ldots + gx + k = 0$$

une équation du degré m, dans laquelle les lettres a, b, c, etc., représentent des coefficients numériques.

D'un point O, pris arbitrairement, prenons, en allant vers la gauche par exemple, une longueur OA égale à a, et qui servira d'unité.

Perpendiculairement à OA, portons de A en B une longueur AB égale à b, en allant vers la gauche si b est de même signe que a, ou vers la droite s'il est de signe contraire. Perpendiculairement à AB, portons de B en C une longueur BC égale à c, en allant vers la gauche si c est de même signe que b, et vers la droite s'il est de signe contraire. Faisons la même construction pour tous les autres coefficients $d, e, f, \ldots, g, k$, et nous arriverons enfin à un dernier point K, après avoir tracé un contour polygonal rectangulaire OABC...GK, dont les côtés sont en même nombre $m+1$ que les termes de l'équation proposée.

Cela fait, si l'on peut aller du point O au point K, en suivant un autre contour polygonal rectangulaire OA'B'C'...G', de m côtés seulement, dont les sommets consécutifs s'appuient respectivement en A', B', C', ... sur les côtés AB, BC, CD, ... du contour primitif, le nombre qui exprime la longueur AA′ *est une racine de l'équation.*

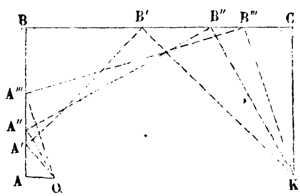
Autant de fois différentes on pourra cheminer ainsi de O vers K, en passant par des points A′, A″, A‴, ..., situés sur le côté AB, autant on obtiendra de racines réelles de l'équation, et ces racines seront les longueurs AA′, AA″, AA‴, ..., exprimées en nombres.

Quant aux signes de ces racines, ils seront positifs, si les points A′, A″, A‴, ... tombent à droite de OA (en allant de O vers A), et ils seront négatifs si ces points se trouvent à gauche de OA.

Pour rendre ceci plus clair encore par un exemple, soit

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

l'équation donnée. On fera, conformément à ce qui vient d'être expliqué, la construction du contour polygonal rectangulaire de quatre côtés OABCK. Cela fait, on peut aller du point O au point K en suivant les trois contours



rectangulaires (de trois côtés chacun) OA′B′K, OA″B″K, OA‴B‴K. Les trois lignes AA′, AA″, AA‴ représentent les trois racines de l'équation, et comme ces lignes sont, respectivement, égale à OA, double de OA, triple de OA, et situées à droite de OA, ces racines sont $+1$, $+2$ et $+3$.

Les jeunes lecteurs des *Nouvelles Annales* pourront, à titre d'exercice, chercher la démonstration de cette règle, ainsi que les cas particuliers qui s'y rattachent et diverses conséquences intéressantes qu'elle comporte. Nous nous bornerons ici à faire connaître un instrument très-simple, imaginé par M. le Capitaine Lill pour effectuer promptement cette construction dont il est l'auteur.

Un cercle, gradué dans le sens opposé au mouvement des aiguilles d'une montre et sur la surface duquel sont, en outre, tracés deux systèmes rectangulaires de cordes parallèles espacées de 1 millimètre, pivote autour de son centre, au-dessus d'une planchette fixe munie d'un repère et d'un vernier, et au-dessous d'une glace mate et transparente, sur laquelle on peut marquer des traits au crayon.

Pour résoudre une équation donnée, on commence par établir la coïncidence entre le zéro du limbe et celui du vernier. Le rayon OY, qui sert de direction à l'une des séries de cordes parallèles, passe alors par ce point, tandis que l'autre rayon OX se dirige sur le point 270 degrés de la graduation du limbe.

On marque, sur la glace mate, les points A, B, C, . . . , G, K, de la manière qui a été expliquée plus haut, et, grâce aux lignes parallèles équidistantes, cette opération se fait très-rapidement. On trace ensuite, avec un crayon fin, le contour OABC. . .GK.

Alors on desserre la vis de pression et on fait tourner le cercle gradué mobile, jusqu'à ce qu'on soit parvenu à une position telle, qu'un contour polygonal rectangulaire, dont les sommets s'appuient consécutivement sur les lignes AB, BC, CD, . . . , vienne aboutir au point K, et l'on obtient, pour chaque contour de ce genre, une longueur AA′ qui représente une des racines de l'équation.

Cette recherche exige quelques tâtonnements. Mais les essais sont rendus faciles et prompts par le *quadrillage* régulier du cercle mobile.

La graduation du cercle, dont le vernier permet d'évaluer les tiers de degré, sert à trouver chaque racine avec plus d'exactitude. En effet, chacune des longueurs, telles que AA′, n'est autre chose que la tangente trigonométrique de l'angle dont on a dû faire tourner le cercle mobile pour amener l'axe OX, primitivement dirigé suivant OA, sur la nouvelle position OA′ qu'il occupe quand le contour rectangulaire OA′B′K passe par le point K. On peut donc se servir des *Tables* pour obtenir la longueur de cette tangente avec plus de précision que ne le comporte la simple lecture du quadrillage.

Nous n'entrerons pas ici dans plus de détails sur cet ingénieux instrument, qui se trouve dans la partie autrichienne (section militaire) de l'Exposition universelle. M. le Capitaine Lill se propose de publier lui-même ultérieurement une description plus étendue, et alors il entrera, au sujet du procédé lui-même, dans des explications que ne comportaient pas les bornes de la présente Notice.

UN ABONNÉ.

SUR LES FORCES CENTRIFUGES

Mises en usage par Poinsot dans sa Théorie de la rotation des corps (*);

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Les théorèmes si remarquables sur la rotation des corps, que Poinsot a fait connaître en 1834, ont pris place dans les Traités de mécanique publiés depuis cette époque. Mais pour les démontrer on a recours à l'ancienne méthode analytique plus ou moins simplifiée, et non à celle de l'éminent géomètre. On sait d'ailleurs que cette der-

(*) Cet article est le résumé d'une communication faite à la réunion des Sociétés savantes (sect. des Sciences, 1re Commission) le 23 avril 1867.

nière a donné lieu à des objections, et que l'on a été jusqu'à supposer qu'elle ne pouvait avoir conduit à des résultats exacts que par suite de quelque compensation d'erreurs (*).

Malgré la réponse qui a été faite à ces objections (**), je pense qu'il peut y avoir, aujourd'hui encore, quelque utilité à rechercher comment la nouvelle doctrine a pu n'être pas comprise et de quelle manière elle doit être entendue.

Ce qui n'a pas été compris, c'est la nature et le rôle des forces centrifuges que Poinsot fait intervenir, et qui ne sont pas les mêmes que dans l'ancienne théorie.

Il nous suffira de considérer ici le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. Poinsot démontre par la Géométrie que ce mouvement a lieu, nécessairement, comme si le corps était attaché à un cône ayant son sommet au point fixe, qui roulerait, sans glisser, sur un autre cône de même sommet, fixe dans l'espace. C'est, on peut le dire, cette image même de la rotation du corps qui a donné lieu à un malentendu dans la partie dynamique de la question.

Dans la méthode analytique, pour déterminer la loi de ce mouvement, on considère que les forces capables de faire parcourir à chaque molécule dm l'espèce de roulette sphérique qu'elle décrit, peuvent se réduire à deux, savoir : une force centripète $-\frac{u^2}{\rho}dm$ dirigée vers le centre de courbure de cette trajectoire, et une force tangentielle $\frac{du}{dt}dm$, en appelant u la vitesse de cette molécule à l'époque t du mouvement et ρ le rayon de courbure. (Lorsqu'on

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XV, p. 63-76; 1856.

(**) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XV, p. 187-190; 1856.

rapporte le système à trois axes rectangulaires ox, oy, oz, la résultante de ces deux forces a pour composantes, suivant ces trois axes, $\frac{d^2x}{dt^2}dm$, $\frac{d^2y}{dt^2}dm$, $\frac{d^2z}{dt^2}dm$.) On suppose que cette force centripète et cette force tangentielle soient appliquées à la molécule dm pour la mouvoir, et on applique au corps, sur cette même molécule, une force centrifuge $+\frac{u^2}{\rho}dm$, et une force tangentielle $-\frac{du}{dt}dm$. L'ensemble de ces dernières forces, pour toutes les molécules du corps, doit par conséquent faire équilibre aux forces extérieures, et cette condition, qui est le principe même de d'Alembert, donne immédiatement les équations du problème (*).

Poinsot fait intervenir d'autres forces centrifuges. Il applique à chaque molécule dm une force centripète $-\frac{u^2}{r}dm$, r étant la distance de cette molécule à la ligne de contact des deux cônes, qui est l'axe *instantané* de rotation; et il applique en sens contraire une force $+\frac{u^2}{r}dm$, qu'il appelle la force centrifuge *née* de la rotation du corps autour de cet axe (**). Ces forces centri-

(*) Dans le cas d'un corps abandonné à lui-même, les forces centrifuges $+\frac{u^2}{\rho}dm$ et les forces tangentielles $-\frac{du}{dt}dm$ se font équilibre, et par conséquent les forces centrifuges sont alors absolument incapables d'imprimer au corps quelque mouvement que ce soit. Si l'on ne tenait pas compte des forces tangentielles, on serait conduit à des conséquences singulières dont j'ai moi-même donné un exemple dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville (1re série, t. V, p. 120-145; 1840) sans désigner expressément le travail auquel je fais allusion, mais en appelant l'attention sur la nature paradoxale de ces conséquences en termes assez explicites pour que l'on ne pût supposer que je prétendais les démontrer.

(**) *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, 1re série, t. XVI, p. 81; 1851.

fuges, jointes aux forces extérieures, impriment au corps une rotation infiniment petite, laquelle se compose avec l'axe de la rotation actuelle autour de l'axe instantané et fait varier l'axe et la grandeur de cette rotation. De sorte que, si l'on regarde le corps comme sollicité à chaque instant par ces seules forces, savoir les forces centrifuges qui viennent d'être définies et les forces extérieures, on devra arriver ainsi aux équations du mouvement. Et, en effet, on arrive sur-le-champ, de cette manière, aux équations d'Euler (*).

Poinsot raisonne comme si la chose était évidente. Les objections qui se sont produites, et l'hésitation des auteurs à énoncer un principe aussi simple, prouvent qu'une explication n'aurait pas été superflue.

La difficulté provient de ce que l'on suppose qu'il s'agit du mouvement même sans lequel le cône mobile *roule* sur le cône fixe; tandis que les forces introduites impliquent la décomposition de ce mouvement en deux autres.

Les forces centripètes $-\frac{u^3}{r}dm$ sont celles qui seraient nécessaires pour faire tourner le corps autour de la ligne de contact des deux cônes. Par conséquent il faut concevoir que de l'époque t à l'époque $t+dt$ le cône mobile tourne autour de cette ligne, *sans rouler sur le cône fixe,* qu'il devient *sécant,* et qu'en même temps il est ramené au contact, par l'effet des forces $\frac{u^2}{r}dm$ et des forces extérieures, suivant la ligne qui répond à l'époque $t+dt$, puisque telle serait alors la position de ce cône par l'effet des forces extérieures seules, sans l'adjonction des forces égales et contraires $-\frac{u^2}{r}dm$, $+\frac{u}{r}dm$. La rotation due

(*) *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, 1re série, t. XVI, p. 123-124; 1851.

aux forces centripètes est *uniforme*, et par suite il n'est pas besoin d'y faire intervenir des forces tangentielles comme dans la méthode rappelée ci-dessus, ni aucune autre force accélératrice. De sorte que les forces $+\frac{u^2}{r}dm$ et les forces extérieures sont en effet les seules forces accélératrices dont on ait à tenir compte pour déterminer la loi du mouvement.

On voit par là que les forces centrifuges de Poinsot ne sont pas celles qui naissent du mouvement tel qu'il le dépeint, mais celles qui animeraient les molécules du corps si le cône mobile, au lieu de continuer à rouler sur le cône fixe après l'époque t du mouvement, se mettait à tourner autour de la ligne de contact répondant à cette époque.

NOTE SUR LA SOMME DES n PREMIERS PRODUITS DE p NOMBRES ENTIERS CONSÉCUTIFS;

Par M. A. LAISANT,
Officier du génie.

Considérons les produits

$$1.2\ldots p,\quad 2.3\ldots(p+1),\quad 3.4\ldots(p+2),\ldots,$$
$$n(n+1)(n+p-1).$$

Il s'agit de trouver une formule donnant la somme de tous ces termes.

Considérant d'abord les deux premiers, nous avons

$$1.2\ldots p+2.3\ldots(p+1)$$
$$=2.3\ldots(p+1)\left(\frac{1}{p+1}+1\right)=\frac{2.3\ldots(p+1)(p+2)}{(p+1)}.$$

La somme des trois premiers produits s'obtiendra en ajoutant le troisième produit à la somme précédente. Ainsi nous aurons

$$\begin{aligned}
&1.2\ldots p + 2.3\ldots(p+1) + 3.4\ldots(p+2)\\
&\quad = \frac{2.3\ldots(p+1)(p+2)}{(p+1)} + 3.4\ldots(p+2)\\
&\quad = 3.4\ldots(p+2)\left(\frac{2}{p+1}+1\right) = \frac{3.4\ldots(p+2)(p+3)}{p+1}.
\end{aligned}$$

On verrait de même que la somme des quatre premiers produits est $\frac{4.5.6\ldots(p+4)}{p+1}$; celle des cinq premiers, $\frac{5.6\ldots(p+5)}{p+1}$. En général, il suffira, pour obtenir la somme demandée, d'ajouter au terme auquel on s'arrête un nouveau facteur, en suivant l'ordre consécutif des nombres entiers, et de diviser par $(p+1)$. Pour faire ressortir la généralité de cette loi, supposons-la vraie pour la somme des $(n-1)$ premiers termes, et nous l'établirons pour celle des n premiers.

Ainsi, par hypothèse,

$$\begin{aligned}
&1.2\ldots p + \ldots + (n-1)n(n+1)\ldots(n+p-2)\\
&\quad = \frac{(n-1)n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p+1};
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&1.2\ldots p + \ldots + (n-1)n\ldots(n+p-2)\\
&\qquad + n(n+1)\ldots(n+p-1)\\
&\quad = n(n+1)\ldots(n+p-1)\left(\frac{n-1}{p+1}+1\right)\\
&\quad = \frac{n(n+1)\ldots(n+p)}{p+1}.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve bien que la formule est générale (*).

(*) Un calcul semblable donne la limite de la somme des termes de la

NOTE SUR UN CARACTÈRE DE DIVISIBILITÉ;

PAR M. J.-CH. DUPAIN.

On a quelquefois besoin de reconnaître si un nombre N est divisible par un certain facteur p; il peut arriver que cette recherche soit pénible, tandis que la division de N par $p-1$ se ferait immédiatement de tête; supposons que cette division donne pour quotient Q et pour reste R, on aura

$$N=(p-1)Q+R \quad \text{ou} \quad N=pQ+R-Q.$$

---

série

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}+\frac{1}{2.3\ldots(p+1)}+\frac{1}{3.4\ldots(p+2)}+\ldots$$
$$+\frac{1}{n.(n+1)\ldots(n+p-1)}+\ldots.$$

En effet, on a

$$\frac{1}{1.2.3\ldots p}=\frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}-\frac{1}{2.3\ldots p}\right],$$

$$\frac{1}{2.3\ldots(p+1)}=\frac{1}{(p-1)}\left[\frac{1}{2.3\ldots p}-\frac{1}{3.4(p+1)}\right],$$

$$\frac{1}{3.4\ldots(p+2)}=\frac{1}{(p-1)}\left[\frac{1}{3.4\ldots(p+1)}-\frac{1}{4.5\ldots(p+2)}\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n(n+1)\ldots(n+p-1)}=\frac{1}{(p-1)}\left[\frac{1}{n.(n+1)\ldots(n+p-2)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}\right];$$

la somme des n premiers termes est, par conséquent, égale à

$$\frac{1}{(p-1)}\left[\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+p-1)}\right];$$

il en résulte que $\frac{1}{p-1}\times\frac{1}{1.2.3\ldots(p-1)}$ est la limite de la somme des termes de la série considérée. G.

Si $R - Q$ est divisible par p, le nombre N le sera aussi.

De même, si la division de N par $p + 1$ donnait pour quotient Q' et pour reste R', on aurait

$$N = (p+1)Q' + R' \quad \text{ou} \quad N = pQ' + Q' + R'.$$

Si $Q' + R'$ est divisible par p, le nombre N le sera aussi.

Ces remarques, dont je ne connais pas le premier auteur, peuvent être utiles.

Exemples :

$N = 310717, \ p = 601, \ Q = 517, \ R = 517, \ R - Q = 0;$

la division réussit.

$N = 27944, \ p = 499, \ Q' = 55, \ R' = 444, \ Q' + R' = 499;$

la division réussit.

Autre application. — 208569 est-il divisible par 37?

On sait que

$$37 \times 27 = 999,$$

on fera

$$p = 999;$$

alors

$$Q' = 208, \quad R' = 569, \quad Q' + R' = 777.$$

On essaye la division de 777 par 37, et comme elle réussit, le nombre proposé est divisible par 37.

Note. — De là une règle pour trouver le reste d'une division dans laquelle le diviseur est de la forme $10^n \pm 1$.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Questions 809 *et* 810

(voir p. 189);

PAR M. GEORGES DE VILLEPIN,
Élève en Mathématiques spéciales au collége Stanislas.

809. *Décrire un cercle qui rencontre trois droites données de manière que les cordes interceptées par ces droites sur ce cercle soient égales à une longueur donnée.*

Si l'on considère le cercle inscrit au triangle formé par les trois droites, O étant son centre, A, B, C les points de contact, et que de chaque côté des points de contact et sur les côtés du triangle on prenne des longueurs égales à la moitié de celle qui est donnée, les six points ainsi trouvés sont sur un cercle ayant son centre au point O, et qui est le cercle cherché. Comme d'ailleurs on peut encore considérer les trois cercles exinscrits, on voit que le problème admet quatre solutions.

Le cas où deux des lignes données sont parallèles se résoudrait exactement de la même manière, et celui où les trois droites sont parallèles doit être exclu, car une même circonférence ne peut intercepter sur trois parallèles des longueurs égales, à moins que deux d'entre elles ne se confondent, auquel cas le problème est indéterminé.

810. *Même problème, quand on remplace les trois droites par trois circonférences.*

Soient C_1, C_2, C_3, les centres des circonférences données. Le centre O du cercle cherché se trouve à égale distance des trois cordes interceptées, puisqu'elles sont égales. Si l'on décrit un cercle concentrique à C_1 et tangent à une corde quelconque inscrite dans C_1, égale à la longueur donnée, et qu'on répète la même construction pour les circonférences C_2, C_3, on obtient trois cercles C'_1, C'_2, C'_3 concentriques à C_1, C_2, C_3, tels, que le centre d'un cercle ω tangent à la fois à C'_1, C'_2, C'_3 sera le même que celui de la circonférence cherchée. Si donc, par le point de contact de C'_1 et de ω, on mène la tangente commune, les deux points d'intersection de cette droite avec le cercle C_1 seront des points du cercle cherché, et puisque son centre est celui du cercle ω, ce cercle est par là même facile à construire. Comme d'ailleurs le problème du cercle tangent à trois cercles donnés admet huit solutions, le problème proposé admettra aussi huit solutions.

On peut étendre au cas de l'espace ces questions qui deviennent alors :

Décrire une sphère qui rencontre quatre plans donnés de manière que les cercles interceptés par ces plans sur cette sphère soient égaux à un cercle donné.

Décrire une sphère qui rencontre quatre sphères données de façon que les quatre cercles d'intersection soient égaux à un cercle donné.

Ces questions se résolvent absolument de la même manière qu'en Géométrie plane, en remplaçant dans les solutions que j'ai données les mots *cercle* et *droite* par *sphère* et *plan*. D'ailleurs, le problème de mener une sphère tangente à quatre plans admettant huit solutions, la première des questions proposées admettra aussi huit solutions, et le problème de mener une sphère tangente à quatre sphères données admettant seize solutions, la seconde question proposée admettra le même nombre de solutions.

Note. — Même solution de MM. Aldacotche, étudiant à Metz; Pierre Desguin, élève de l'École des Mines à Liége; Gabriel Urdy, élève de l'École

Saint-Michel (à Saint-Étienne); Rejoie, Martinolli, Alexandre Veyret, élèves du collége Chaptal; L. Monange et D. Dussaq, élèves de M. Prouhet; Armand Dupommier et Auguste Kleine, élèves du lycée de Besançon; Honoré Pi, élève à l'École de Sorrèze.

Question 801;

PAR M. E. PELLET,
Élève au lycée de Nîmes.

Si $p_0, p_1, p_2, \ldots; q_0, q_1, q_2, \ldots,$ sont des nombres entiers tels, que $\frac{p_n}{q_n}$ ait une limite finie, ou nulle, la limite de la série

$$(1)\ \frac{p_0}{q_0} - \frac{p_1}{q_0 q_1} + \frac{p_2}{q_0 q_1 q_2} - \frac{p_3}{q_0 q_1 q_2 q_3} + \ldots + (-1)^n \frac{p_n}{q_0 q_1 q_2 \ldots q_n}$$

sera une quantité incommensurable.

(G.-C. DE MORGAN.)

Pour des valeurs assez voisines de sa limite, le rapport $\frac{p_n}{q_n}$ varie d'une manière continue : cela exige que les valeurs correspondantes de q_n soient très-grandes, puisque ce nombre q_n varie par sauts (*). Cela posé:

1° La série (1) est convergente.

En effet, ses termes sont alternativement positifs et négatifs, et, vers la limite de $\frac{p_n}{q_n}$, ils vont nécessairement en diminuant, puisqu'alors ils sont composés de deux facteurs dont l'un, $\frac{p_n}{q_n}$, varie très-peu, tandis que l'autre $\left(\frac{1}{q_0 q_1 q_2 \ldots q_{n-1}}\right)$ décroît rapidement.

(*) En attribuant à n une valeur suffisamment grande, la différence des rapports $\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, ou $\pm\left(\frac{p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n}{q_n q_{n+1}}\right)$, devient moindre que tout nombre donné; or, le numérateur de cette fraction est, en valeur absolue, au moins égal à l'unité; donc le dénominateur $q_n q_{n+1}$ tend vers l'infini.

2° La limite de la série (1) est incommensurable, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de nombre entier qui, multiplié par la limite de cette série, donne pour produit un nombre entier.

Multiplions par $(b.q_0q_1q_2\ldots q_{n-1})$ les termes de la série (1), b étant un nombre entier. Il en résultera une nouvelle série convergente

$$a+(-1)^n b\left[\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n+1}}{q_nq_{n+1}}+\frac{p_{n+2}}{q_nq_{n+1}q_{n+2}}-\ldots\right],$$

dans laquelle a désigne la somme des n premiers termes, qui est évidemment un nombre entier. Par conséquent, si le produit de b par la limite de la série (1) est un nombre entier, il en sera de même du produit

$$b\left[\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n+1}}{q_nq_{n+1}}+\frac{p_{n+2}}{q_nq_{n+1}q_{n+2}}-\ldots\right],$$

quel que soit n.

Or, d'après ce que j'ai dit en commençant, on peut, quel que soit b, choisir n de telle manière que : 1° $\frac{b.p_n}{q_n}$ ne soit pas un nombre entier (*) ; 2° $\frac{bp_{n+1}}{q_nq_{n+1}}$ soit moindre que la plus petite des différences qui existent entre $\frac{bp_n}{q_n}$ et un nombre entier. D'après cela, il est clair que

$$b\left[\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n+1}}{q_nq_{n+1}}+\frac{p_{n+2}}{q_nq_{n+1}q_{n+2}}-\ldots\right]$$

n'est pas un nombre entier, pour cette valeur de n, puis-

(*) Parmi les produits représentés par $\frac{b.p_n}{q_n}$, il y en a une infinité qui ne sont pas des nombres entiers, puisque leurs différences tendent vers zéro pour des valeurs de n suffisamment grandes.

que ce produit est compris entre les deux quantités

$$\frac{bp_n}{q_n} \quad \text{et} \quad b\left[\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_n q_{n+1}}\right]$$

dont la différence est $\dfrac{bp_{n+1}}{q_n q_{n+1}}$.

Donc, il n'y a pas de nombre entier qui, multiplié par la série (1), donne pour produit un nombre entier.

C. Q. F. D.

Note. — Une démonstration à peu près semblable nous a été adressée par M. Honoré Pi, élève en Mathématiques spéciales à l'École de Sorrèze (classe de M. Dumont).

Question 795;

PAR M. A. DE GROSSOUVRE,
Élève en Mathématiques spéciales au collége Stanislas.

Soient

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3.4} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots2n} + \ldots,$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{x}{1.2.3} + \frac{x^2}{1.2.3.4.5} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots(2n+1)} + \ldots,$$

on propose de démontrer qu'en faisant successivement

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{x}[\varphi(x) - \varphi_1(x)],$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{x}[\varphi_1(x) - 3\varphi_2(x)],$$

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{x}[\varphi_2(x) - 5\varphi_3(x)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\varphi_{i+2}(x) = \frac{1}{x}[\varphi_i(x) - (2i+1)\varphi_{i+1}(x)],$$

la fonction $\varphi_i(x)$ ne contiendra que des puissances positives de la variable, et d'en trouver l'expression.

(HERMITE.)

Nous pouvons poser

$$\varphi(x) = \sum \frac{x^n}{1.2\ldots 2n}$$

et

$$\varphi_1(x) = \sum \frac{x^n}{1.2\ldots(2n+1)}.$$

Dans ces deux formules, on ne peut pas supposer n négatif. Il faut en outre convenir que l'expression $1.2\ldots 2n$ se réduit à 1 pour $n = 0$.

En employant cette notation, on a

$$\varphi(x) - \varphi_1(x) = \sum \frac{2nx^n}{1.2\ldots(2n+1)}.$$

Si l'on fait $n = 0$, le coefficient de x^0 est nul; la quantité précédente est donc divisible par x; il faut en outre remarquer que d'après la formation même de cette expression on ne peut y supposer n négatif. Si l'on effectue la division par x, et si dans le résultat on change n en $n+1$, on a

$$\varphi_1(x) = \sum \frac{2(n+1)x^n}{1.2\ldots(2n+3)},$$

et on ne peut pas donner à n des valeurs négatives.

On trouverait de même

$$\varphi_3(x) = \sum \frac{2^2(n+1)(n+2)x^n}{1.2\ldots(2n+7)},$$

$$\varphi_4(x) = \sum \frac{2^3(n+1)(n+2)(n+3)x^n}{1.2\ldots(2n+9)}.$$

La forme de ces expressions conduit à écrire

$$(1)\qquad \varphi_{i+1}(x) = \sum \frac{2^i(n+1)(n+2)\ldots(n+i)x^n}{1.2.3\ldots(2n+2i+1)}.$$

Pour démontrer la généralité de cette formule, je suppose qu'on l'ait vérifiée jusqu'à un certain rang et je vais prouver qu'elle est encore vraie quand on y change i en $i+1$. En effet, d'après cette formule on a

$$\varphi_i(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{2^{i-1}(n+1)(n+2)\ldots(n+i-1)x^n}{1.2\ldots(2n+2i-1)},$$

et par suite

$$\varphi_i(x) - (2i+1)\varphi_{i+1}(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{2^{i+1}n(n+1)\ldots(n+i)x^n}{1.2\ldots(2n+2i-1)}.$$

Si l'on suppose $n=0$, le coefficient de x^0 est nul, ce qui montre que l'expression précédente est divisible par x, ou encore que l'on ne peut pas supposer n inférieur à 1. Par conséquent, si l'on divise par x et si l'on change dans le résultat n en $n+1$, on a

$$\varphi_{i+2}(x) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{2^{i+1}(n+1)(n+2)\ldots(n+i+1)x^n}{1.2\ldots(2n+2i+1)}.$$

Cette formule (1) est donc générale, ce qui prouve que $\varphi_i(x)$ ne contient que des puissances positives de x et donne en même temps la forme de cette fonction.

Note. — Solutions analogues de MM. Georges de Villepin, élève en Mathématiques spéciales au collége Stanislas; Driant, élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout); P. Mansion; F. Beillar, élève de Mathématiques spéciales; Welsch; A. Miniscloux; Paul Vivier, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Strasbourg; A. Laisant, capitaine du génie; E. M., lieutenant d'artillerie; E. Pellet, élève du lycée de Nîmes; Lucien Bignon, à Lima; de Virieu, professeur à Lyon.

Question 538

(voir t. XIX, p. 307);

PAR M. WELSCH,
Élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout).

Discuter la courbe $13y = p(25x - 12x^3)$.

Cette courbe passe par l'origine, car son équation est satisfaite pour $x = 0$, $y = 0$.

L'origine est un centre de la courbe, car l'équation ne change pas quand on y change x en $-x$ et y en $-y$. D'après cela, il y a un point d'inflexion à l'origine, ce que l'on peut voir aussi directement, car

$$y' = \frac{p}{13}(25 - 36x^2),$$

et

$$y'' = -\frac{72p}{13}x = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

Nous avons pour le coefficient angulaire d'une tangente quelconque

$$y' = \frac{p}{13}(25 - 36x^2).$$

A l'origine

$$y' = \frac{25p}{13}.$$

Les points pour lesquels l'ordonnée est *maxima* ou *minima* sont donnés par $y' = 0$, c'est-à-dire par $x^2 = \frac{25}{36}$, d'où

$$x = \pm\frac{5}{6},$$

et

$$y = \pm\frac{5p}{13.6}\left(25 - 12\frac{25}{36}\right) = \pm\frac{5p.25.2}{13.6.3} = \pm\frac{125p}{117}.$$

Le maximum a lieu pour $x = \frac{5}{6}$, et le minimum pour $x = -\frac{5}{6}$; ce qu'indique $y'' = -\frac{72p}{13}x$, qui est négative dans le premier cas, et positive dans le second.

Nous avons vu que le centre, qui est à l'origine, est un point d'inflexion; il n'y en a pas d'autre, car y'' n'est nul que pour $x = 0$.

Tels sont les points remarquables que présente la courbe; pour x réel, y l'est aussi, et n'a qu'une seule valeur; la courbe est donc continue et à branches infinies. Il n'y a ni points d'arrêt, ni points de rebroussement; il n'y a pas non plus d'asympote, car le rapport

$$\frac{y}{x} = p(25 - 12x^2)$$

ne tend pas vers une limite finie pour $x = \pm\infty$.

L'axe des x est rencontré par la courbe en trois points, pour lesquels on a

$$x = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 = \frac{25}{12},$$

ce qui donne l'origine

$$(x = 0, \quad y = 0),$$

et deux points symétriques par rapport à l'origine

$$\left(x = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}, \ y = 0\right) \quad \text{et} \quad \left(x = -\frac{5\sqrt{3}}{6}, \ y = 0\right).$$

Lorsque $x = 0$, $y = 0$; x croissant, y commence à croître, jusqu'à ce que $x = \frac{5}{6}$, atteint un maximum correspondant à cette valeur, puis décroît, s'annule pour $x = \frac{5\sqrt{3}}{6}$, puis devient négatif, et augmente indéfiniment en valeur absolue. Lorsque x est très-grand,

$$\frac{y}{x} = p(25 - 12x^2)$$

est aussi très-grand en valeur absolue, ce qui indique que l'ordonnée croît plus rapidement que l'abscisse.

Le coefficient angulaire de la tangente à l'origine est, avons-nous dit, $\frac{25p}{13}$.

Cherchons les tangentes aux deux autres points où l'axe des x rencontre la courbe.

Pour $x = \pm \frac{5\sqrt{3}}{6}$,

$$y' = \frac{p}{13}(25 - 36x^2) = \frac{p}{13}(25 - 75) = -\frac{50p}{13};$$

les ordonnées, à l'origine, des deux tangentes considérées sont, d'après les équations

$$y = -\frac{50p}{13}\left(x \mp \frac{5\sqrt{3}}{6}\right):$$

$$b = \pm \frac{50p.5\sqrt{3}}{13.6} = \pm \frac{125p\sqrt{3}}{39}.$$

La courbe étant symétrique par rapport à l'origine, la branche de gauche est identique à celle de droite, sauf qu'elle est renversée. On peut donc considérer sa discussion comme terminée.

N. B. — Cette courbe représentant, d'après M. Édouard [illegible] la variation de l'attraction terrestre quand on [illegible] dans le sein de la terre, il n'y a lieu de considérer que les valeurs de x positives et inférieures à 1, le rayon de la terre étant pris pour unité.

On voit que l'attraction est nulle au centre, comme d'ailleurs cela est évident, puis elle croît, passe par un maximum et décroît jusqu'à la surface. L'attraction de la terre est donc moindre à sa surface qu'à une certaine profondeur, et elle atteint son maximum quand la distance n'est plus que les $\frac{5}{6}$ du rayon terrestre.

On voit qu'à la surface de la terre, où $x = 1$, l'attraction $y = p$, tandis que pour $x = \frac{5}{6}$,

$$y = \frac{125 p}{117}.$$

Remarque. — Dans cette courbe, comme dans toute cubique, les tangentes coupent la courbe, car toute tangente coupe la courbe en deux points confondus en un seul, et il faut qu'elle la coupe en un troisième, en exceptant les points d'inflexion qui sont des points triples.

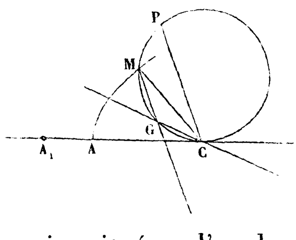
Note. — Autres solutions par MM. Driant, du lycée de Metz, et de Virieu, professeur à Lyon. Ce dernier trouve que les diamètres de la courbe sont des paraboles cubiques dont l'équation est de la forme $y = Ax + Bx^2$.

Questions 799 *et* 800;

PAR M. ROUQUET,
Professeur au lycée de Pau.

799. *L'enveloppe des droites coupant une cycloïde sous un angle constant est une cycloïde égale.*

FIG. 1.



Soient M un point situé sur l'un des arcs de cycloïde dont le point de départ est en A ; C le point de contact du cercle générateur dans la position de ce cercle qui correspond au point M, en sorte que arc CM = AC, et que CM est normale à la cycloïde.

Par le point M menons la droite MG qui coupe la cycloïde sous l'angle donné θ. L'angle que fait cette droite avec la normale CM étant le complément de θ, l'arc CG du cercle générateur compris entre le point C et la ligne MG est constant, et compté toujours dans le même sens à partir du point C.

Cela posé, menons par le point C une droite CP parallèle à GM et rencontrant la circonférence en P. Le lieu du point P est une cycloïde égale à la première; car si l'on prend sur la base de la cycloïde, à partir du point A et dans un sens convenable, une longueur égale à MP ou à CG, on aura

$$\text{arc } CP = CA_1.$$

De plus, la droite CP étant normale à cette cycloïde, l'enveloppe des lignes telles que CP est, d'après une propriété connue, une cycloïde égale à la première.

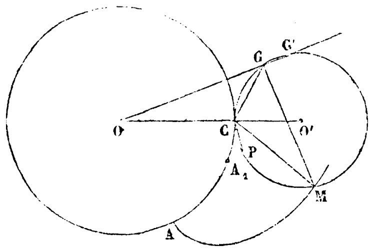
D'un autre côté, la droite CG étant constante en grandeur et en direction, il est évident que l'enveloppe des lignes analogues à MG n'est autre que l'enveloppe des droites CP, que l'on aurait transportée parallèlement à elle-même, de manière à lui faire parcourir dans la direction fixe CG une longueur égale à cette corde.

L'enveloppe demandée est donc une cycloïde égale à la cycloïde proposée.

800. *L'enveloppe des droites coupant une épicycloïde sous un angle constant est une épicycloïde semblable.*

Soient O le centre du cercle fixe, O' le centre du cercle mobile dans l'une de ses positions, M le point correspondant de la courbe, en sorte que C étant le point de contact des deux cercles, et A le point de départ de l'arc d'épicycloïde sur lequel est situé le point M, l'arc CM égale

Fig. 2.



l'arc CA, et CM est normale à la courbe au point M.

Menons par le point M la ligne MG qui coupe l'épicycloïde sous l'angle donné θ. L'angle CMG étant le complément de θ intercepte sur le cercle O' un arc CG constant en grandeur et compté toujours dans le même sens à partir du point C. Les éléments du triangle OCG ont dès lors des valeurs indépendantes de la position du point M sur la courbe, et la droite OG rencontre par conséquent le cercle O' en un second point G' tel, que l'arc CG' est aussi constant.

Cela posé, prenons à partir du point M, sur le cercle générateur et dans un sens convenable, un arc MP égal à l'arc CG'. L'angle OCP sera égal à l'angle OGM, comme ayant même mesure.

D'un autre côté, le lieu géométrique du point P est une épicycloïde égale à la première, dont le point de départ A_1 est situé sur le cercle fixe O, à une distance AA_1 du point A égale à MP ou à CG'; car

$$CP = CM \pm MP = CA \pm AA_1 = CA_1.$$

CP étant normale à cette épicycloïde, l'enveloppe des lignes telles que CP est, d'après une propriété connue, une épicycloïde semblable à la première.

Si l'on fait tourner maintenant la figure formée par les droites CP, autour du point O, d'un angle égal à l'angle constant COG, chacune de ces droites deviendra parallèle à la droite qui lui correspond dans le système formé par les droites MG, puisque l'on a constamment

$$\widehat{OCP} = \widehat{OGM}.$$

En outre, le rapport $\frac{OC}{OG}$ étant constant, il en résulte que les deux systèmes seront devenus homothétiques par rapport au centre O.

Par suite, l'enveloppe des droites MG est une épicycloïde semblable à l'épicycloïde enveloppe des droites CP, et semblable par conséquent à l'épicycloïde donnée.

Note. — Les questions 799 et 800 ont aussi été résolues au moyen de constructions graphiques par MM. Driant, élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout); Gabriel Lippmann, élève en Mathématiques spéciales au lycée Napoléon (classe de M. Lemonnier); Joseph Morel, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble; E. Muzeau, lieutenant d'artillerie; Laisant, capitaine du génie; J.-M. Coindre, du lycée Louis-le-Grand (élève de M. Bouquet).

Les mêmes questions ont été résolues au moyen de calculs par MM. E. Muzeau, lieutenant d'artillerie; C. Laduron, élève à l'École des Mines de Liége; A. Annequin, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble; E. Pellet, élève au lycée de Nîmes; Morel, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

Question 813

(voir t. VI, p. 288);

PAR M. DRIANT,
Élève du lycée de Metz (classe de M. Ribout).

Démontrer les formules :

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16},$$

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{1}{16}.$$

(LINDMANN.)

Considérons la première égalité : on y connaît la valeur de $\sin 60^\circ$ qui est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Je vais chercher à évaluer le produit

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$$

en fonction de ce sinus.

Or, $20^\circ = \frac{60^\circ}{3}$; je remarque alors que si je cherchais à faire la trisection de l'angle de 60 degrés, l'équation du troisième degré que j'obtiendrais aurait pour racines

$$\sin\frac{60^\circ}{3}, \quad \sin\frac{60^\circ + 360^\circ}{3}, \quad \sin\frac{60^\circ + 2.360^\circ}{3},$$

ou

$$\sin 20^\circ, \quad \sin 140^\circ = \sin 40^\circ, \quad \sin 260^\circ = -\sin 80^\circ.$$

Mais cette équation du troisième degré est, comme on le sait,

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{2\times 4} = 0;$$

on a donc

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8},$$

et par suite

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}.$$

(C. Q. F. D.)

La seconde égalité se démontre de la même manière. On trouve aussi par la même marche les deux relations

$$\operatorname{tang} 20^\circ \operatorname{tang} 40^\circ \operatorname{tang} 60^\circ \operatorname{tang} 80^\circ = 3,$$

$$\cot 20^\circ \cot 40^\circ \cot 60^\circ \cot 80^\circ = \frac{1}{3},$$

qui se déduisent d'ailleurs aisément des deux premières.

Note. — Même solution de MM. Laisant, capitaine du génie; de Virieu, professeur à Lyon; Petiot et Clai, élèves du lycée de Dijon; Aldacotche et Welsch, du lycée de Metz; Berquet, Jouffray et Sandier, du lycée de Lyon; Armanet, élève de l'École Saint-Michel à Saint-Étienne; Aribert, élève à Sainte-Barbe.

Nous avons la douleur d'annoncer une bien triste nouvelle : notre excellent collaborateur EUGÈNE PROUHET n'existe plus ! Une maladie que rien ne faisait prévoir l'a, en quelques heures, enlevé à sa famille et à ses nombreux amis.

Nos regrets seront partagés par tous ceux qui l'ont connu, car il était impossible de le connaître sans l'aimer. Doué d'un caractère affable, obligeant, d'une modestie peu commune, il possédait toutes les qualités qui commandent l'attachement et qui rendent l'amitié durable.

Comme géomètre, il a souvent fait preuve d'une grande sagacité, et toujours d'une rectitude de jugement remarquable.

Ses *analyses*, ses *comptes rendus* témoignent du soin consciencieux avec lequel il appréciait les ouvrages soumis à son examen.

Eugène Prouhet ne sera pas de longtemps oublié, il a au souvenir des titres qui ne sont pas vulgaires : ce sont ceux d'un homme de [illegible] et d'un savant de bon sens.

G.

MOUVEMENTS RELATIFS A LA SURFACE DE LA TERRE

(voir p. 97);

PAR M. C.-E. PAGE,
Professeur à l'Ecole d'Artillerie de Vincennes.

Mouvement d'un corps lancé verticalement de bas en haut.

Soit V la vitesse initiale. Nous aurons

$$U = 0, \quad U_1 = V.\cos\lambda, \quad U_2 = V.\sin\lambda;$$

les équations (A) deviennent

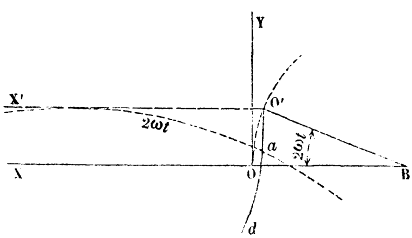
$$x = \frac{g.\cos\lambda}{4.\omega^2}(2.\omega.t - \sin 2.\omega.t) + \frac{V.\cos\lambda}{2.\omega}(\cos 2.\omega.t - 1),$$

$$y = \frac{g.\cos\lambda}{4.\omega^2}(\cos 2.\omega.t - 1) + \frac{V.\cos\lambda}{2.\omega}\cdot\sin 2.\omega.t,$$

$$z = V.\sin\lambda.t - \frac{1}{2}\cdot g.\sin\lambda.t^2.$$

Au moyen des deux premières, nous pouvons construire

FIG. 1.



la projection de la trajectoirc relative sur le plan du parallèle.

Pour cela, prenons sur l'axe OX la distance

$$OB = -\frac{V.\cos\lambda}{2.\omega};$$

faisons tourner le rayon BO autour du point B avec la vitesse angulaire $2.\omega$, et en sens contraire du mouvement de la terre.

Au bout du temps t, les coordonnées x' et y' du point O' occupé par l'extrémité du rayon BO seront

$$x' = \frac{V.\cos\lambda}{2.\omega}.(\cos 2.\omega.t - 1), \quad y' = \frac{V.\cos\lambda}{2.\omega}.\sin 2.\omega.t.$$

Supposons que le point O' entraîne avec lui une droite O' X' assujettie à rester constamment parallèle à l'axe OX, et que la circonférence dont le rayon est égal à

$$\frac{g.\cos\lambda}{4.\omega^2}$$

roule sur cette droite O' X' avec la vitesse angulaire $2.\omega$. Un point a, fixe sur la circonférence et dont la position initiale coïncidait avec l'origine, décrit, par rapport à la droite O'X', la cycloïde O'ad. Au bout du temps t, les coordonnées du point a sont justement les mêmes que les coordonnées x et y du mobile. Donc, la courbe décrite par le point a est la projection de la trajectoire relative sur le plan du parallèle.

Cette construction donne exactement le mouvement du projectile perpendiculairement au plan du méridien. On voit qu'il est d'abord dévié vers l'ouest, qu'il atteint un écart maximum, puis qu'il revient vers le méridien et finit par passer à l'est.

Pour déterminer le temps t correspondant à l'écart maximum, il faut faire

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{g.\cos\lambda}{2.\omega}(1-\cos 2.\omega.t) = \mathrm{V}.\cos\lambda.\sin 2.\omega.t,$$

d'où

$$\frac{\operatorname{tang}\omega.t}{\omega} = \frac{2.\mathrm{V}}{g}.$$

Tant que l'arc $\omega.t$ reste très-petit, la valeur de t ne diffère pas sensiblement de

$$t = \frac{2.\mathrm{V}}{g};$$

c'est justement le temps que le mobile mettrait à retomber sur le plan horizontal dans l'hypothèse de l'immobilité de la terre.

L'arc $2.\omega.t$ restant toujours très-petit, on peut calculer les valeurs de x et de y en développant et négligeant les termes qui contiennent le cube de ω. On a

$$x = -\mathrm{V}.\cos\lambda.\omega.t^2 + \frac{g.\cos\lambda}{3}.\omega^2.t^3,$$

$$y = \mathrm{V}.\cos\lambda.t - \frac{1}{2}g.\cos\lambda.t^2 - \frac{2}{3}\mathrm{V}.\cos\lambda.\omega^2.t^3$$
$$+ \frac{g.\cos\lambda}{2.3}.\omega^2.t^4,$$

$$z = \mathrm{V}.\sin.\lambda.t - \frac{1}{2}g\sin\lambda.t^2.$$

En représentant par z_1 la hauteur du mobile au-dessus du plan horizontal, par y_1 la déviation dans le sens du méridien, nous aurons

$$y_1 = y.\sin\lambda - z.\cos\lambda \quad \text{et} \quad z_1 = y.\cos\lambda + z.\sin\lambda,$$

d'où

$$y_1 = \frac{\sin\lambda.\cos\lambda.\omega^2.t^3}{2.3}(g.t - 4.\mathrm{V}),$$

$$z_1 = \mathrm{V}.t - \frac{1}{2}g.t^2 + \frac{\cos^2\lambda.\omega^2.t^3}{2.3}(g.t - 4.\mathrm{V}),$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{2}{3} \cdot \sin\lambda . \cos\lambda . \omega^2 . t^2 (g.t - 3.V),$$

$$\frac{dz_1}{dt} = V - g.t + \frac{2}{3} \cdot \cos^2\lambda . \omega^2 . t^2 (g.t - 3.V).$$

En posant

$$\frac{dz_1}{dt} = 0,$$

nous déterminerons le temps correspondant à la plus grande hauteur. Ce temps est un peu moindre que dans l'hypothèse de l'immobilité, mais la différence est excessivement faible; elle est toujours moindre que

$$\frac{4}{3} \cdot \omega^2 . \cos^2\lambda \cdot \frac{V^2}{g^2} \cdot t = 0{,}0000000071 . \cos^2\lambda \cdot \frac{V^2}{g^2} \cdot t.$$

Ainsi, sous la latitude de Paris, et pour une vitesse initiale de 500 mètres, la différence serait moindre que

$$0{,}0000049 . 1''.$$

On peut donc sans erreur sensible prendre

$$t = \frac{V}{g}$$

pour le temps que le projectile met à monter et pour celui qu'il met à redescendre.

En mettant cette valeur de t dans l'expression de z_1, on trouve, pour la hauteur h à laquelle le projectile s'élève,

$$h = \frac{V^2}{2g}\left(1 - \omega^2 . \cos^2\lambda \, \frac{V^2}{g}\right);$$

en représentant par H la hauteur à laquelle il s'élèverait dans l'hypothèse de l'immobilité, on a

$$\begin{aligned} h &= H\,(1 - \omega^2 . \cos^2\lambda . 2 . H) \\ &= H\,(1 - 0{,}00000010658 . \cos^2\lambda . H). \end{aligned}$$

On voit que la différence est tout à fait insignifiante.

L'expression de y_1 fait voir que, parallèlement au plan méridien, la déviation a lieu vers le nord, non-seulement pendant tout le temps que le projectile reste au-dessus du plan horizontal, mais encore lorsqu'il est tombé au-dessous de ce plan et pendant un temps justement égal à celui pendant lequel il est resté au-dessus.

Au point le plus élevé, la déviation vers le nord est

$$\frac{4}{3} \cdot \omega^2 . \sin\lambda . \cos\lambda \cdot \frac{H^2}{g};$$

elle devient double quand le projectile retombe sur le plan horizontal.

Si, dans l'expression

$$x = -\frac{\cos\lambda . \omega . t^2}{3} (3 . V - g . t),$$

on fait

$$V = gt,$$

on trouve pour la déviation d, correspondant au point le plus élevé,

$$d = -\frac{2}{3} \cdot g . \cos\lambda . \omega . t^3 = -\frac{4}{3} \cdot \omega \cos\lambda . H \cdot \sqrt{\frac{2 . H}{g}}.$$

Cette déviation devient double quand le projectile retombe sur le plan horizontal.

En résumé, quand un projectile est lancé verticalement de bas en haut, son mouvement vertical ne diffère pas sensiblement de celui qui aurait lieu dans l'hypothèse de l'immobilité de la terre. La déviation parallèlement au méridien est dirigée vers le nord, mais elle est à peine appréciable; la déviation perpendiculaire au méridien et dirigée vers l'ouest est seule assez sensible.

Sous la latitude de Paris, un corps lancé verticalement avec une vitesse de 200 mètres s'élèverait à une hauteur de 2039 mètres, bien entendu en supposant la résistance de l'air nulle, et viendrait retomber sur le plan horizontal du côté de l'ouest, à la distance de $3^m,0515$ du point de départ.

Mouvement d'un corps lancé suivant une direction quelconque.

Reprenons les équations générales

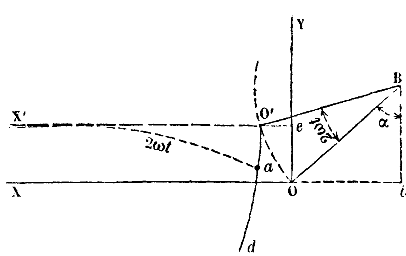
$$x = \frac{g.\cos\lambda}{4.\omega^2}(2.\omega.t - \sin 2.\omega.t) + \frac{U}{2.\omega}\cdot\sin 2.\omega.t$$
$$+ \frac{U_1}{2.\omega}(\cos 2.\omega.t - 1),$$

$$y = \frac{g.\cos\lambda}{4\ \omega^2}(\cos 2.\omega.t - 1) + \frac{U_1}{2.\omega}\cdot\sin 2.\omega.t$$
$$- \frac{U}{2.\omega}(\cos 2.\omega.t - 1),$$

$$z = U_2.t - \frac{1}{2}g.\sin\lambda.t^2.$$

Au moyen des deux premières, nous pouvons construire la projection de la trajectoire relative sur le plan du parallèle. Soit V_1 la composante de la vitesse initiale dans

Fig. 2.



ce plan. Par le point O menons la droite OB perpendiculaire à la direction de la vitesse V_1 et dirigée vers la droite de cette vitesse; prenons

$$OB = \frac{V}{2.\omega};$$

les coordonnées du point B sont

$$Ob = \frac{U_1}{2.\omega} \quad \text{et} \quad bB = \frac{U}{2.\omega}.$$

Faisons tourner le rayon BO autour du point B avec la vitesse angulaire $2.\omega$ et en sens contraire du mouvement de la terre.

Au bout du temps t, les coordonnées du point O′ occupé par l'extrémité du rayon BO seront

$$O'e = \frac{U}{2.\omega} \cdot \sin 2.\omega.t + \frac{U_1}{2.\omega} \cdot (\cos 2.\omega.t - 1),$$

$$Oe = \frac{U_1}{2.\omega} \cdot \sin 2.\omega.t - \frac{U}{2.\omega} \cdot (\cos 2.\omega.t - 1).$$

En effet,

$$O'e = OB.\sin(\alpha + 2.\omega.t) - OB.\sin\alpha,$$

$$Oe = OB.\cos\alpha - OB.\cos(\alpha + 2.\omega.t),$$

et

$$OB.\sin\alpha = \frac{U_1}{2.\omega}, \quad OB.\cos\alpha = \frac{U}{2.\omega}.$$

En tournant autour du point B, l'extrémité du rayon BO entraîne dans son mouvement la droite O′X′ assujettie à rester constamment parallèle à l'axe OX, et la circonférence dont le rayon est

$$\frac{g.\cos\lambda}{4.\omega^2}$$

roule sur la droite O′X′ avec la vitesse angulaire 2ω. Un point a, fixe sur cette circonférence et dont la position initiale coïncidait avec l'origine, décrit la cycloïde O′ad par rapport à la droite mobile O′X′. Au bout du temps t, les coordonnées du point a sont les mêmes que les coordonnées du mobile; donc le point a, dans son mouvement, décrit la projection de la trajectoire relative sur le plan du parallèle.

Cette construction donne exactement le mouvement du projectile perpendiculairement au plan du méridien. Pour avoir le mouvement dans le sens du méridien, il faudrait construire la projection de la trajectoire relative sur le plan horizontal; on en déduirait la discussion complète du problème, mais cette discussion rigoureuse serait extrêmement longue. On obtient une exactitude bien suffisante en développant en série et négligeant les termes qui contiennent le carré de ω. On a

$$x = \mathrm{U}\,.\,t - \mathrm{U}_1.\omega\,.\,t^2 + \frac{1}{3}\cdot g\,.\cos\lambda\,.\,\omega\,.\,t^3,$$

$$y = \mathrm{U}_1.t + \mathrm{U}\,.\,\omega\,.\,t^2 - \frac{1}{2}\cdot g\,.\cos\lambda\,.\,t^2,$$

$$z = \mathrm{U}_2.t - \frac{1}{2}\cdot g\,.\sin\lambda\,.\,t^2.$$

En représentant par :

V la vitesse initiale;

φ l'angle de tir, c'est-à-dire l'angle que la direction de la vitesse initiale fait avec le plan horizontal;

a l'angle que le plan de tir fait avec le plan méridien, cet angle étant compté de droite à gauche, on a

$$\mathrm{U} = \mathrm{V}.\cos\varphi.\sin a,$$
$$\mathrm{U}_1 = \mathrm{V}.\cos\varphi.\cos a.\sin\lambda + \mathrm{V}.\sin\varphi.\cos\lambda,$$
$$\mathrm{U}_2 = \mathrm{V}.\sin\varphi.\sin\lambda - \mathrm{V}.\cos\varphi.\cos a.\cos\lambda.$$

En transformant les axes et prenant :

L'axe OZ_1 dirigé suivant la verticale en sens contraire de la pesanteur;

L'axe OY_1 dirigé suivant la trace horizontale du plan de tir, dans le sens de la vitesse $V\cos\varphi$;

L'axe OX_1 à gauche du plan de tir,

On a

$$x_1 = x.\cos a - y.\sin a.\sin\lambda + z.\sin a.\cos\lambda,$$
$$y_1 = x.\sin a + y.\sin\lambda.\cos a - z.\cos\lambda.\cos a,$$
$$z_1 = y.\cos\lambda + z.\sin\lambda;$$

par suite,

$$x_1 = \omega.t^2.\frac{\cos a.\cos\lambda}{3}(g.t - 3.V.\sin\varphi) - \omega.t^2.V.\cos\varphi.\sin\lambda,$$

$$y_1 = V.\cos\varphi.t + \omega.t^2.\frac{\sin a.\cos\lambda}{3}(g.t - 3.V.\sin\varphi),$$

$$z_1 = V.\sin\varphi.t + \frac{t^2}{2}(2.\omega.V.\cos\varphi.\cos\lambda.\sin a - g).$$

En posant $z_1 = 0$, nous déterminerons la durée t_1 correspondant à la portée horizontale. On trouve

$$t_1 = \frac{2.V.\sin\varphi}{(g - 2.\omega.V.\cos\varphi.\sin a.\cos\lambda)}.$$

Quand le tir est dirigé dans le sens du méridien,

$$\sin a = 0;$$

par conséquent, la durée du trajet est exactement la même que dans l'hypothèse de l'immobilité de la terre.

Cette durée est un peu augmentée quand le tir est dirigé vers l'est et un peu diminuée quand il est dirigé vers l'ouest; mais, dans tous les cas, la différence est très-faible, de sorte qu'on peut sans erreur sensible prendre

$$t_1 = \frac{2.V.\sin\varphi}{g}$$

pour la durée du trajet correspondant à la portée horizontale.

En mettant cette valeur dans l'expression de y_1, on voit que, suivant la direction méridienne, la portée horizontale est la même que dans l'hypothèse de l'immobilité, et qu'elle est un peu augmentée ou diminuée suivant que le tir est dirigé vers l'ouest ou vers l'est.

Pour déterminer l'écart perpendiculaire au plan de tir correspondant à la portée horizontale, il faut mettre la valeur de t_1 dans l'expression de x_1; en représentant l'écart par D, on a

$$D = -\frac{4}{3}\cdot\omega.\cos\lambda\cdot\frac{V^3.\sin^3\varphi}{g^2}\left(\frac{3.\tang\lambda}{\tang\varphi}+\cos a\right).$$

Tant que tang φ reste moindre que $3.\tang\lambda$, la quantité entre parenthèses ne peut pas être rendue négative; par conséquent la valeur de D reste négative, ce qui fait voir que l'écart latéral a lieu à droite du plan de tir. Cet écart atteint sa plus grande valeur pour $\cos a = +1$, c'est-à-dire quand le tir est dirigé dans le plan méridien et du nord au sud; il devient un minimum, quand le tir est dirigé du sud au nord.

Lorsque $\tang\varphi$ devient plus grand que $3.\tang\lambda$, on peut déterminer les valeurs négatives de $\cos a$ qui rendent négative la quantité entre parenthèses; la déviation latérale se fait, dans ce cas, à gauche du plan de tir.

Sous l'équateur, la valeur de D devient

$$D = -\frac{4}{3}\cdot\omega\cdot\frac{V^3.\sin^3\varphi}{g^2}\cdot\cos a,$$

ce qui fait voir que la déviation a lieu vers la droite quand le tir est dirigé du nord au sud; qu'elle a lieu vers la gauche quand le tir est dirigé du sud au nord, et enfin qu'elle est nulle quand le tir est perpendiculaire au méridien.

En supposant la latitude de 45 degrés, l'angle de tir de

45 degrés, la vitesse initiale de 500 mètres, on trouve, en faisant la résistance de l'air nulle, que la portée horizontale serait de 25484 mètres; que la déviation à droite serait de $25^m,20$ dans le cas où le tir serait dirigé dans le plan méridien et du nord vers le sud; que cette déviation à droite ne serait que de $12^m,60$ dans le cas où le tir serait dirigé du sud vers le nord.

Limite de l'écart latéral en tenant compte de la résistance de l'air.

Dans tout ce qui précède, nous avons fait abstraction de la résistance de l'air. Lorsqu'on veut tenir compte de cette résistance, les calculs deviennent beaucoup plus compliqués; nous nous bornerons à indiquer la limite des écarts latéraux.

La résistance de l'air tend toujours à diminuer la vitesse du projectile; de sorte que pour le même angle de tir, pour la même vitesse initiale et au bout du même temps, le chemin parcouru suivant une direction quelconque est nécessairement moindre dans l'air qu'il ne le serait dans le vide.

L'expression

$$x_1 = -\omega . t^2 \left[\mathrm{V}.\cos\varphi.\sin\lambda + \frac{\cos a.\cos\lambda}{3}(3.\mathrm{V}.\sin\varphi - g.t) \right]$$

donne le chemin parcouru par le projectile perpendiculairement au plan de tir, au bout du temps t, dans l'hypothèse du vide. L'écart latéral calculé au moyen de cette formule est donc supérieur à celui qui a lieu dans l'air au bout du même temps. Comme la composante de la résistance perpendiculaire au plan de tir est toujours très-faible, l'écart calculé ne diffère pas beaucoup de l'écart réel.

QUESTIONS DE LICENCE ;

PAR M. GIGON,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

I. *Problème d'analyse proposé pour la licence ès sciences mathématiques* (Paris, session de juillet 1867).

II. *Intégration d'une classe particulière d'équations différentielles simultanées.*

III. *Applications.*

I.

PROBLÈME. — *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$(y+z)\frac{dz}{dx}+(z+x)\frac{dz}{dy}=x+y. \tag{1}$$

SOLUTION. — Cette question se ramène, comme on sait, à l'intégration des deux équations simultanées

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y}, \tag{2}$$

lesquelles, mises sous la forme suivante :

$$\frac{dx-dz}{x-z}=\frac{dy-dz}{y-z}=-\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)},$$

s'intègrent immédiatement ; et l'on trouve alors, C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires, les deux intégrales des équations (2), savoir :

$$\left\{\begin{aligned}&(x-z)(x+y+z)^{\frac{1}{2}}=C_1,\\&(y-z)(x+y+z)^{\frac{1}{2}}=C_2.\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Enfin, en appelant Φ une fonction arbitraire, la solution la plus générale de la proposée (1) sera

$$\Phi\left[(x-z)(x+y+z)^{\frac{1}{2}},\quad (y-z)(x+y+z)^{\frac{4}{2}}\right]=0.$$

Remarque. — Le procédé très-simple qui a fourni les intégrales du système proposé (2) réussit dans certains cas particuliers analogues à celui qu'on vient de traiter.

Mais il existe plusieurs autres moyens de parvenir aux intégrales (3). En effet, les équations (2), qui ne sont pas linéaires, peuvent être remplacées par un système équivalent de trois équations linéaires; il suffit de poser $\frac{dx}{y+z}=dt$, en désignant par t une variable auxiliaire qu'on prend pour variable indépendante.

La question est alors ramenée à trouver les trois intégrales des équations linéaires simultanées

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=y+z,\\ \frac{dy}{dt}&=z+x,\\ \frac{dz}{dt}&=x+y.\end{aligned}\right.$$

Quand on aura trouvé d'une manière quelconque ces trois intégrales, on en déduira, par l'élimination de t, deux intégrales identiques ou équivalentes à (3). On pourra même, si l'on veut, se dispenser de ce calcul en conservant une équation de plus et en maintenant dans les formules la variable auxiliaire t.

Or, on sait que l'intégration des équations (4) peut se faire au moyen des méthodes générales (élimination ou méthode de d'Alembert.)

On peut encore y parvenir par le procédé suivant.

II.

Intégration d'un système d'équations différentielles simultanées en nombre quelconque, du premier ordre, linéaires et circulairement symétriques par rapport à toutes les variables dépendantes.

J'appelle système d'équations différentielles circulairement symétriques par rapport aux variables dépendantes, un système qui ne change pas quand on effectue sur ces variables une permutation circulaire.

Soit proposé un tel système (S) composé des n équations suivantes dans lesquelles t est la variable indépendante; $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, des variables fonctions de t; a, b, $c, \ldots, h$, q, r des coefficients numériques quelconques.

$$
(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{dx_1}{dt} = ax_1 + bx_2 + cx_3 + \ldots + hx_{n-2} + qx_{n-1} + rx_n, \\[2mm]
\dfrac{dx_2}{dt} = ax_2 + bx_3 + cx_4 + \ldots + hx_{n-1} + qx_n \quad + rx_1, \\[2mm]
\dfrac{dx_3}{dt} = ax_3 + bx_4 + cx_5 + \ldots + hx_n \quad + qx_1 \quad + rx_2, \\[2mm]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\[2mm]
\dfrac{dx_{n-2}}{dt} = ax_{n-2} + bx_{n-1} + cx_n + \ldots + hx_{n-5} + qx_{n-4} + rx_{n-3}, \\[2mm]
\dfrac{dx_{n-1}}{dt} = ax_{n-1} + bx_n \quad + cx_1 + \ldots + hx_{n-4} + qx_{n-3} + rx_{n-2}, \\[2mm]
\dfrac{dx_n}{dt} = ax_n \quad + bx_1 \quad + cx_2 + \ldots + hx_{n-3} + qx_{n-2} + rx_{n-1}.
\end{array}\right.
$$

Je considère les n racines de l'équation binôme

$$X^n = 1;$$

λ désignant la racine imaginaire $\cos\dfrac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\dfrac{2\pi}{n}$, on sait que ces n racines, toutes différentes entre elles, s'obtiennent en élevant successivement λ à la première, à la deuxième,..., à la $n^{ième}$ puissance; elles forment la suite

$$\lambda,\ \lambda^2,\ \lambda^3,\ldots,\ \lambda^{n-1},\ \lambda^n.$$

Si n est pair, l'équation binôme admet deux racines réelles, $\lambda^n = 1$ et $\lambda^{\frac{n}{2}} = -1$; si n est impair, elle n'admet qu'une racine réelle $\lambda^n = 1$. Toutes les autres racines sont imaginaires et conjuguées deux à deux; λ^p désignant une quelconque d'entre elles, sa conjuguée est λ^{n-p}.

Cela étant, je puis obtenir les n intégrales du système (S) de la manière suivante :

Premièrement, j'ajoute ensemble toutes les équations (S), j'intègre l'équation résultante, et je trouve, en désignant par la lettre e la base des logarithmes népériens et par K_1 une constante arbitraire, une première intégrale

$$(5)\quad K_1 = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)\, e^{-(a+b+c+\ldots+q+r)t}.$$

En second lieu, mais dans le cas seulement où n est pair, et par conséquent où l'équation $X^n = 1$ admet la racine -1, je multiplie les équations (S), en commençant par la première, chacune respectivement par un des termes de la suite

$$(-1),\quad (-1)^2,\quad (-1)^3,\ldots,\quad (-1)^n,$$

c'est-à-dire par

$$-1,\quad +1,\quad -1,\ldots,\quad +1;$$

j'ajoute les résultats, j'intègre, et, K_2 désignant une constante arbitraire, j'obtiens une seconde intégrale

$$(6)\quad K_2 = (x_1 - x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} - x_n)\, e^{-(a-b+c+\ldots+q-r)t}.$$

Troisièmement, je prends une des racines imaginaires considérées ci-dessus, λ^p par exemple, p étant $< \frac{n}{2}$; je forme la suite

$$(a) \qquad \lambda^p, \quad \lambda^{2p}, \quad \lambda^{3p}, \ldots, \quad \lambda^{(n-1)p}, \quad \lambda^{np},$$

dans laquelle un terme quelconque reproduit une des racines de l'équation binôme $X^n = 1$; je multiplie respectivement chacune des équations (S) par un des termes de cette suite; j'ajoute les résultats; j'intègre l'équation que j'obtiens ainsi, et $(A_p + B_p\sqrt{-1})$ désignant une constante arbitraire imaginaire, j'ai l'intégrale suivante :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} \lambda^p x_1 + \lambda^{2p} x_2 + \ldots + \lambda^{(n-1)p} x_{n-1} + \lambda^{np} x_n \\ \quad = (A_p + B_p\sqrt{-1})\, e^{(a\lambda^{np} + b\lambda^{(n-1)p} + c\lambda^{(n-2)p} + \ldots + q\lambda^{2p} + r\lambda^p)t}. \end{array} \right.$$

Au moyen de la formule

$$e^{\xi\sqrt{-1}} = \cos\xi + \sqrt{-1}\sin\xi,$$

je transforme l'exponentielle imaginaire contenue dans l'expression (7); puis, en égalant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$ dans les deux membres, je décompose l'intégrale imaginaire (7) en deux intégrales réelles distinctes qu'on peut appeler les intégrales correspondantes aux racines conjuguées λ^p et λ^{n-p}; on vérifie, en effet, qu'on obtient une intégrale identique à (7) en employant, comme il vient d'être expliqué, non plus la racine λ^p, mais sa conjuguée λ^{n-p}. On vérifie, en outre, qu'on trouve toujours, à un facteur constant près, la même intégrale (7) quelle que soit celle des équations (S) qu'on multiplie par λ^p, premier terme de la suite (*a*), si l'on multiplie en même temps l'équation qui suit immédiatement celle-là par λ^{2p}, la suivante par λ^{3p},..., et si de la dernière équation (S) on passe ainsi à la première, de la première à la deuxième, etc.

En employant une autre racine $\lambda^{p'}$ de la même manière que λ^p, on obtiendra deux nouvelles intégrales réelles du système (S), et ainsi de suite.

En somme, en faisant, si n est pair,

$$p = 1,\quad 2,\quad 3, \ldots, \quad \left(\frac{n}{2} - 1\right),$$

et, si n est impair,

$$p = 1,\quad 2,\quad 3, \ldots, \quad \left(\frac{n-1}{2}\right),$$

on obtiendra successivement et deux par deux, dans le premier cas, $(n-2)$ intégrales, et dans le second cas, $(n-1)$ intégrales des équations proposées; on y joindra, si n est pair, les deux intégrales (5) et (6) obtenues au moyen des racines $+1$ et -1 de l'équation binôme; et, si n est impair, l'intégrale (5) qui correspond à la racine $+1$. De cette manière, on aura formé dans tous les cas les n intégrales qui résolvent la question.

Il ne reste plus qu'à donner l'expression générale des intégrales réelles correspondantes aux racines conjuguées λ^p et λ^{n-p}.

Pour effectuer les calculs indiqués ci-dessus, on se sert de la notation suivante :

$$\begin{aligned}
\lambda^p &= \alpha_p + \beta_p\sqrt{-1},\\
\lambda^{2p} &= \alpha_{2p} + \beta_{2p}\sqrt{-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\lambda^{ip} &= \alpha_{ip} + \beta_{ip}\sqrt{-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\lambda^{np} &= 1,
\end{aligned}$$

et l'on distingue deux cas, suivant que n est pair ou impair.

Si n est pair, on fait $n = 2m$; on remarque que $\lambda^{\frac{n}{2}p} = (-1)^p$; on désigne par f, k, g les coefficients constants occupant les rangs m, $(m+1)$, $(m+2)$ dans la suite $a, b, c, \ldots, q, r$; et l'on pose, afin d'abréger l'écriture,

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}
\psi'_p &= (x_1 + x_{2m-1})\alpha_p + (x_2 + x_{2m-2})\alpha_{2p} + \ldots \\
&\quad + (x_{m-1} + x_{m+1})\alpha_{(m-1)p} + (-1)^p x_m + x_{2m},\\
\psi''_p &= (x_1 - x_{2m-1})\beta_p + (x_2 - x_{2m-2})\beta_{2p} + \ldots \\
&\quad + (x_{m-1} - x_{m+1})\beta_{(m-1)p},\\
\varphi_p &= a + (b+r)\alpha_p + (c+q)\alpha_{2p} + \ldots \\
&\quad + (f+g)\alpha_{(m-1)p} + (-1)^p k,\\
\chi_p &= (b-r)\beta_p + (c-q)\beta_{2p} + \ldots + (f-g)\beta_{(m-1)p}.
\end{aligned}\right.$$

Si n est impair, on appelle f et g les coefficients constants qui occupent les rangs $\left(\frac{n+1}{2}\right)$, $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ dans la suite $a, b, c, \ldots, q, r$, et l'on pose

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
\psi'_p &= (x_1 + x_{n-1})\alpha_p + (x_2 + x_{n-2})\alpha_{2p} + \ldots \\
&\quad + \left(x_{\left(\frac{n-1}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)\alpha_{\left(\frac{n-1}{2}\right)p} + x_n,\\
\psi''_p &= (x_1 - x_{n-1})\beta_p + (x_2 - x_{n-2})\beta_{2p} + \ldots \\
&\quad + \left(x_{\left(\frac{n-1}{2}\right)} - x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right)\beta_{\left(\frac{n-1}{2}\right)p},\\
\varphi_p &= a + (b+r)\alpha_p + (c+q)\alpha_{2p} + \ldots \\
&\quad + (f+g)\alpha_{\left(\frac{n-1}{2}\right)p},\\
\chi_p &= (b-r)\beta_p + (c-q)\beta_{2p} + \ldots + (f-g)\beta_{\left(\frac{n-1}{2}\right)p}.
\end{aligned}\right.$$

En employant ces notations, on trouve que dans les deux cas les intégrales cherchées, résolues par rapport aux constantes arbitraires A_p et B_p, s'écrivent ainsi qu'il suit :

$$(10)\quad \begin{cases} A_p = e^{-\varphi_p . t}\left[\psi'_p . \cos(\chi_p . t) - \psi''_p . \sin(\chi_p . t)\right], \\ B_p = e^{-\varphi_p . t}\left[\psi''_p . \cos(\chi_p . t) + \psi'_p . \sin(\chi_p . t)\right]. \end{cases}$$

Les formules que l'on vient d'obtenir peuvent être appliquées à tout système d'équations simultanées, à coefficients numériques, comprises dans la classe (S); il n'y a plus qu'à remplacer les lettres a, b, c, ... ; α_p, α_{2p}, ..., β_p, β_{2p}, ..., etc., par leurs valeurs.

Nous allons de cette manière parvenir à la solution de l'équation (1); nous traiterons ensuite quelques exemples plus compliqués.

III.

1° Reprenons les équations (4); ainsi que nous l'avons dit, elles rentrent dans la forme (S). Il faut leur appliquer les formules (5), (9) et (10), en faisant

$$n = 3, \quad p = 1, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad r = 1;$$

il suffit de considérer une des deux racines cubiques imaginaires de l'unité, et l'on a, par suite,

$$\alpha_1 = \frac{-1}{2}, \quad \beta_1 = +\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dans le cas actuel, l'intégrale (5) devient

$$(11)\qquad K_1 = (x + y + z)\, e^{-2t}.$$

D'après (9), on trouve

$$\varphi_1 = -1, \ \chi_1 = 0, \ \psi'_1 = \left(-\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + z\right), \ \psi''_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - y).$$

Les intégrales (10) deviennent alors

$$(12)\quad \begin{cases} A_1 = e^t\left(-\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + z\right), \\ B_1 = e^t\frac{\sqrt{3}}{2}(x - y). \end{cases}$$

En éliminant t entre (11) et (12), on trouve facilement les deux équations

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &(x-z)(x+y+z)^{\frac{1}{2}} = \text{const.},\\ &(y-z)(x+y+z)^{\frac{1}{2}} = \text{const.}, \end{aligned}\right.$$

identiques aux intégrales (3) précédemment obtenues.

2° Intégrer les équations simultanées

$$(14)\qquad \frac{dx}{2x-6y+5z} = \frac{dy}{2y-6z+5x} = \frac{dz}{2z-6x+5y} = u..$$

Solution. — Ici n est impair et égal à 3; il suffit de considérer la racine imaginaire cubique de l'unité

$$\lambda = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}.$$

On applique les formules (5), (9) et (10) en faisant

$$a = 2,\quad b = -6,\quad r = 5,\quad \alpha_1 = \frac{-1}{2},\quad \beta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2},\quad p = 1.$$

Au moyen de la formule (5), on trouve d'abord

$$(15)\qquad K_1 = (x+y+z)e^{-t}.$$

Les formules (9) donnent

$$\psi'_1 = -\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + z,\quad \psi''_1 = (x-y)\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \varphi_1 = \frac{5}{2},\quad \chi_1 = -\frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Les formules (10) donnent

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} A_1 = e^{\frac{-5}{2}t}\Bigg[&\left(\frac{2z-x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{11\sqrt{3}}{2}t\right)\\ &+\frac{\sqrt{3}(x-y)}{2}\sin\left(\frac{11\sqrt{3}}{2}t\right)\Bigg],\\ B_1 = e^{\frac{-5}{2}t}\Bigg[&\frac{\sqrt{3}}{2}(x-y)\cos\left(\frac{11\sqrt{3}}{2}t\right)\\ &-\left(\frac{2z-x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{11\sqrt{3}}{2}t\right)\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Les équations (15) et (16) représentent les intégrales du système proposé (14).

3° Intégrer les quatre équations simultanées

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{2x-y+5z-3u}=\frac{dy}{2y-z+5u-3x}\\ &=\frac{dz}{2z-u+5x-3y}=\frac{du}{2u-x+5y-3z}=dt.\end{aligned}\right.$$

Solution. — Dans le cas actuel, n est pair et égal à 4; parmi les racines quatrièmes de l'unité, nous avons à considérer les deux racines réelles $+1$ et -1, et l'une des deux racines imaginaires, $+\sqrt{-1}$ par exemple.

Pour appliquer les formules (5), (6), (8) et (10), nous faisons

$$a=2,\quad b=-1,\quad k=5,\quad r=-3,\quad p=1,\quad \alpha_1=0,\quad \beta_1=1.$$

Il vient alors, d'après (5),

$$(18)\qquad K_1=(x+y+z+u)\,e^{-3t},$$

et, d'après (6),

$$(19)\qquad K_2=(x-y+z-u)\,e^{-11t}.$$

Les formules (8) donnent

$$\psi_1'=u-y,\quad \psi_1''=x-z,\quad \varphi_1=-3,\quad \chi_1=2.$$

On trouve ensuite, d'après (10),

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} A_1&=e^{3t}\left[(u-y)\cos 2t-(x-z)\sin 2t\right],\\ B_1&=e^{3t}\left[(x-z)\cos 2t+(u-y)\sin 2t\right].\end{aligned}\right.$$

(18), (19) et (20) représentent les quatre intégrales des équations (17).

On pourrait multiplier les exemples, et considérer des systèmes d'équations simultanées renfermant un plus grand nombre de variables; mais ce qui précède suffit pour indiquer dans tous les cas la marche à suivre.

SUR LES VOLUMES TRAPÉZOÏDAUX

(voir t. VII, p. 241);

PAR M. ALFRED GIARD.

On sait que *le volume de tout polyèdre ayant pour bases deux polygones quelconques situés dans des plans parallèles, et pour faces latérales des trapèzes, est exprimé par la formule*

$$\frac{H}{6}(B + B' + 4B''),$$

dans laquelle H *désigne la distance des deux plans parallèles,* B *la base inférieure du polyèdre,* B' *la base supérieure, et* B'' *la section équidistante des deux bases* (*).

A la suite de la démonstration de ce théorème, on lit (t. VII, p. 245) la Note suivante : D'après M. Koppe, de Sœst (*Crelle,* t. XVIII, p. 275), le volume que nous

---

(*) Cette proposition, énoncée par Mascheroni dans sa *Collection de Problèmes pour les Arpenteurs,* comprend, comme cas particulier, la mesure du tronc de pyramide à bases parallèles, telle qu'on l'énonce dans les Traités de Géométrie élémentaire. Car, dans ce cas particulier, les aires des sections B, B'', B' étant proportionnelles aux carrés des distances de leurs plans au sommet de la pyramide, on a évidemment

$$\sqrt{B''} = \frac{\sqrt{B} + \sqrt{B'}}{2},$$

d'où

$$4B'' = B + B' + 2\sqrt{BB'},$$

ce qui donne

$$\frac{H}{6}(B + B' + 4B'') = \frac{H}{3}\left(B + B' + \sqrt{BB'}\right).$$

G.

venons de définir est équivalent à un prisme ayant pour hauteur H, et pour base l'aire de la section B″ augmentée de la douzième partie de l'aire P d'un polygone équiangle aux bases, et qui a pour côtés la différence de leurs côtés homologues. Il faudrait démontrer l'identité de cette expression avec la précédente.

C'est cette démonstration que je vais indiquer en quelques mots. L'égalité à vérifier est

$$\frac{H}{6}(B + B' + 4B'') = H\left(B'' + \frac{P}{12}\right),$$

ou

$$2B + 2B' = 4B'' + P.$$

Pour cela, nous appliquerons le théorème suivant dû à Mascheroni : Le double de la surface d'un polygone rectiligne est égal à la somme des rectangles de ses côtés, excepté un, pris deux à deux, multipliés par les sinus des sommes des angles extérieurs compris entre eux.

Soient A, B, C,... les côtés de la base B ; a, b, c,... les côtés de la base B′; ceux de la section B″ seront $\frac{A+a}{2}$, $\frac{B+b}{2}$,..., et ceux du polygone P : $(A-a)$, $(B-b)$, $(C-c)$,....

Désignons par α, β, γ, δ,... les sommes des angles extérieurs compris entre les côtés en nombre $n-1$, combinés deux à deux, les côtés étant toujours pris en marchant dans le même sens.

On aura, d'après le théorème énoncé :

$$2P = (A-a)(B-b)\sin\alpha + (A-a)(C-c)\sin\beta + \ldots$$

$$2B'' = \left(\frac{A+a}{2}\right)\left(\frac{B+b}{2}\right)\sin\alpha + \left(\frac{A+a}{2}\right)\left(\frac{C+c}{2}\right)\sin\beta + \ldots$$

d'où

$$P = \frac{(A-a)(B-b)}{2}\sin\alpha + \frac{(A-a)(C-c)}{2}\sin\beta + \ldots,$$

$$4B'' = \frac{(A+a)(B+b)}{2}\sin\alpha + \frac{(A+a)(C+c)}{2}\sin\beta + \ldots.$$

Faisons la somme

$$P + 4B'' = (AB + ab)\sin\alpha + (AC + ac)\sin\beta + \ldots,$$

$$P + 4B'' = (AB\sin\alpha + AC\sin\beta + \ldots) + (ab\sin\alpha + ac\sin\beta + \ldots),$$

$$P + 4B'' = 2B + 2B',$$

C. Q. F. D.

Il est évident que cette démonstration s'étend au cas où plusieurs des faces latérales seraient des triangles; dans ce cas le polygone P est équiangle à la base B.

DIVERSES EXPRESSIONS DU VOLUME DU TÉTRAÈDRE;

PAR M. GEORGES DOSTOR,
Professeur au lycée impérial de la Réunion.

1. Soient a, b, c trois arêtes contiguës d'un tétraèdre, issues du sommet S; et α, β, γ les angles compris entre ces arêtes, savoir

$$\alpha = (b, c), \quad \beta = (c, a), \quad \gamma = (a, b).$$

Désignons, en outre, par A, B, C les trois autres sommets du solide qui terminent les arêtes a, b, c; et posons

$$AB = c', \quad BC = a', \quad CA = b'.$$

Appelons H la hauteur du solide, abaissée du sommet C sur la face opposée SAB ; nous avons le volume

$$V = SAB \cdot \frac{1}{3} H.$$

Cela posé, représentons par α', β', γ' les trois hauteurs du triangle sphérique dont les côtés sont α, β, γ : nous avons

$$H = c \sin\gamma',$$

et, comme

$$SAB = \frac{1}{2} ab \sin\gamma,$$

il vient

$$\text{(I)} \qquad V = \frac{1}{6} abc \sin\gamma \sin\gamma'.$$

Donc, *le volume d'un tétraèdre est égal au sixième du produit de trois arêtes issues du même sommet, multiplié par le produit du sinus de l'angle compris entre deux de ces arêtes, et du sinus de l'inclinaison de la troisième arête sur le plan des deux premières.*

2. La hauteur γ' partage le triangle sphérique $\alpha\beta\gamma$ en deux triangles sphériques rectangles; l'un d'eux a pour hypoténuse le côté β, et pour angle opposé à γ' le dièdre dirigé suivant l'arête a; ce triangle sphérique rectangle donne donc

$$\sin\gamma' = \sin\beta \sin\widehat{a};$$

il vient, par suite, en substituant dans (I),

$$\text{(II)} \qquad V = \frac{1}{6} abc . \sin\beta \sin\gamma \sin\widehat{a}.$$

Or, le triangle sphérique $\alpha\beta\gamma$ donne aussi

$$\sin a = 2 \sin\frac{a}{2} \cos\frac{a}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{\sin\varpi \sin(\varpi - \alpha) \sin(\varpi - \beta) \sin(\varpi - \gamma)}}{\sin\beta \sin\gamma},$$

où

$$\alpha + \beta + \gamma = 2\varpi.$$

Il vient donc,

(III) $V = \frac{1}{3} abc \sqrt{\sin\varpi \sin(\varpi - \alpha)\sin(\varpi - \beta)\sin(\varpi - \gamma)}.$

La quantité sous le radical peut se développer; en la représentant par $\frac{1}{4}\Delta^2$, on a

(IV) $\Delta^2 = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$

de sorte qu'on peut écrire

(V) $$V = \frac{1}{6} abc.\Delta.$$

Ainsi, *le volume d'un tétraèdre est égal au sixième du produit de trois arêtes issues du même sommet, multiplié par la quantité* Δ *qui est une fonction symétrique des trois angles compris entre ces arêtes* (*).

Cette expression correspond à celle qui donne la surface du triangle en fonction de deux côtés et de l'angle compris.

3. Si nous comparons (I) et (V), nous verrons que

(VI) $$\sin\alpha \sin\alpha' = \sin\beta \sin\beta' = \sin\gamma \sin\gamma' = \Delta.$$

Donc, *dans tout triangle sphérique, les produits des sinus de chaque côté et de la hauteur correspondante sont égaux entre eux et à la fonction* Δ.

(*) La quantité désignée ici par Δ est ce que les Allemands nomment le sinus de l'angle trièdre des arêtes a, b, c. En adoptant cette définition, on peut dire que le volume d'un tétraèdre est égal au sixième du produit des trois arêtes issues d'un même sommet par le sinus de l'angle trièdre que ces trois arêtes forment. G.

4. La valeur (II) peut s'écrire

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} ca . \sin\beta \cdot \frac{1}{2} ab \sin\gamma \cdot \frac{\sin\widehat{a}}{a};$$

or, on sait que

$$\frac{1}{2} ca \sin\beta = \text{SAC}, \quad \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \text{SAB};$$

on a donc la formule

$$\text{(VII)} \qquad V = \frac{2}{3} \text{SAB.SAC} \cdot \frac{\sin\widehat{a}}{a},$$

qui exprime le *volume du tétraèdre en fonction de deux faces* SAB, SAC; *de l'arête commune a, et du dièdre compris entre ces deux faces.*

5. Pour plus de simplicité, représentons par A, B, C, S les faces respectivement opposées aux sommets désignés par ces mêmes lettres.

L'expression précédente (VII) permet d'écrire

$$V = \frac{2}{3} \text{AS} \cdot \frac{\sin\widehat{a'}}{a'} = \frac{2}{3} \text{BS} \cdot \frac{\sin\widehat{b'}}{b'} = \frac{2}{3} \text{CS} \cdot \frac{\sin\widehat{c'}}{c'},$$

d'où l'on tire les deux équations

$$\frac{A \sin\widehat{a'}}{a'} = \frac{B \sin\widehat{b'}}{b'} = \frac{C \sin\widehat{c'}}{c'},$$

qui, étant combinées entre elles et avec l'équation évidente

$$A \cos\widehat{a'} + B \cos\widehat{b'} + C \cos\widehat{c'} = S,$$

donnent d'abord

$$B = \frac{A b' \sin\widehat{a'}}{a' \sin\widehat{b'}}, \quad C = \frac{A c' \sin\widehat{a'}}{a' \sin\widehat{c'}};$$

puis

$$A = \frac{S}{a' \cot \widehat{a'} + b' \cot \widehat{b'} + c' \cot \widehat{c'}} \cdot \frac{a'}{\sin \widehat{a'}}.$$

Si nous substituons cette valeur de A dans l'expression

$$V = \frac{2}{3} AS \cdot \frac{\sin \widehat{a'}}{a'},$$

nous trouvons

$$\text{(VIII)} \qquad V = \frac{2}{3} \cdot \frac{S^2}{a' \cot \widehat{a'} + b' \cot \widehat{b'} + c' \cot \widehat{c'}}$$

pour le *volume du tétraèdre en fonction d'une face et de ses inclinaisons sur les trois autres faces.*

Cette expression correspond à celle de la surface du triangle en fonction d'un côté et des deux angles adjacents (*).

(*) Parmi les différentes expressions du volume d'un tétraèdre en fonction de ses éléments, on peut encore citer les expressions suivantes :

$$288 . V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c'^2 & b'^2 \\ 1 & b^2 & c'^2 & 0 & a'^2 \\ 1 & c^2 & b'^2 & a'^2 & 0 \end{vmatrix},$$

formule qui donne le volume du tétraèdre en fonction des carrés de ses arêtes;

$$V^2 = \frac{2}{9} A.B.C.\Delta',$$

en nommant Δ' le sinus de l'angle trièdre supplémentaire de l'angle des arêtes a, b, c;

$$V = \frac{1}{6} \cdot a . a' \delta . \sin(\widehat{aa'}),$$

où δ représente la plus courte distance des arêtes opposées a, a' et $(\widehat{aa'})$ l'angle de ces deux arêtes.

On sait aussi comment le volume d'un tétraèdre s'exprime en fonction des équations de ses faces, et au moyen des coordonnées de ses sommets.

G.

NOTE SUR QUELQUES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES;

PAR M. S. REALIS.

1. LEMME. — *Entre deux racines consécutives de l'équation* $F(x) = 0$, *il y a au moins une racine de l'équation*

$$F(x) - kF'(x) = 0,$$

dans laquelle k est un nombre quelconque différent de zéro. (WARING.)

C'est une conséquence évidente du théorème de Rolle. Si α et β sont deux racines consécutives de $F(x) = 0$, elles comprendront un nombre impair de racines de la dérivée $F'(x) = 0$, en sorte que $F'(\alpha)$ et $F'(\beta)$ seront de signes contraires. Or, en substituant α et β à la place de x dans l'expression $F(x) - kF'(x)$, on obtient les résultats $-kF'(\alpha)$, $-kF'(\beta)$, qui ont des signes contraires; donc, entre α et β il y a toujours une racine de

$$F(x) - kF'(x) = 0.$$

De même que le théorème dont elle dérive, cette proposition n'est pas restreinte aux équations algébriques; elle subsiste également pour les équations transcendantes, toutes les fois que $F(x)$ et $F'(x)$ sont des fonctions continues entre les limites qui comprennent les racines de $F(x) = 0$; mais ce n'est que des premières équations que nous avons à nous occuper ici.

COROLLAIRES. — 1° *Si l'équation algébrique*

$$F(x) = 0$$

a m racines réelles, l'équation

$$f(x) = \mathrm{F}(x) - k\mathrm{F}'(x) = 0$$

a aussi, au moins, m racines réelles.

2° *Entre deux racines consécutives de* $f(x) = 0$ *il ne peut y avoir plus d'une racine de* $\mathrm{F}(x) = 0$.

3° *Si* $f(x) = 0$ *a i racines imaginaires,* $\mathrm{F}(x) = 0$ *a, au moins, i racines imaginaires.*

2. Soit fait, comme ci-dessus,

$$\mathrm{F}(x) - k\mathrm{F}'(x) = f(x);$$

on aura, n étant le degré de $\mathrm{F}(x)$, et $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x), \ldots, f^n(x)$ désignant les n dérivées successives du polynôme $f(x)$:

$$\mathrm{F}(x) = f(x) + kf'(x) + k^2 f''(x) + k^3 f'''(x) + \ldots + k^n f^n(x).$$

Donc :

Une équation

$$f(x) = 0,$$

de degré n, étant donnée, si l'équation

$$\mathrm{F}(x) = f(x) + kf'(x) + k^2 f''(x) + \ldots + k^n f^n(x) = 0,$$

où k est un nombre indépendant de x, a m racines réelles, la proposée aura elle-même, au moins, m racines réelles, dont m — 1 seront toujours comprises, chacune, entre deux racines consécutives de $\mathrm{F}(x) = 0$. *Et, si la proposée a i racines imaginaires,* $\mathrm{F}(x) = 0$ *aura, elle aussi, au moins i racines imaginaires.*

Dans la seconde partie de cet énoncé se trouve compris et généralisé celui de la question 777. (HERMITE.)

3. Le lemme mentionné au n° 1 conduit également à la solution de la question 775. (SYLVESTER.)

Soient

$$F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n},$$

et $k = 1$, ce qui nous donne

$$f(x) = F(x) - F'(x) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Si l'équation $F(x) = 0$ a deux racines réelles, leurs valeurs seront nécessairement négatives; et, d'après le lemme, elles comprendront une ou plusieurs racines de $f(x) = 0$. Cela n'a pas lieu, puisque les racines de cette dernière équation sont toutes égales à zéro. Il s'ensuit donc, conformément à l'énoncé de la question 775, que la proposée ne peut avoir deux racines réelles.

4. La proposition suivante, que l'on peut rapprocher de celle énoncée au n° 2, se présente aussi comme conséquence du lemme cité. Je laisse au lecteur le soin d'en développer la démonstration.

L'équation

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

ayant toutes ses racines réelles : si l'équation

$$f(x) = 0,$$

de degré n, a m racines réelles, l'équation

$$f(x) + A_1 f'(x) + A_2 f''(x) + \ldots + A_{n-1} f^{n-1}(x) + A_n f^n(x) = 0$$

a au moins m racines réelles; et si cette dernière équation a i racines imaginaires, $f(x) = 0$ *a au moins i racines imaginaires* (*).

(*) Cette proposition comprend évidemment l'énoncé de la question 778; si l'auteur n'en fait pas mention, c'est parce qu'il ne pouvait avoir connaissance de l'énoncé dont il s'agit à l'époque où il nous a adressé son article. G.

5. Observons (avec Waring) que ce qui est établi par le lemme du n° 1 à l'égard des racines des équations

$$F(x) = 0 \quad \text{et} \quad F(x) - kF'(x) = 0,$$

s'applique aux racines de même signe des équations

$$F(x) = 0 \quad \text{et} \quad F(x) - kxF'(x) = 0.$$

De là résulte une proposition connue qui s'énonce ainsi :

Si l'on a une équation

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

et que l'on multiplie respectivement ses termes par

$$a, \quad a + b, \quad a + 2b, \ldots, \quad a + (n-1)b, \quad a + nb,$$

(a et b étant des nombres quelconques), on forme une équation nouvelle qui a une racine comprise entre deux racines consécutives de la proposée, en exceptant la plus petite racine positive de la proposée et la racine négative qui la précède.

Sa démonstration est la même que pour le lemme cité. Deux nombres α et β, de même signe, étant racines consécutives de la proposée $F(x) = 0$, les quantités

$$F(\alpha) - k\alpha F'(\alpha) \quad \text{et} \quad F(\beta) - k\beta F'(\beta)$$

se réduisent respectivement à $-k\alpha F'(\alpha)$ et $-k\beta F'(\beta)$, et ont des signes contraires, puisque $F'(\alpha)$ et $F'(\beta)$ sont des quantités de signes contraires. Donc, deux nombres de même signe qui annulent $F(x)$ comprennent au moins une racine de l'équation

$$F(x) - kxF'(x) = 0.$$

Posez $k = \dfrac{b}{a + nb}$, et développez ; cette équation s'écrira

$$ax^n + (a+b)A_1x^{n-1} + (a+2b)A_2x^{n-2} + \ldots + (a+nb)A_n = 0.$$

Cela démontre la proposition ci-dessus, et l'on voit en même temps que *entre la plus petite racine positive de la proposée et la racine négative qui la précède, ou il n'y aura pas de racines de la nouvelle équation, ou il y en aura un nombre pair.*

6. Les propositions des nos 1 et 5 sont susceptibles d'une extension qui se présente d'elle-même.

Il est visible, en effet, que deux racines consécutives de l'équation

$$F(x) = 0$$

comprennent un nombre impair de racines de l'équation

$$F(x) + \varphi(x)F'(x) = 0,$$

dans laquelle $\varphi(x)$ est une fonction continue qui ne s'annule pour aucune valeur de x comprise entre une limite inférieure et une limite supérieure de toutes les racines réelles de la proposée.

On voit de même que deux racines consécutives et de même signe de $F(x) = 0$ doivent intercepter un nombre impair de racines de

$$F(x) + \psi(x)F'(x) = 0,$$

lorsque $\psi(x)$ est une fonction continue qui change de signe avec x pour toutes les valeurs de cette variable comprises entre les limites mentionnées.

Disposant convenablement de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$, on peut amener par là des résultats importants touchant la séparation des racines, et établir des *criteria* pour reconnaître l'existence de racines, soit réelles, soit imaginaires, d'une équation donnée.

Ainsi, dans le cas déjà considéré de $\varphi(x) = -k$, et en s'aidant de la règle des signes, on reconnaît immédiatement que *si l'équation* $F(x) = 0$ *a* m *variations de signe, et que l'équation* $F(x) - kF'(x) = 0$ (où l'on peut disposer de la constante k à volonté) *en ait un nombre* $m' < m - 1$, *la première aura au moins* $m - m' - 1$ *racines imaginaires.*

SOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE au Concours d'admission à l'École Normale supérieure (année 1866)

(voir p. 45);

PAR MM. A. ANNEQUIN ET J. MOREL,
Elèves du lycée de Grenoble.

Dans une ellipse donnée, on inscrit un parallélogramme ayant pour diagonales deux diamètres conjugués quelconques AA', BB'.

Aux sommets de ce parallélogramme, on mène les normales à l'ellipse; ces normales forment un second parallélogramme MNM'N'.

1° *Démontrer que les diagonales de chacun des parallélogrammes* ABA'B', MNM'N' *sont respectivement perpendiculaires aux côtés de l'autre.*

2° *Trouver le lieu des sommets du parallélogramme* MNM'N', *quand on fait varier les diamètres conjugués.*

3° *Trouver le lieu du point d'intersection de la diagonale* NN' *et de la tangente en* M *au lieu précédent* (*).

1° Les côtés BM', B'M du parallélogramme MNM'N'

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

sont perpendiculaires à la diagonale AA′, puisque les diamètres AA′, BB′ étant conjugués les tangentes en B et en B′ sont parallèles à AA′. Pour une même raison, A′M et AM′ sont perpendiculaires à la diagonale BB′.

La diagonale N′N est perpendiculaire à AB′ et à BA′, car, par raison de symétrie, cette droite passe par le centre O de l'ellipse, et elle est la troisième hauteur du triangle BOA′ puisqu'elle passe par le point N d'intersection des deux autres hauteurs. Cette droite est donc perpendiculaire à A′B et à AB′. Pour une même raison MM′ est perpendiculaire à AB et à A′B′.

2° L'ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, les équations des normales aux points A et B seront

$$(1) \qquad y = mx \pm \frac{c^2 m}{\sqrt{a^2 + b^2 m^2}},$$

$$(2) \qquad y = m'x \pm \frac{c^2 m'}{\sqrt{a^2 + b^2 m'^2}}.$$

Ces normales étant perpendiculaires à deux diamètres conjugués, nous aurons

$$\frac{1}{mm'} = -\frac{b^2}{a^2},$$

d'où

$$m' = -\frac{a^2}{b^2 m}.$$

Substituant dans l'équation (2), nous aurons, après simplification,

$$\frac{y - mx}{b^2 my + a^2 x} = \pm \frac{1}{ab}.$$

Comme dans l'équation finale a et b n'entrent que par leurs carrés, il suffit de prendre un des signes, le signe +

par exemple. Nous aurons donc

$$m = \frac{a[by - ax]}{b[by + ax]}.$$

Substituant dans l'équation (1), qui revient à

$$[y - mx]^2 = \frac{c^4 m^2}{a^2 + b^2 m^2},$$

nous aurons

$$\frac{[b^2y^2 + a^2x^2]^2}{[by + ax]^2} = \frac{c^4[by - ax]^2}{2[b^2y^2 + a^2x^2]};$$

chassons les dénominateurs, il vient

$$2[b^2y^2 + a^2x^2]^3 = c^4[b^2y^2 - a^2x^2]^2.$$

Telle est l'équation du lieu.

Pour avoir aisément la forme du lieu représenté par cette équation, nous transformerons les coordonnées rectilignes en coordonnées polaires, et nous aurons

$$\rho^2 = \frac{c^4[b^2\sin^2\omega - a^2\cos^2\omega]^2}{2[b^2\sin^2\omega + a^2\cos^2\omega]^3}.$$

Cette équation représente une rosace à quatre feuilles. Ce lieu est symétrique par rapport aux axes de coordonnées OX et OY.

3° Soient x', y' les coordonnées du point M où l'on mène la tangente. Le coefficient angulaire de OM est $\frac{y'}{x'}$. Entre les coefficients angulaires m et m' de OM et de ON nous avons la relation

$$\frac{1}{mm'} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

L'équation de ON sera donc

$$(1) \qquad y = -\frac{a^2x'}{b^2y'}x;$$

l'équation de la tangente en M (x', y') sera

$$(2)\quad y - y' = -\frac{6a^2x'[b^2y'^2 + a^2x'^2]^2 + 2c^4a^2x'[b^2y'^2 - a^2x'^2]}{6b^2y'[b^2y'^2 + a^2x'^2]^2 - 2c^4b^2y'[b^2y'^2 - a^2x'^2]}(x - x').$$

Nous avons en outre :

$$(3)\qquad 2[b^2y'^2 + a^2x'^2]^3 = c^4[b^2y'^2 - a^2x'^2]^2.$$

En chassant le dénominateur, effectuant les réductions en ayant égard aux équations (1) et (3), l'équation (2) deviendra

$$(4)\qquad b^2y'^2 - a^2x'^2 = -4b^2yy'.$$

Les équations (1) et (4) donnent, en supprimant la solution $x' = 0$, $y' = 0$ qui ne convient pas,

$$y' = \frac{4a^2x^2y}{b^2y^2 - a^2x^2},\quad x' = -\frac{4b^2y^2x}{b^2y^2 - a^2x^2}.$$

Substituant dans l'équation (3), nous avons l'équation du lieu

$$32a^2b^2x^2y^2[a^2x^2 + b^2y^2]^3 = c^4[a^2x^2 - b^2y^2]^4.$$

Pour trouver aisément la forme de la courbe, nous transformerons en coordonnées polaires, et nous aurons

$$\rho^2 = \frac{c^4[a^2\cos^2\omega - b^2\sin^2\omega]^4}{32a^2b^2[a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega]^3\sin^2\omega\cos^2\omega}.$$

Le lieu est symétrique par rapport aux axes OX et OY et présente huit branches infinies asymptotes aux axes de coordonnées.

Note. — Autre solution d'un Professeur anonyme.

Seconde solution de la question 582;

(voir t. XX, p. 139);

PAR M. DÉSIR RAVON,
Élève du lycée d'Angoulême.

On demande le lieu des foyers d'une hyperbole équilatère tangente et concentrique à une ellipse donnée (*).

Soient

$$(1) \qquad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

l'équation de l'ellipse, et

$$(2)\left\{\begin{aligned}&(1-m^2)x^2 - 2mnxy + (1-n^2)y^2 - 2(\alpha+mp)x\\&\qquad - 2(\beta+np)y + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0\end{aligned}\right.$$

celle de l'hyperbole.

Cette hyperbole étant équilatère, on a

$$(3) \qquad m^2 + n^2 = 2,$$

et comme elle est concentrique à l'ellipse,

$$(4) \qquad \alpha + mp = 0,$$

$$(5) \qquad \beta + np = 0.$$

On pourra donc, dans l'équation (2), effacer les termes du premier degré; les abscisses des points d'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole sont données par une équation bicarrée, et il faut exprimer que le premier membre de cette équation est un carré parfait, ce qui donne

$$(6)\left\{\begin{aligned}&(\alpha^2+\beta^2-p^2)^2 + (\alpha^2+\beta^2-p^2)(1-m^2)c^2\\&\qquad + a^2b^2(1-m^2-n^2) = 0.\end{aligned}\right.$$

(*) Ce n'est pas précisément l'énoncé de la question 582; dans cet énoncé, on propose de faire voir que le produit des distances d'un foyer de l'hyperbole aux deux foyers de l'ellipse est constant, ce qui n'exige pas que l'on trouve en coordonnées rectilignes l'équation du lieu des foyers de l'hyperbole. G.

Des équations (3), (4) et (5), on tire

$$p^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}, \quad m^2 = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad n^2 = \frac{2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Ces valeurs portées dans l'équation (6) donnent l'équation du lieu des foyers (α, β étant maintenant coordonnées courantes) :

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 2c^2(\alpha^2 + \beta^2) - 4c^2\alpha^2 - 4a^2b^2 = 0.$$

En comparant cette équation avec celle de la cassinienne, on reconnaît que le lieu est une cassinienne ayant les mêmes foyers que l'ellipse (*).

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES DE PARIS.

Mathématiques spéciales.

Un ellipsoïde étant donné, on propose de trouver une droite L dans l'espace et un point P sur l'ellipsoïde, de façon que les cônes qui ont pour sommet commun le point P, et pour bases les sections faites dans l'ellipsoïde par les plans contenant la droite L, soient tous de révolution : on cherchera, en outre, quel est le lieu des positions que prend la droite L lorsque le plus grand et le plus petit axe de l'ellipsoïde restant invariables de grandeur et de position, on fait varier la longueur de l'axe moyen.

(*) Le produit des distances de l'un des foyers de l'hyperbole aux deux foyers de l'ellipse est égal à la quantité constante $a^2 + b^2$. Le produit des distances de chacun des sommets de l'hyperbole à deux points pris sur le grand axe de l'ellipse à des distances du centre égales à $\frac{c}{\sqrt{2}}$ est aussi une quantité constante égale à $\frac{a^2 + b^2}{2}$. G.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Composition mathématique.

Étant donnés un triangle BOA rectangle en O, et une droite D située sur le plan de ce triangle, on propose :

1° De former l'équation générale des hyperboles équilatères circonscrites au triangle BOA ;

2° De calculer l'équation du lieu L des points où ces différentes hyperboles ont pour tangentes des parallèles à D ;

3° D'examiner les différentes formes du lieu L correspondantes aux différentes directions de la droite D.

Composition française.

Développer cette pensée :

L'homme doit passer la première partie de sa vie avec les morts, la seconde avec les vivants, la dernière avec lui-même.

Lavis à l'encre de Chine.

Lavis du cylindre : même énoncé que les années précédentes.

Composition de Trigonométrie.

Étant donnés, dans un triangle, deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$a = 24835^{\text{m}},36,$$
$$b = 18947^{\text{m}},24,$$
$$C = 35^\circ\, 42'\, 26'',42,$$

trouver les deux autres angles A et B, et le troisième côté c.

Composition de Géométrie descriptive.

Deux cônes sont circonscrits à une sphère; ils se coupent par conséquent suivant deux courbes planes. L'un de ces cônes est solide. On demande de représenter par ses projections la portion de ce cône solide qui est renfermée dans l'autre.

Le centre de la sphère est projeté en (O', O); les points O' et O sont à 120 millimètres de la ligne de terre. Le rayon de la sphère a 60 millimètres de longueur.

Les cônes touchent la sphère suivant des petits cercles projetés verticalement en $A'B'$, $C'D'$.

Pour déterminer ces droites, on donne les dimensions suivantes :

$O'E' = 25$ millimètres
$O'G' = 40$ »
$O'H' = 10$ »
$L'H' = 40$ »

CORRESPONDANCE.

1. *Lettre de M. Duhamel, Membre de l'Institut.* — « Dans un des derniers numéros de votre utile journal, se trouve un article de M. Prouhet concernant le célèbre théorème de Sturm sur les équations. L'origine qu'il suppose à cette découverte n'est pas la même que celle que j'ai indiquée dans un de mes ouvrages, et dont je suis certain, puisque c'est de Sturm lui-même que je la tiens. Je n'insisterais pas sur ce point, si la marche suivie par cet illustre géomètre n'était pas la plus simple, la plus naturelle et la plus en rapport avec la nature de son génie.

Il est donc, jusqu'à un certain point, dans l'intérêt de sa gloire que je fasse connaître les quelques mots qu'il m'a dits autrefois à ce sujet; comme aussi, il est dans l'intérêt de la science d'indiquer, quand on le peut, la série des idées par lesquelles les inventeurs ont été conduits à leurs découvertes.

» Un jour donc, revenant avec lui de l'Académie, je lui demandai de quelle manière il était parvenu à sa découverte, et voici ce qu'il me répondit immédiatement avec sa simplicité et sa bonhomie ordinaires :

« J'avais remarqué que l'imperfection du théorème » de Fourier tenait à ce que la suite des polynômes qu'il » considérait pouvait perdre des variations sans que le » premier s'annulât, c'est-à-dire sans que l'on passât par » une racine de l'équation. Il résultait de là que la diffé- » rence entre les nombres de variations correspondants » à deux nombres donnés ne pouvait indiquer qu'une li- » mite supérieure du nombre de racines comprises entre » ces deux nombres, et non le nombre même de ces ra- » cines.

» Je m'attachai donc à chercher s'il ne serait pas pos- » sible de trouver des fonctions telles, qu'en y faisant » varier x d'une manière continue, de la limite infé- » rieure à la limite supérieure des racines réelles de l'é- » quation, il ne se perdît de variations que quand x pas- » serait par une valeur égale à l'une de ces racines. C'est » à quoi je suis parvenu, comme vous le savez. »

» Ce problème, que sans doute Fourier avait dû chercher, mais qu'il n'a pas résolu et dont il n'a pas parlé, était bien celui qu'on devait se poser, mais rien n'indiquait le moyen de solution, et Sturm, en le découvrant, a peut-être donné la plus grande preuve de sa sagacité et de sa pénétration.

» Qu'il ait ensuite étendu ce théorème, qu'il l'ait rattaché à des méthodes plus générales de résolution d'équations, cela est étranger à la question actuelle, qui est de connaître la marche de son esprit dans la découverte de son théorème. Je ne l'ai fait connaître, il est vrai, que très-imparfaitement, puisque je n'ai indiqué que le problème auquel il a ramené la question; mais par quelle espèce de divination a-t-il été conduit à prendre les restes, changés de signes, auxquels conduit la recherche du commun diviseur entre le premier membre de l'équation et sa dérivée; c'est ce qu'il est impossible de savoir, et ce dont il avait peut-être lui-même perdu la trace, comme il arrive souvent dans les inventions auxquelles les déductions logiques ne suffisent pas et qui demandent ce qu'on appelle du génie. Il y a une illumination subite de l'esprit, qui dépend bien des idées qu'on a rassemblées, mais dont l'inventeur lui-même a un sentiment si rapidement effacé qu'il serait presque tenté de croire, comme on l'a si souvent dit, que c'est au hasard qu'il la doit.

» Quant à l'origine que M. Prouhet suppose au théorème de Sturm, il ne la fait pas connaître et se contente de citer le passage suivant de Sturm :

« J'ajoute que mon théorème sur les équations ne doit » pas être considéré comme isolé. Il se rattache à une » méthode générale de résolution qui s'applique à certaines équations algébriques déterminées qu'on rencontre dans les problèmes les plus importants de la » Mécanique céleste, de l'Astronomie et de la Physique » mathématique. Mon travail sur les équations linéaires » du deuxième ordre, qui m'a fait trouver les propriétés » des racines des équations transcendantes, n'est qu'une » partie de cette théorie générale, et ce n'est qu'en suivant cette voie qu'on pourra savoir quelque chose sur » les équations à différences partielles d'ordres supérieurs. »

» Ce passage ne dit évidemment rien sur la manière dont il a été conduit au théorème primitif tel qu'il se trouve énoncé dans le *Bulletin des Sciences* de Férussac (année 1829). Ce serait donc d'après d'autres passages de Sturm que l'on pourrait supposer qu'il a donné une origine différente de celle que nous avons indiquée; mais il me paraît impossible que l'on en trouve de concluants, puisqu'il faudrait qu'à force de généralisations et d'applications il eût oublié le point de départ qu'il m'avait indiqué autrefois, et de manière à ce que je n'aie pu me méprendre.

» Je pense donc que M. Prouhet reconnaîtra que son opinion était fondée sur des interprétations (*) et non sur une assertion de l'auteur lui-même, et que, dans tous les cas, la marche que j'ai indiquée, d'après les paroles de Sturm, est celle qui est la plus conforme à l'esprit d'invention, et celle par conséquent qui lui fait le plus honneur et qu'il ne faut pas oublier. »

2. Des élèves de plusieurs Lycées nous ont récemment adressé des démonstrations de la proposition suivante :

Soit $f(x,y)$ *l'équation d'une courbe du second degré. Si, d'un point* M *dont les coordonnées sont* (α, β), *on abaisse une perpendiculaire* MP *sur la polaire de ce point, et qu'on la prolonge jusqu'en* A, *où elle rencontre l'un des deux axes de la courbe, on trouve que* $f(\alpha,\beta)$ *est proportionnel au produit* MP.MA (t. III, p. 458).

Il a déjà été rendu compte (t. IV, p. 334) de différentes communications que nous avons reçues au sujet

---

(*) M. Prouhet a eu connaissance de la lettre de M. Duhamel, et voici ce qu'il m'a écrit peu de jours avant sa mort :

« Mon opinion se fondait sur une tradition assez probable; mais puisque » Sturm s'est expliqué là-dessus, et rien ne m'autorise à mettre en doute » la mémoire de M. Duhamel, l'affaire doit en rester là. » G.

de ce théorème. Nous ferons observer qu'il suffit de le démontrer pour les coniques rapportées à leurs axes. La démonstration est alors des plus simples; s'il s'agit, par exemple, de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

et que le point A soit sur l'axe $2a$, on trouve immédiatement

$$f(\alpha, \beta) = (\mathrm{MP}.\mathrm{MA}) \times a^2,$$

en remarquant que le produit MP.MA est égal à l'ordonnée β multipliée par la partie de cette ordonnée comprise entre le point M et sa polaire.

Quand le point A appartient à l'axe $2b$, on trouve, de même,

$$f(\alpha, \beta) = (\mathrm{MP}.\mathrm{MA}) \times b^2.$$

M. *Recoq* a remarqué que $f(\alpha, \beta)$ représente, à un facteur constant près, le rapport $\frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{CH}}$ des distances de la polaire au point M et au centre C de la courbe. Cela résulte évidemment de ce que la substitution des coordonnées du centre dans l'équation de la polaire donne une quantité constante. Dans le cas de l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

on a, en valeur absolue,

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{CH}} \times a^2b^2.$$

Il s'ensuit

$$\mathrm{MA} \times \mathrm{CH} = b^2 \quad \text{ou} \quad \mathrm{MA} \times \mathrm{CH} = a^2,$$

suivant que le point A est sur l'axe $2a$ ou sur l'axe $2b$. Cette dernière proposition est due à M. Sadleir (*Traité des Sections coniques* de M. Salmon, p. 174). G.

QUESTION.

824. Étant donnée l'équation générale d'une surface du second ordre

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz \\ &\quad + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \end{aligned}\right.$$

rapportée à des axes rectangulaires; si l'on coupe cette surface par un plan

$$(2)\qquad \alpha x + \beta y + \gamma z - q = 0,$$

α, β, γ étant les cosinus de l'axe du plan avec les axes de coordonnées, les valeurs algébriques R_1, R_2 des *axes de la section* seront données par les deux équations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} = \frac{\frac{dH}{dD}}{H}[A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma \\ &\qquad\qquad + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta - A - A' - A''], \\ &\frac{1}{R_1^2 R_2^2} = -\frac{\left(\frac{dH}{dD}\right)^3}{H^2}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, H désigne le déterminant

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & \alpha \\ B'' & A' & B & C' & \beta \\ B' & B & A'' & C'' & \gamma \\ C & C' & C'' & D & -q \\ \alpha & \beta & \gamma & -q & 0 \end{vmatrix}.$$

(L. PAINVIN.)

NOTE SUR LES CONIQUES CONJUGUÉES PAR RAPPORT A UN TRIANGLE;

PAR M. L. PAINVIN.

1. Si le triangle fixe par rapport auquel les coniques sont *conjuguées* est choisi pour triangle de référence, l'équation générale des *coniques conjuguées* est

$$mX^2 + nY^2 + pZ^2 = 0; \tag{1}$$

X, Y, Z sont les distances d'un point quelconque du plan aux côtés du triangle, de sorte que

$$\left\{\begin{aligned} X &= a_1 - x\cos\alpha - y\sin\alpha,\\ Y &= b_1 - x\cos\beta - y\sin\beta,\\ Z &= c_1 - x\cos\gamma - y\sin\gamma,\end{aligned}\right. \tag{2}$$

les seconds membres égalés à zéro donnant, sous la forme normale, les équations en coordonnées cartésiennes des côtés du triangle.

Désignant par A, B, C, S, R les angles, la surface, le rayon circonscrit du triangle de référence, on a, entre les coordonnées X, Y, Z, la relation

$$X\sin A + Y\sin B + Z\sin C = \frac{S}{R}; \tag{3}$$

de plus, les angles α, β, γ sont liés aux angles A, B, C par les relations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin A} = \frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\sin B} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin C},\\ &\frac{\cos(\beta-\gamma)}{\cos A} = \frac{\cos(\gamma-\alpha)}{\cos B} = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos C} = -1.\end{aligned}\right. \tag{4}$$

Les coordonnées X_0, Y_0, Z_0 du centre de la conique (1) seront déterminées par les équations

$$\frac{f'_X}{\sin A} = \frac{f'_Y}{\sin B} = \frac{f'_Z}{\sin C},$$

qu'on obtient en cherchant le pôle de la droite de l'infini. On déduit de là

$$(5) \qquad \frac{mX_0}{\sin A} = \frac{nY_0}{\sin B} = \frac{pZ_0}{\sin C},$$

ou, en ayant égard à la relation (3),

$$(5\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_0 &= \frac{S \dfrac{\sin A}{m}}{R\left(\dfrac{\sin^2 A}{m} + \dfrac{\sin^2 B}{n} + \dfrac{\sin^2 C}{p}\right)}, \\ Y_0 &= \frac{S \dfrac{\sin B}{n}}{R\left(\dfrac{\sin^2 A}{m} + \dfrac{\sin^2 B}{n} + \dfrac{\sin^2 C}{p}\right)}, \\ Z_0 &= \frac{S \dfrac{\sin C}{p}}{R\left(\dfrac{\sin^2 A}{m} + \dfrac{\sin^2 B}{n} + \dfrac{\sin^2 C}{p}\right)}. \end{aligned} \right.$$

2. Ceci posé, rappelons que si l'équation d'une conique est (en coordonnées cartésiennes)

$$(6) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = H,$$

et si a, b sont les valeurs algébriques des longueurs des axes de cette conique, on a les relations

$$(7) \qquad a^2 + b^2 = \frac{(A + C)H}{AC - B^2}, \quad a^2 b^2 = \frac{H^2}{AC - B^2}.$$

La constante H est égale et de signe contraire au résultat qu'on obtient en remplaçant, dans le premier membre de l'équation générale de la courbe, les coordonnées variables par les coordonnées du centre. Ainsi

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} H &= -(mX_0^2 + nY_0^2 + pZ_0^2)\\ &= -\frac{S^2}{R^2}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sin^2 A}{m}+\dfrac{\sin^2 B}{n}+\dfrac{\sin^2 C}{p}}.\end{aligned}\right.$$

Pour déterminer les constantes A, B, C, je transforme, à l'aide des formules (2), l'équation (1) de la courbe en coordonnées cartésiennes; on trouve alors

$$\left\{\begin{aligned} A &= m\cos^2\alpha + n\cos^2\beta + p\cos^2\gamma,\\ C &= m\sin^2\alpha + n\sin^2\beta + p\sin^2\gamma,\\ B &= m\sin\alpha\cos\alpha + n\sin\beta\cos\beta + p\sin\gamma\cos\gamma;\end{aligned}\right.$$

d'où l'on conclut

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} AC - B^2 &= mnp\left(\frac{\sin^2 A}{m}+\frac{\sin^2 B}{n}+\frac{\sin^2 C}{p}\right),\\ A + C &= m + n + p.\end{aligned}\right.$$

Les relations (7), (8), (9) nous donnent immédiatement les formules suivantes :

$$(I)\quad \left\{\begin{aligned} a^2 + b^2 &= -\frac{S^2}{R^2}\cdot\frac{m+n+p}{mnp\left(\dfrac{\sin^2 A}{m}+\dfrac{\sin^2 B}{n}+\dfrac{\sin^2 C}{p}\right)^2},\\ a^2 b^2 &= \frac{S^4}{R^4}\cdot\frac{1}{mnp\left(\dfrac{\sin^2 A}{m}+\dfrac{\sin^2 B}{n}+\dfrac{\sin^2 C}{p}\right)^3};\end{aligned}\right.$$

a, b sont les valeurs algébriques des longueurs des axes de la conique

$$mX^2 + nY^2 + pZ^2 = 0,$$

conjuguée par rapport au triangle $(X=0, Y=0, Z=0)$.

Ces formules peuvent être utiles dans plusieurs circonstances; je vais dès maintenant en déduire quelques conséquences.

3. Ces formules nous fournissent une démonstration très-simple de la relation remarquable énoncée par M. Faure (*Nouvelles Annales*, 1861, p. 55).

Effectuons, en effet, le produit des valeurs (5 *bis*) et rappelons-nous que

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{S}{2R^2},$$

il vient

$$RX_0Y_0Z_0 = \frac{S^4}{R^4} \cdot \frac{1}{mnp\left(\dfrac{\sin^2 A}{m} + \dfrac{\sin^2 B}{n} + \dfrac{\sin^2 C}{p}\right)^3};$$

et, d'après la seconde des relations (I),

$$(1^\circ) \qquad RX_0Y_0Z_0 = a^2 b^2.$$

C'est la relation énoncée par M. Faure : X_0, Y_0, Z_0 sont les distances du centre de la conique aux côtés du triangle conjugué; ainsi X_0 représente $+$ ou $-$ la distance du centre au côté BC, suivant que, par rapport à BC, le centre est ou n'est pas du même côté que le sommet opposé A.

4. L'équation du cercle circonscrit au triangle ABC est

$$(10) \qquad YZ \sin A + XZ \sin B + XY \sin C = 0;$$

or, on a identiquement

$$\begin{aligned} &YZ \sin A + XZ \sin B + XY \sin C \\ &\quad = x^2 (\cos\beta \cos\gamma \sin A + \cos\gamma \cos\alpha \sin B + \cos\alpha \cos\beta \sin C) \\ &\quad + y^2 (\sin\beta \sin\gamma \sin A + \sin\gamma \sin\alpha \sin B + \sin\alpha \sin\beta \sin C) \\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

La puissance P^2 d'un point du plan par rapport au cercle circonscrit est alors

$$P^2 = \frac{YZ \sin A + XZ \sin B + XY \sin C}{\cos\beta \cos\gamma \sin A + \cos\gamma \cos\alpha \sin B + \cos\alpha \cos\beta \sin C}.$$

Mais puisque l'équation ci-dessus représente un cercle, on a

$$\begin{gathered}\cos\beta \cos\gamma \sin A + \cos\gamma \cos\alpha \sin B + \cos\alpha \cos\beta \sin C \\ = \sin\beta \sin\gamma \sin A + \sin\gamma \sin\alpha \sin B + \sin\alpha \sin\beta \sin C = k;\end{gathered}$$

d'où, en ajoutant ces valeurs égales et ayant égard aux relations (4),

$$2k = -(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C),$$

ou

$$-4k = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C = \frac{4S}{2R^2}.$$

Ainsi, la puissance P^2 d'un point quelconque du plan par rapport au cercle (10) est

$$(11) \qquad P^2 = -\frac{2R^2}{S}(YZ \sin A + XZ \sin B + XY \sin C).$$

Si l'on cherche la puissance du centre (5 *bis*) de la conique par rapport au cercle circonscrit, on trouve

$$P^2 = -\frac{2R^2}{S} \cdot \frac{S^2}{R^2} \cdot \frac{\sin A \sin B \sin C (m + n + p)}{mnp\left(\dfrac{\sin^2 A}{m} + \dfrac{\sin^2 B}{n} + \dfrac{\sin^2 C}{p}\right)^2},$$

ou, en ayant égard à la première des formules (I),

$$(2^\circ) \qquad P_0^2 = a^2 + b^2,$$

c'est-à-dire :

La puissance du centre d'une conique par rapport au cercle circonscrit à un triangle conjugué quelconque est *constante et égale à la somme des carrés des valeurs algébriques des axes.* C'est le théorème de M. Faure.

La relation précédente (2°) montre que :

Le produit des distances du centre d'une conique aux côtés d'un triangle conjugué quelconque par le rayon du cercle circonscrit à ce triangle est constant et égal au carré du produit des axes.

On voit que ces deux théorèmes sont la traduction géométrique des deux relations fondamentales (I).

5. Les formules (I) nous permettent encore de résoudre facilement les questions suivantes; je ne ferai qu'indiquer les résultats :

1° *Le lieu des centres des coniques conjuguées par rapport à un triangle fixe, et pour lesquelles la somme des carrés des valeurs algébriques des axes est constante, est le cercle*

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{YZ}\sin\mathrm{A} + \mathrm{XZ}\sin\mathrm{B} + \mathrm{XY}\sin\mathrm{C} + \frac{a^2+b^2}{2\mathrm{S}} \\ &\qquad \times (\mathrm{X}\sin\mathrm{A} + \mathrm{Y}\sin\mathrm{B} + \mathrm{Z}\sin\mathrm{C})^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Ce résultat se déduit de la première des relations (I) en éliminant m, n, p à l'aide des équations (5). L'équation (12) représente évidemment un cercle, puisque cette courbe (12) du second degré passe par les points circulaires à l'infini :

$$(13)\left\{\begin{aligned} &\mathrm{YZ}\sin\mathrm{A}+\mathrm{XZ}\sin\mathrm{B}+\mathrm{XY}\sin\mathrm{C}=0, && \text{cercle circonscrit au triangle de référence,} \\ &\mathrm{X}\sin\mathrm{A}+\mathrm{Y}\sin\mathrm{B}+\mathrm{Z}\sin\mathrm{C}=0, && \text{droite de l'infini.} \end{aligned}\right.$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, où $a^2+b^2=0$, le lieu est le cercle circonscrit au triangle fixe.

Ces résultats sont d'ailleurs des conséquences évidentes du théorème de M. Faure; mais on voit que la recherche directe du lieu est excessivement simple.

2° *Le lieu des centres des coniques conjuguées par rapport à un triangle fixe, et pour lesquelles le produit des axes est constant, est la courbe*

$$(14)\qquad XYZ = \frac{a^2 b^2 R^2}{2S^3}(X\sin A + Y\sin B + Z\sin C)^3.$$

C'est une courbe du troisième ordre inscrite dans le triangle fixe; ses trois points d'inflexion réels sont à l'infini; les tangentes d'inflexion ou asymptotes sont les trois côtés du triangle; le produit des distances de chaque point de la courbe aux trois côtés du triangle est constant.

3° *Le lieu des centres des coniques conjuguées par rapport à un triangle fixe, et pour lesquelles la somme des carrés des inverses des axes est constante, est la courbe*

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{S^2}{R^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)XYZ + (YZ\sin A + XZ\sin B + XY\sin C)\\ &\qquad\qquad\qquad \times (X\sin A + Y\sin B + Z\sin C) = 0.\end{aligned}\right.$$

C'est une courbe du troisième ordre circonscrite au triangle fixe; les directions asymptotiques sont les trois côtés du triangle. Car il est visible d'après l'équation que le côté $X = 0$, par exemple, rencontre la courbe en trois points, dont deux sont sur le cercle circonscrit, et un sur la droite de l'infini.

6. Cherchons les foyers de la courbe

$$(1)\qquad mX^2 + nY^2 + pZ^2 = 0.$$

L'équation quadratique des tangentes menées d'un point (X_0, Y_0, Z_0) à une courbe du second degré $F(X, Y, Z) = 0$ est

$$4F(X_0, Y_0, Z_0).F(X, Y, Z) - (XF'_{X_0} + YF'_{Y_0} + ZF'_{Z_0})^2 = 0,$$

équation qui deviendra, dans le cas de la courbe (1),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} & X^2\left(\frac{Y_0^2}{p}+\frac{Z_0^2}{n}\right)+Y^2\left(\frac{Z_0^2}{m}+\frac{X_0^2}{p}\right)+Z^2\left(\frac{X_0^2}{n}+\frac{Y_0^2}{m}\right) \\ & \qquad -2\frac{Y_0Z_0}{m}YZ-2\frac{X_0Z_0}{n}XZ-2\frac{X_0Y_0}{p}XY=0. \end{aligned}\right.$$

Si nous exprimons que l'équation (16) représente un cercle, ce cercle aura son rayon nul, et le point (X_0, Y_0, Z_0), qui en est le centre, sera un *foyer*. Or, la courbe (16) sera un cercle, si elle passe par les points circulaires à l'infini, savoir :

$$\left\{\begin{aligned} & YZ\sin A+XZ\sin B+XY\sin C=0, \\ & X\sin A+Y\sin B+Z\sin C=0. \end{aligned}\right.$$

Mais l'équation générale des courbes du second degré passant par ces deux points est

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} & (X\sin A+Y\sin B+Z\sin C)(\lambda X+\mu Y+\nu Z) \\ & \quad +YZ\sin A+XZ\sin B+XY\sin C=0; \end{aligned}\right.$$

donc, en écrivant que les équations (16) et (17) représentent la même courbe, nous aurons exprimé que la courbe (16) est un cercle. Nous sommes ainsi conduits aux équations de condition

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\dfrac{Y_0^2}{p}+\dfrac{Z_0^2}{n}}{\lambda\sin A}=\frac{\dfrac{Z_0^2}{m}+\dfrac{X_0^2}{p}}{\mu\sin B}=\frac{\dfrac{X_0^2}{n}+\dfrac{Y_0^2}{m}}{\lambda\sin C} \\ & \qquad =\frac{-\dfrac{2Y_0Z_0}{m}}{\sin A+\nu\sin B+\mu\sin C} \\ & \qquad =\frac{-\dfrac{2X_0Z_0}{n}}{\nu\sin A+\sin B+\lambda\sin C} \\ & \qquad =\frac{-\dfrac{2X_0Y_0}{p}}{\mu\sin A+\lambda\sin B+\sin C}=\frac{1}{\rho}. \end{aligned}\right.$$

L'élimination des arbitraires λ, μ, ν s'effectue immédiatement, et, en égalant les valeurs de ρ, on trouve, après la suppression de l'indice o,

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{H}X^2 - 2\mathrm{U}X\frac{\sin A}{m} + \frac{\mathrm{U}^2}{m^2} &= \mathrm{H}Y^2 - 2\mathrm{U}Y\frac{\sin B}{n} + \frac{\mathrm{U}^2}{n^2} \\ &= \mathrm{H}Z^2 - 2\mathrm{U}Z\frac{\sin C}{p} + \frac{\mathrm{U}^2}{p^2}, \end{aligned}\right.$$

équations dans lesquelles nous avons posé

$$(19\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{H} &= \frac{\sin^2 A}{m} + \frac{\sin^2 B}{n} + \frac{\sin^2 C}{p} \\ \mathrm{U} &= X\sin A + Y\sin B + Z\sin C. \end{aligned}\right.$$

Les équations (19) déterminent les coordonnées des foyers de la conique (1).

La résolution explicite de ces équations est possible; mais les valeurs obtenues sont assez compliquées. Comme je n'en dois pas faire usage pour le moment, je me dispenserai de les écrire. J'examinerai seulement le cas de la parabole.

7. Si on cherche les intersections de la conique

$$(1)\qquad mX^2 + nY^2 + pZ^2 = 0$$

avec la droite à l'infini

$$X\sin A + Y\sin B + Z\sin C = 0,$$

on en conclut le genre de la courbe. Ainsi on a :

Une *ellipse* lorsque

$$mnp\left(\frac{\sin^2 A}{m} + \frac{\sin^2 B}{n} + \frac{\sin^2 C}{p}\right) > 0;$$

Une *hyperbole* lorsque

$$mnp\left(\frac{\sin^2 A}{m} + \frac{\sin^2 B}{n} + \frac{\sin^2 C}{p}\right) < 0;$$

Une *parabole* lorsque

$$\frac{\sin^2 A}{m} + \frac{\sin^2 B}{n} + \frac{\sin^2 C}{p} = 0.$$

Ce dernier résultat s'obtient encore en écrivant que le centre (5) est sur la droite de l'infini.

Dans le cas de la parabole, la quantité H est nulle, et les relations (19) donnent les équations suivantes, qui déterminent le *foyer unique* à distance finie

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{-X\sin A + Y\sin B + Z\sin C}{m} \\ &= \frac{X\sin A - Y\sin B + Z\sin C}{n} \\ &= \frac{X\sin A + Y\sin B - Z\sin C}{p}, \end{aligned}\right.$$

et l'on a, en outre, la relation

$$(20\ bis)\qquad \frac{\sin^2 A}{m} + \frac{\sin^2 B}{n} + \frac{\sin^2 C}{p} = 0.$$

L'élimination de m, n, p, entre les équations (20) et (20 *bis*) nous donne le lieu des foyers des paraboles conjuguées par rapport à un triangle fixe. On trouve ainsi

$$\frac{\sin^2 A}{-X\sin A + Y\sin B + Z\sin C} + \frac{\sin^2 B}{X\sin A - Y\sin B + Z\sin C} + \frac{\sin^2 C}{X\sin A + Y\sin B - Z\sin C} = 0.$$

Après quelques réductions visibles, lorsqu'on se rappelle les relations entre les lignes trigonométriques des angles d'un triangle, telles que

$$\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = 2\sin B\sin C\cos A\ldots,$$

on obtient définitivement

$$(21)\quad \begin{cases} X^2\sin 2A + Y^2\sin 2B + Z^2\sin 2C \\ \quad - 2(YZ\sin A + XZ\sin B + XY\sin C) = 0. \end{cases}$$

On reconnaît l'équation du *cercle des neuf points* du triangle de référence. Je remarquerai aussi que l'équation

$$X^2\sin 2A + Y^2\sin 2B + Z^2\sin 2C = 0$$

est l'équation du *cercle conjugué* par rapport au triangle de référence; les rectangles donnent le *cercle circonscrit;* de là une propriété du cercle des neuf points.

Nous arrivons ainsi à cette proposition :

Le lieu des foyers des paraboles conjuguées par rapport à un triangle fixe est le cercle des neuf points de ce triangle.

Ou encore :

Si l'on considère un triangle quelconque conjugué par rapport à une parabole fixe, le cercle des neuf points de ce triangle passe par le foyer de la parabole.

Je ne pense pas que cette propriété curieuse ait déjà été signalée (*).

(*) Quand M. Painvin nous a adressé cet article, la propriété dont il s'agit n'avait pas encore été signalée dans les *Nouvelles Annales.*

RÉSOLUTION TRIGONOMÉTRIQUE D'UNE ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

1. A la page 421 du tome XX des *Nouvelles Annales*, on trouve les formules suivantes :

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{array}{l} x^3 + ax - b = 0, \quad \dfrac{2}{b}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} = \operatorname{tang}\varphi, \\ \sqrt[3]{\operatorname{tang}\dfrac{\varphi}{2}} = \sin\psi, \quad x = \dfrac{\cos^3\psi}{\sin\psi}\sqrt{\dfrac{a}{3}}; \end{array}\right.$$

formules qui semblent inexactes; appliquons-les à l'équation

$$(1)\qquad x^3 + x - 2 = 0.$$

On a

$$a = 1, \quad b = 2, \quad \operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\frac{1}{8}},$$

$$\sin\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}, \quad x = \frac{\cos^3\psi}{\sin\psi}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Calcul de φ.	Calcul de ψ.	Calcul de x.
$\log\frac{1}{8} = \bar{1},0969100$	$\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \bar{1},2344487$	$\log\frac{1}{3} = \bar{1},5228787$
$\log\operatorname{tang}\varphi = \bar{1},5484550$	$\log\sin\psi = \bar{1},7448162$	$+\log\sqrt{\frac{1}{3}} = \bar{1},7614393$
$\varphi = 19°28'16'',4$	$\psi = 33°45'24'',5$	
$\frac{1}{2}\varphi = 9°44'08'',2$	$\log\cos\psi = 1,9198119$	$+\log\cos^3\psi = \bar{1},7594357$
		$-\log\sin\psi = 0,2551838$
		$\log x \quad \bar{1},7760588$
		$x = 0,59711.$

Résultat évidemment inexact, car l'unique racine réelle de l'équation (1) est $+1$.

2. Pour rectifier les formules (A), reprenons les formules données par Cagnoli (*Trigonométrie*, p. 201), et qui se trouvent dans le tome IX des *Nouvelles Annales*, p. 377, ligne 13, le second membre de la formule (3) devant être changé de signe.

a et b étant positifs, l'unique racine réelle de

$$x^3 + ax - b = 0$$

est donnée par le système suivant :

$$(\mathrm{B})\ \begin{cases} 0 < \varphi < 90^\circ, & \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{2}{b}\left(\dfrac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}. \\ 0 < \theta < 90^\circ, & \operatorname{tang}\theta = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\dfrac{1}{2}\varphi}, \quad x = \cot.2\theta\sqrt{\dfrac{a}{3}}. \end{cases}$$

$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$ se trouvant compris entre 0 et 1, il en est de même de $\operatorname{tang}\theta$; on peut poser

$$0 < \psi < 90^\circ, \quad \sin\psi = \operatorname{tang}\theta;$$

on en déduit

$$\cot 2\theta = \frac{1}{\operatorname{tang}2\theta} = \frac{1 - \operatorname{tang}^2.\theta}{2\operatorname{tang}\theta} = \frac{\cos^2\psi}{2\sin\psi},$$

d'où le système suivant :

$$0 < a, \quad 0 < b, \quad x^3 + ax - b = 0;$$

$$(\mathrm{C})\ \begin{cases} 0 < \varphi < 90^\circ, & \operatorname{tang}\varphi = \dfrac{2}{b}\left(\dfrac{a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}, \\ \sin\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\dfrac{\varphi}{2}}, & x = \dfrac{\cos^2\psi}{\sin\psi}\sqrt{\dfrac{a}{3}}, \end{cases}$$

Le système (C) doit être substitué au système (A), où l'erreur est due probablement à des fautes d'impression.

3. Appliquons les formules (C) à l'équation (1) :

$$\operatorname{tang}\varphi = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3, \quad \sin\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}}, \quad x = \frac{\cos^2\psi}{\sin\psi}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Calcul de φ.	Calcul de ψ.	Calcul de x.
$\log\frac{1}{3} = \bar{1},5228787$	$\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = \bar{2},9793213$	$+\log\cos^2\varphi = \bar{1},8983344$
$\log\sqrt{\frac{1}{3}} = \bar{1},76143935$	$\log\sin\psi = \bar{1},6597738$	$-\log\sin\psi = 0,3402262$
$\log\operatorname{tang}\varphi = \bar{1},2843180$	$\psi = 27°11'02'',6$	$+\log\sqrt{\frac{1}{3}} = \bar{1},7614393$
$\varphi = 10°53'36'',2$	$\log\cos\psi = \bar{1},9491672$	$\log x = 1,9999999$
$\frac{\varphi}{2} = 5°26'48'',1$		$x = 1.$

CONSTRUCTION DE L'HYPERBOLE ET DE LA DÉVELOPPÉE DE LA PARABOLE ;

PAR M. E. HABICH,
Directeur de l'École supérieure polonaise.

Soient O le centre, Ox la direction de l'axe transverse, et OD l'asymptote de l'hyperbole.

Traçons une ordonnée quelconque NP : soient N le point où elle coupe l'asymptote OD, et P le point où elle coupe l'axe Ox. A partir du point P et dans le sens des x positifs, portons une longueur *constante* PE égale au *demi-axe imaginaire*, et du point E ainsi déterminé comme centre, avec PN pour rayon, décrivons un arc de cercle; cet arc viendra couper l'ordonnée PN en un point M qui appartient à l'hyperbole.

On démontre cela en remarquant que l'ordonnée de l'hyperbole est moyenne proportionnelle entre les ordonnées correspondantes de deux droites parallèles à l'asymptote et passant par les deux sommets de la courbe.

Construction de la développée de la parabole.

Soit $ay^2 = x^3$ l'équation de la développée de la parabole; en passant aux coordonnées polaires, on a

$$(1) \qquad r = \frac{a \sin^2 \theta}{\cos^3 \theta} = \frac{a}{\cos^3 \theta} - \frac{a}{\cos \theta}.$$

Du côté des x positifs, à partir de l'origine O, portons une longueur $OA = a$, et par le point A ainsi déterminé élevons une perpendiculaire AD à Ox.

Pour construire maintenant la courbe par points, on mènera par le point O une transversale quelconque; cette transversale viendra couper AD en un point E; par le point E on élèvera une perpendiculaire à la transversale OE; cette perpendiculaire rencontrera l'axe Ox en un point F.

Par le point P pris sur l'axe Ox à une distance constante a à partir de F et dans le sens des x négatifs, on élèvera une perpendiculaire à Ox; cette perpendiculaire viendra couper la transversale OE en un point M qui appartient à la courbe en question.

On reconnaît cela en remarquant que

$$OE = \frac{a}{\cos \theta}, \quad OF = \frac{a}{\cos^2 \theta} \quad \text{et} \quad r = OM = \frac{OF}{\cos \theta} - \frac{FP}{\cos \theta},$$

$$r = \frac{a}{\cos^3 \theta} - \frac{a}{\cos \theta}.$$

Cette courbe porte le nom de la parabole semi-cubique, ou de la parabole de Neil; elle constitue dans la classification des courbes du troisième degré par Newton (*) la 70^e espèce de la classe des paraboles divergentes.

Remarque. — Si l'équation (1) se change en

$$r = \frac{a}{\cos^3 \theta} - \frac{b}{\cos \theta},$$

on a deux autres espèces des courbes de la même classe, auxquelles s'applique la construction précédente.

Lorsque $b < a$, on a une courbe à point isolé à l'origine, de l'espèce 69.

Lorsque $b > a$, on a une courbe à nœuds, de l'espèce 68.

NOTE

Sur l'intégration de quelques fonctions contenant un radical du second degré;

Par M. KOEHLER.

Soit, en premier lieu,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}};$$

Je suppose $c > 0$. En suivant la marche indiquée dans

(*) Isacii Newtoni *Enumeratio linearum tertii ordinis, etc.*, p. 17; ed. Parisiis; 1797.

les Traités de Calcul intégral, on trouve

$$(1)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left[b+2cx+\sqrt{4c(a+bx+cx^2)}\right]+\mathrm{C}.$$

Je présenterai, au sujet de ce résultat, les remarques suivantes :

1° En désignant le trinôme du second degré et ses deux dérivées par P, P′ et P″, on aura

$$\mathrm{P} = a + bx + cx^2,\quad \mathrm{P}' = b + 2cx,\quad \mathrm{P}'' = 2c.$$

Je substitue ces résultats dans (1) et j'obtiens

$$(2)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{P}}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left(\mathrm{P}' + \sqrt{2\mathrm{PP}''}\right) + \mathrm{C}.$$

Au moyen de cette dernière formule, on écrira immédiatement

$$\int \frac{8dx}{\sqrt{5-3x+7x^2}} = \frac{8}{\sqrt{7}}\, l\left[14x-3+\sqrt{28(5-3x+7x^2)}\right]+\mathrm{C};$$

$$\begin{aligned}\int \frac{3dx}{\sqrt{8+9x^2}} &= l\left[18x+\sqrt{36(8+9x^2)}\right]+\mathrm{C}\\ &= l\left(3x+\sqrt{8+9x^2}\right)+\mathrm{C}'.\end{aligned}$$

2° On a

$$\begin{aligned}\mathrm{P}' + \sqrt{2\mathrm{PP}''} &= b + 2cx + \sqrt{4c(a+bx+cx^2)},\\ \mathrm{P}' - \sqrt{2\mathrm{PP}''} &= b + 2cx - \sqrt{4c(a+bx+cx^2)};\end{aligned}$$

d'où

$$\left(\mathrm{P}' + \sqrt{2\mathrm{PP}''}\right)\left(\mathrm{P}' - \sqrt{2\mathrm{PP}''}\right) = b^2 - 4ac = \text{const.},$$

d'où

$$l\left(\mathrm{P}' + \sqrt{2\mathrm{PP}''}\right) = -\, l\left(\mathrm{P}' - \sqrt{2\mathrm{PP}''}\right) + \mathrm{C}''.$$

De cette égalité il résulte que la formule (2) peut être mise sous la forme suivante :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{c}}\, l\left(P' + \sqrt{2PP''}\right) + C''.$$

Soit, en second lieu, une intégrale de la forme

$$\int \frac{(A x^m + B x^{m-1} + \ldots + L)\, dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

Le numérateur est une fonction entière.

Pour fixer les idées, j'appliquerai la méthode que je propose à l'exemple suivant :

$$\int \frac{(5x^3 + x^2 - 3x + 1)\, dx}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}}.$$

Désignant le trinôme sous le radical par P et sa dérivée par P′, je pose

$$(\alpha) \quad \int \frac{5x^3 + x^2 - 3x + 1}{\sqrt{P}}\, dx = (ax^2 + bx + c)\sqrt{P} + \int \frac{Q\, dx}{\sqrt{P}}.$$

a, b, c désignent des constantes indéterminées. En différentiant l'équation (α), on aura

$$\frac{5x^3 + x^2 - 3x + 1}{\sqrt{P}} = (2ax + b)\sqrt{P} + (ax^2 + bx + c)\frac{P'}{2\sqrt{P}} + \frac{Q}{\sqrt{P}};$$

d'où

$$5x^3 + x^2 - 3x + 1 = (2ax + b)\, P + (ax^2 + bx + c)\, \frac{P'}{2} + Q.$$

Remplaçons P, P′ par leurs valeurs, puis effectuons les calculs indiqués, il viendra

$$5x^3 + x^2 - 3x + 1 = 6ax^3 + \left.\begin{array}{r} 10a \\ +4b \end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{r} 2a \\ +6b \\ +2c \end{array}\right| x + 2c + b + Q.$$

Je puis disposer des indéterminées a, b, c de manière que les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres soient égaux. On aura alors pour Q une valeur constante. Les valeurs de a, b, c sont fournies par les équations suivantes :

(β) $6a = 5, \quad 10a + 4b = 1, \quad 2a + 6b + 2c = -3;$

d'où

$$a = \frac{5}{6}, \quad b = -\frac{11}{6}, \quad c = \frac{19}{6},$$

par conséquent,

$$Q = -\frac{21}{6}.$$

Remplaçons, dans l'égalité (α), a, b, c, Q par leurs valeurs, il viendra

$$\int \frac{(5x^3 + x^2 - 3x + 1)}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}} dx = \left(\frac{5}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{19}{6}\right)\sqrt{1 + 4x + 2x^2}$$
$$- \frac{21}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}}.$$

En vertu de la formule (2), on écrira immédiatement

$$-\frac{21}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}}$$
$$= -\frac{21}{6\sqrt{2}}\, l\left[4x + 4 + \sqrt{8(2x^2 + 4x + 1)}\right] + C;$$

donc finalement :

$$\int \frac{5x^3 + x^2 - 3x + 1}{\sqrt{1 + 4x + 2x^2}} dx$$
$$= \left(\frac{5}{6}x^2 - \frac{11}{6}x + \frac{19}{6}\right)\sqrt{1 + 4x + 2x^2}$$
$$- \frac{7}{2\sqrt{2}}\, l\left[2x + 2 + \sqrt{2(2x^2 + 4x + 1)}\right] + C'.$$

Le système (β) est toujours possible, à cause de la constitution des équations de ce système. La marche à suivre pour le cas général est la même.

INCLINAISONS MUTUELLES DES ARÊTES OPPOSÉES DU TÉTRAÈDRE;

PAR M. GEORGES DOSTOR,
Professeur au lycée impérial de la Réunion.

1. Considérons le tétraèdre SABC, dans lequel nous poserons les trois arêtes de la base ABC,

$$BC = a, \quad CA = b, \quad AB = c,$$

et les arêtes latérales opposées,

$$SA = a', \quad SB = b', \quad SC = c'.$$

Représentons par α l'angle des deux arêtes opposées a et a', par β, γ les angles des arêtes b et b', c et c'.

Projetons la ligne brisée BASC sur l'arête BC, nous trouvons

$$a = c\cos ABC + a'\cos\alpha + c'\cos SCB,$$

d'où nous tirons

$$2aa'\cos\alpha = a^2 - 2ac\cos ABC + a^2 - 2ac'\cos SCB.$$

Mais les deux triangles ABC, SBC nous donnent

$$a^2 - 2ac\cos ABC = b^2 - c^2,$$
$$a^2 - 2ac'\cos SCB = b'^2 - c'^2;$$

nous obtenons donc, en substituant :

$$(1) \qquad 2aa'\cos\alpha = b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2.$$

On trouverait de même

$$(2) \qquad \begin{cases} 2bb'\cos\beta = c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2, \\ 2cc'\cos\gamma = a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2. \end{cases}$$

2. Ces trois équations donnent

$$(3)\qquad aa'\cos\alpha + bb'\cos\beta + cc'\cos\gamma = 0.$$

3. Représentons par p, q, r les droites qui joignent les milieux des arêtes opposées; p et q sont les diagonales d'un parallélogramme dont les côtés sont $\frac{c}{2}$, $\frac{c'}{2}$; il vient, par suite,

$$p^2 + q^2 = 2\cdot\frac{c^2}{4} + 2\cdot\frac{c'^2}{4}.$$

Nous avons donc les relations

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2p^2 + 2q^2 = c^2 + c'^2,\\ 2q^2 + 2r^2 = a^2 + a'^2,\\ 2r^2 + 2p^2 = b^2 + b'^2,\end{array}\right.$$

qui donnent

$$(5)\qquad 4p^2 + 4q^2 + 4r^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2.$$

4. Des égalités (4) on tire les valeurs

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} 4p^2 = b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 - a^2 - a'^2,\\ 4q^2 = c^2 + c'^2 + a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2,\\ 4r^2 = a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 - c^2 - c'^2.\end{array}\right.$$

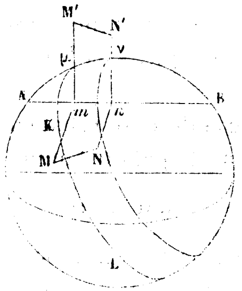
5. Si nous retranchons chacune de ces équations de la suivante, et la dernière de la première, nous obtenons, en ayant égard à (1) et (2),

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} aa'\cos\alpha = r^2 - q^2 = (r+q)(r-q),\\ bb'\cos\beta = p^2 - r^2 = (p+r)(p-r),\\ cc'\cos\gamma = q^2 - p^2 = (q+p)(q-p).\end{array}\right.$$

SUR LA PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX POINTS DE LA SPHÈRE;

PAR M. JULIEN DELAUNAY,
Élève du lycée de Bordeaux.

Lemme I. — Étant données une portion de droite mn, et à ses deux extrémités les perpendiculaires mM, nN de longueurs constantes; la droite MN sera minimum, lorsque les deux perpendiculaires seront dans un même plan.



Lemme II. — Étant données une sphère et une corde AB, on mène à cette corde un plan perpendiculaire en un point m, qui coupe la sphère suivant le cercle μKL. De tous les points du plan qui ne sont pas dans l'intérieur de ce cercle, le plus rapproché de m est le point μ, intersection du cercle μKL avec le plus petit des deux arcs de grand cercle que sous-tend AB. (*Ces deux lemmes sont faciles à démontrer.*)

THÉORÈME. — *Deux points* A *et* B *étant situés sur une sphère, de toutes les lignes qui les unissent, n'ayant aucun point dans l'intérieur de la sphère, la plus courte* *est l'arc de grand cercle* $A\mu B$, *moindre qu'une demi-circonférence.*

Je suppose tracé un tout autre chemin. Soit M un de ses points. Par M je mène le plan $Mm\mu$ perpendiculaire à AB, et je prends mM' égal à mM. Je substitue à la courbe une ligne brisée inscrite, partant de A et finissant en B, dont je rabats les sommets, de même que M. Je joins successivement ces points rabattus. Je forme ainsi dans le plan de l'équateur une autre ligne brisée, dont chaque côté, tel que $M'N'$, est moindre que son correspondant MN dans l'autre (lemme I); par suite, la première ligne brisée est moindre que la deuxième. Cela étant vrai quelle que soit la ligne inscrite, si je la fais tendre vers la courbe, la ligne brisée rabattue tendra vers une autre courbe qui, à la limite, sera moindre que la proposée.

Tout point M de celle-ci se rabat en dehors du segment circulaire, car on a, d'après le lemme II,

$$mM > m\mu.$$

La courbe rabattue part de A et se termine en B, ayant tous ses points tournés vers la convexité de l'arc $A\mu B$; elle est donc plus grande que lui, et cet arc est *à fortiori* plus petit que la courbe donnée. Cette courbe ayant été prise quelconque, l'arc $A\mu B$ est le plus court chemin qu'on peut suivre entre A et B sans pénétrer dans la sphère.

(C. Q. F. D.)

LIEU DES FOYERS DES CONIQUES INSCRITES DANS UN PARALLÉLOGRAMME DONNÉ;

Solution de M. Gabriel LIPPMANN,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée Napoléon.

On peut supposer les équations des quatre côtés du parallélogramme données sous la forme

$$\alpha + p = 0, \quad \alpha - p = 0, \quad \beta + q = 0, \quad \beta - q = 0;$$

p et q désignant les demi-hauteurs du parallélogramme donné, α et β désignant les distances d'un point (x, y) aux deux médianes du parallélogramme.

On sait que le produit des distances des deux foyers d'une conique à une tangente quelconque est une quantité constante. Soient (x, y) les coordonnées d'un foyer; (x_1, y_1) les coordonnées de l'autre foyer. Les distances du foyer (x, y) aux quatre côtés du parallélogramme sont respectivement $(\alpha + p)$, $(\alpha - p)$, $(\beta + q)$, $(\beta - q)$. Les distances du foyer (x_1, y_1) aux mêmes droites peuvent de même se désigner par $(\alpha_1 + p)$, $(\alpha_1 - p)$, $(\beta_1 + q)$, $(\beta_1 - q)$. On a donc, en raison de la propriété rappelée plus haut, les trois équations

$$\begin{aligned}(\alpha + p)(\alpha_1 + p) &= (\alpha - p)(\alpha_1 - p)\\ &= (\beta + q)(\beta_1 + q) = (\beta - q)(\beta_1 - q).\end{aligned}$$

Pour avoir le lieu du foyer (x, y), il suffit évidemment d'éliminer entre ces trois équations x_1 et y_1, ou α_1 et β_1.

La première équation se réduit à

$$\alpha_1 = -\alpha,$$

la troisième à

$$\beta_1 = -\beta.$$

En substituant ces valeurs dans la seconde équation, on a pour le lieu cherché l'équation $\alpha^2 - \beta^2 = p^2 - q^2$, qui représente une hyperbole (*).

QUESTION

du Concours de Mathématiques spéciales des lycées des départements;

Solution géométrique par M. Alphonse ELLIE,
Maître répétiteur au lycée de Bordeaux.

Étant donné un ellipsoïde, on propose : 1° de trouver sur sa surface un point, et dans l'espace une droite telle, que si on prend ce point pour sommet des cônes ayant pour directrices les sections de l'ellipsoïde par des plans passant par la droite, ces cônes soient de révolution ; 2° de trouver le lieu de la droite lorsque l'axe moyen varie.

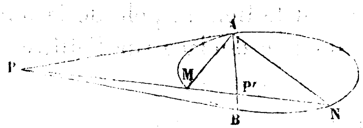
1° Prenons un point quelconque, A, sur l'ellipsoïde;

(*) Dans une conique à centre, la différence des carrés des distances d'un foyer à un diamètre quelconque, et du centre à la tangente parallèle à ce diamètre, est invariable, car elle est égale au produit des perpendiculaires abaissées des deux foyers sur la tangente. Il en résulte que la différence des carrés des distances d'un foyer à deux diamètres quelconques est égale à la différence des carrés des distances du centre aux deux tangentes parallèles à ces diamètres. Or, les médianes d'un parallélogramme sont évidemment deux diamètres communs à toutes les coniques tangentes aux quatre côtés du parallélogramme ; par conséquent le lieu des foyers de ces coniques est celui des points tels, que la différence des carrés de leurs distances aux deux médianes est une quantité constante (égale à $p^2 - q^2$) ; c'est-à-dire que ce lieu est une hyperbole équilatère dont l'équation rapportée aux deux médianes prises pour axes est

$$y^2 - x^2 = \frac{p^2 - q^2}{\sin^2 \varphi},$$

où φ représente l'un des angles formés par les médianes. G.

menons la normale, AB, en ce point, et les plans tangents aux extrémités A, B, de cette normale. Considérons un plan passant par la normale ; ce plan coupe l'ellipsoïde et les deux plans tangents suivant une ellipse et deux tangentes AP, BP. Le point P est le pôle de la normale; d'où il résulte que si l'on mène une sécante quelconque par ce point, elle rencontrera l'ellipse et la normale en des points M, N et P' tels, que le faisceau (A.PMP'N)



est harmonique, et comme AB est perpendiculaire à AP, toute droite perpendiculaire à la normale AB et limitée aux droites AM, AN sera divisée en deux parties égales par AB. Cela posé, considérons le cône ayant pour sommet le point A et pour directrice l'intersection de l'ellipsoïde par un plan passant par l'intersection des deux plans tangents mentionnés ci-dessus. Il résulte clairement de ce qui précède que toute section faite dans le cône parallèlement au plan tangent en A aura son centre sur AB; ce cône est donc droit; pour qu'il soit de révolution, il faut que ces sections soient des cercles : or, le point A est l'une de ces sections, ce point est donc un point cercle; mais il appartient à l'ellipsoïde, c'est donc l'un des quatre ombilics. Ainsi, *le point cherché est l'un des ombilics, et la droite est l'intersection des plans tangents à l'ellipsoïde menés aux extrémités de la normale à l'ombilic* (*).

2° L'ombilic étant dans une section principale perpen-

(*) Cette démonstration, assurément très-simple, détermine bien quatre solutions de la question proposée, mais elle n'établit pas que ce sont les seules solutions que la question puisse admettre. G.

diculaire à l'axe moyen, les deux plans tangents sont parallèles à cet axe; il en est de même de leur intersection. Cette droite, quand l'axe moyen varie de grandeur, se meut parallèlement à elle-même, engendrant un cylindre dont il est d'ailleurs facile d'avoir l'équation. Prenons pour plan des xy la section principale contenant l'ombilic; la droite est perpendiculaire à ce plan, et l'équation du cylindre est la même que celle de sa trace sur ce plan; mais cette trace est le lieu du pôle de la normale quand le point de contact se déplace sur l'ellipse; on sait que cette courbe a pour équation

$$x^2y^2(a^2-c^2)^2-a^6y^2-c^6x^2=0;$$

elle a quatre branches infinies, symétriques deux à deux par rapport aux axes et au centre, dont les asymptotes sont parallèles aux axes, et à des distances

$$x=\pm\frac{a^3}{a^2-c^2},\quad y=\pm\frac{c^3}{a^2-c^2}.$$

L'origine est un point isolé.

Même question;

Solution géométrique par M. Julien WELSCH,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Metz
(classe de M. Ribout).

Je nomme P et D le point et la droite cherchés; Q la section faite dans l'ellipsoïde par un plan passant par la droite D; DQ ce plan, et PQ le cône de révolution dont le sommet est P, et la base Q.

Le cône coupe l'ellipsoïde suivant deux courbes planes dont l'une se réduit à un point P. Si le plan DQ tourne autour de la droite D jusqu'à ce qu'il passe par le point P, la section Q passera elle-même en P, et le cône PQ coupera l'ellipsoïde suivant deux coniques planes réduites toutes deux au point P. Le plan DP est donc un plan tangent. D'ailleurs le point est un ombilic; car, lorsque le plan DQ est venu se confondre avec le plan DP, le cône PQ s'est réduit à ce plan. Comme ce cône est toujours de révolution autour d'un axe passant par le point P, on peut considérer le plan DP comme de révolution autour de la normale au point P à l'ellipsoïde, normale qui est perpendiculaire au plan DP. Or, on sait que tout plan tel que DP, perpendiculaire à l'axe d'un cône de révolution, coupe ce cône suivant un cercle; comme la courbe d'intersection se réduit au point P, ce point est un point cercle; c'est donc aussi un point cercle de l'ellipsoïde, c'est-à-dire un ombilic.

Le plan DP rencontrera tous les cônes PQ suivant des cercles réduits à un même point P; car le plan DP est le plan de la seconde courbe plane d'intersection des deux surfaces (cône PQ et ellipsoïde), et comme l'intersection de l'ellipsoïde par ce plan est un point cercle, il en est de même de l'intersection des cônes PQ par ce plan. Le plan DP est donc perpendiculaire à l'axe de ces cônes PQ, et ces cônes ont tous pour axe la normale en P à l'ellipsoïde.

Nous avons dit que le plan DP est un plan tangent à l'ellipsoïde; par la droite D il passe un second plan tangent à cette surface; soit P′ le point de contact. La section Q est ici réduite au point P′, et le cône PQ lui-même se réduit à son axe PP′. Puisque tous les cônes considérés ont pour axe la normale en P à l'ellipsoïde, on voit que PP′, axe de l'un de ces cônes, est la normale en P à l'ellipsoïde; cette normale a pour polaire la droite D, et cela suffit pour définir cette droite.

Le point P étant un ombilic appartient à l'ellipse principale dont les axes sont le grand et le petit axe de l'ellipsoïde; la normale PP′ est située tout entière dans ce plan; les plans tangents DP et DP′ sont perpendiculaires à ce plan, et leur intersection D lui est aussi perpendiculaire; elle est donc parallèle à l'axe moyen.

Si l'ellipsoïde n'est pas de révolution, il y a quatre ombilics, et comme à chacun d'eux correspond une droite D, le problème admet quatre solutions; si l'ellipsoïde est de révolution, deux des axes sont égaux; le point P est à l'une des extrémités du troisième axe, et la droite D est rejetée à l'infini, parallèlement aux plans cycliques; il y a deux solutions. Enfin, si les trois axes sont égaux, on a une sphère, tous les points de sa surface répondent à la question, et la droite D est la droite de l'infini sur le plan tangent au point P.

Supposons maintenant que le grand axe et le petit axe restant fixes, l'axe moyen varie. Le point P décrira l'ellipse principale fixe; et la droite D, restant constamment parallèle à l'axe moyen, décrira un cylindre dont une section droite sera dans le plan de cette ellipse. On pourra trouver l'équation de cette section droite en remarquant que le pied L de la droite D, sur ce plan, est le pôle de la normale en P à l'ellipse principale; il suffit donc de trouver le lieu des pôles L des normales à cette ellipse.

Nommons a, b, c les demi-axes de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

En supposant

$$a>b>c,$$

l'ellipse considérée, et la normale en un point quelconque (x, y) de cette courbe, auront pour équations

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

et

$$(2) \qquad a^2 z X - c^2 x Z = (a^2 - c^2) xz.$$

La polaire du point L ou (α, γ) sera représentée par

$$(3) \qquad c^2 \alpha X + a^2 \gamma Z = a^2 c^2.$$

En identifiant les équations (2) et (3), on a

$$x = \frac{a^4}{(a^2 - c^2)\alpha}, \quad z = \frac{-c^4}{(a^2 - c^2)\gamma},$$

et la substitution de ces valeurs de x, y dans l'équation (1) donne

$$a^6 \gamma^2 + c^6 \alpha^2 = (a^2 - c^2)^2 \alpha^2 \gamma^2.$$

C'est l'équation du lieu cherché (*).

Même question ;

SOLUTION ANALYTIQUE PAR M. ÉDOUARD DUVIVIER,
Élève au lycée de Bordeaux (classe de M. de Lagrandval.)

Je prends pour origine des coordonnées un point quelconque de l'ellipsoïde ; pour axe des z la normale en ce point, et pour axes des x et des y deux droites rectangulaires quelconques dans le plan tangent à l'origine à l'ellipsoïde dont l'équation est

$$(1) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2C''z = 0.$$

Le cône ayant son sommet à l'origine, et pour directrice la section de l'ellipsoïde par un plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - 1 = 0,$$

(*) Suit une description très-complète et très-détaillée de la courbe que cette équation représente ; nous la supprimons, présumant que le lecteur y suppléera facilement.

où α, β, γ sont des paramètres variables, a pour équation

$$\begin{gathered} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz \\ + 2B'xz + 2B''xy + 2C''z(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \ (*), \end{gathered}$$

ou bien

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & Ax^2 + A'y^2 + (A'' + 2C''\gamma)z^2 \\ & \quad + 2(B + C''\beta)yz + 2(B' + C''\alpha)xz + 2B''xy = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations qui expriment que ce cône est de révolution sont les suivantes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & A - \frac{B''(B' + C''\alpha)}{B + C''\beta} = A' - \frac{B''(B + C''\beta)}{B' + C''\alpha} \\ & \quad = A'' + 2C''\gamma - \frac{(B + C''\beta)(B' + C''\alpha)}{B''}. \end{aligned} \right.$$

Pour que les plans $\alpha x + \beta y + \gamma z - 1 = 0$ passent par une droite fixe, il faut qu'au moyen des équations (3) il soit possible d'exprimer deux des paramètres α, β, γ par des fonctions du troisième paramètre, rationnelles et ne contenant ce paramètre qu'à la première puissance.

Je pose, pour abréger,

$$(4) \quad B' + C''\alpha = K, \quad B + C''\beta = K', \quad A'' + 2C''\gamma = M.$$

Les équations (3) deviennent

$$(5) \qquad A - B''\frac{K}{K'} = A' - B''\frac{K'}{K} = M - \frac{KK'}{B''};$$

(*) Cette équation montre que tous les cônes qui ont pour sommet commun un point de l'ellipsoïde, et pour directrices des sections planes de cette surface, sont coupés, ainsi que l'ellipsoïde, suivant des courbes semblables, par des plans parallèles à celui qui touche l'ellipsoïde au sommet commun de tous ces cônes. Dans le cas particulier où le point pris sur l'ellipsoïde est un *ombilic*, ces courbes semblables deviennent des cercles. G.

on en déduit

$$(A - A')K'K = B''(K^2 - K'^2),$$

et

$$K' = B''\left(\frac{A' - M}{B''^2 - K^2}\right)K.$$

J'élimine K′ entre ces deux équations, il vient

$$(B''^2 - K^2)^2 - (A - A')(A' - M)(B''^2 - K^2) - B''^2(A' - M)^2 = 0,$$

d'où je tire

$$B''^2 - K^2 = \frac{(A' - M)}{2}\left[A - A' \pm \sqrt{(A - A')^2 + 4B''^2}\right],$$

et, par suite,

$$K = \pm\sqrt{B''^2 - \frac{A' - M}{2}\left[A - A' \pm \sqrt{(A - A')^2 + 4B''^2}\right]}.$$

Pour que le paramètre α soit une fonction rationnelle de γ, il faut que K s'exprime en fonction rationnelle de M ; ce qui exige qu'on ait

$$B'' = 0, \quad A - A' = 0.$$

Il faut donc que l'ellipsoïde soit rapportée à un des points de sa surface tel, que son équation soit de la forme

$$x^2 + y^2 + Pz^2 + 2Qyz + 2Q'xz + 2Rz = 0.$$

Sous cette forme, on voit que les sections de la surface par des plans parallèles au plan des xy sont des cercles; par suite, nous pouvons affirmer que les seuls points de l'ellipsoïde jouissant de la propriété demandée sont les ombilics.

Pour déterminer la droite cherchée, je prends l'ombilic pour origine des coordonnées; la normale pour axe des z; deux droites rectangulaires dans le plan tangent pour axes des x et des y.

Comme nous venons de le voir, l'équation de l'ellipsoïde est

$$(6) \qquad x^2 + y^2 + Pz^2 + 2Qyz + 2Q'xz + 2Rz = 0.$$

L'équation du cône dont le sommet est à l'origine, et qui a pour directrice la section de l'ellipsoïde par le plan

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z) - 1 = 0,$$

est

$$x^2 + y^2 + Pz^2 + 2Qyz + 2Q'xz + 2Rz(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0.$$

Les conditions pour que le cône soit de révolution deviennent

$$Q' + R\alpha = 0, \quad Q + R\beta = 0;$$

d'où

$$\alpha = -\frac{Q'}{R}, \quad \beta = -\frac{Q}{R}.$$

L'équation des plans

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - 1 = 0$$

devient

$$Q'x + Qy - \gamma Rz + R = 0.$$

Ces plans passent tous par la droite

$$z = 0, \quad Q'x + Qy + R = 0,$$

qui est située dans le plan des xy (*).

(*) En laissant les axes des x et des y rectangulaires dans le plan tangent, on peut faire disparaître l'un des rectangles yz, xz de l'équation (6).
Si c'est le premier qui disparaît, l'équation de l'ellipsoïde se réduisant à

$$x^2 + y^2 + Pz^2 + 2Q''xz + 2Rz = 0,$$

on voit que le plan des xz est le plan principal de l'ellipsoïde qui passe par les ombilics. La droite

$$z = 0, \quad Q'x + Qy + R = 0,$$

Il est maintenant facile de trouver le lieu de cette droite quand l'axe moyen de l'ellipsoïde varie (*).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 767;

PAR M. E. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

Les cercles circonscrits aux différents triangles semi-réguliers inscrits dans une ellipse ont pour centre radical commun le centre de cette ellipse.

Le lieu de leurs centres est une ellipse; leur enveloppe est une anallagmatique du quatrième ordre. (FOURET.)

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation de l'ellipse; $a\cos u$, $b\sin u$, les coordonnées

---

est alors représentée par les équations

$$z=0,\quad Q''x+R=0.$$

Cette droite est par conséquent parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire à l'axe moyen de l'ellipsoïde. De plus, elle coupe le plan des xz, ou des ombilics, au point

$$z=0,\quad y=0,\quad x=-\frac{R}{Q''},$$

qui est le pôle de l'axe des z, ou de la normale à l'ombilic, par rapport à l'ellipse principale dont le plan est perpendiculaire à l'axe moyen.

G.

(*) Nous supprimons les calculs que M. Duvivier a faits à ce sujet, l'équation du lieu ayant déjà été donnée par M. Welsch (*voir* p. 462).

de l'un de ses points que je prends pour sommet de l'un des triangles semi-réguliers inscrits dans l'ellipse; les coordonnées des deux autres sommets de ce triangle seront

$$a\cos\left(u+\frac{2\pi}{3}\right),\quad b\sin\left(u+\frac{2\pi}{3}\right),$$

et

$$a\cos\left(u+\frac{4\pi}{3}\right),\quad b\sin\left(u+\frac{4\pi}{3}\right).$$

La circonférence qui passe par ces trois points a pour équation

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2, & x, & y, & 1 \\ a^2\cos^2 u+b^2\sin^2 u, & a\cos u, & b\sin u, & 1 \\ a^2\cos^2\left(u+\frac{2\pi}{3}\right)+b^2\sin^2\left(u+\frac{2\pi}{3}\right), & a\cos\left(u+\frac{2\pi}{3}\right), & b\sin\left(u+\frac{2\pi}{3}\right), & 1 \\ a^2\cos^2\left(u+\frac{4\pi}{3}\right)+b^2\sin^2\left(u+\frac{4\pi}{3}\right), & a\cos\left(u+\frac{4\pi}{3}\right), & b\sin\left(u+\frac{4\pi}{3}\right), & 1 \end{vmatrix}=0,$$

ou, en développant ce déterminant :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & x^2+y^2+x\frac{c^2}{2a}\cos u(4\sin^2 u-1) \\ & -y\frac{c^2}{2b}\sin u(4\cos^2 u-1)-\frac{a^2+b^2}{2}=0, \end{aligned}\right.$$

c^2 représentant a^2-b^2.

La puissance du centre de l'ellipse pour tous les cercles compris dans l'équation précédente est $-\frac{a^2+b^2}{2}$; donc, tous ces cercles ont un centre radical commun qui est le centre de l'ellipse (*).

(*) Un triangle semi-régulier (abc), inscrit dans l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, est la projection d'un triangle équilatéral (ABC) inscrit dans un cercle décrit sur le grand axe $2a$ de l'ellipse comme diamètre, et dans un plan

Les coordonnées du centre du cercle que l'équation (1) représente sont données par les équations

$$2x + \frac{c^2}{2a}\cos u(4\sin^2 u - 1) = 0,$$

$$2y - \frac{c^2}{2b}\sin u(4\cos^2 u - 1) = 0.$$

qui peuvent s'écrire

$$\frac{16a^2}{c^4}x^2 = \cos^2 u(4\sin^2 u - 1)^2,$$

$$\frac{16b^2}{c^4}y^2 = \sin^2 u(4\cos^2 u - 1)^2.$$

---

qui forme avec celui de l'ellipse un angle dont le cosinus est $\frac{b}{a}$. La somme des carrés des distances des sommets A, B, C du triangle équilatéral, à un diamètre quelconque du cercle circonscrit, est, comme on sait, une quantité invariable qui, dans le cas actuel, a pour valeur $\frac{3a^2}{2}$, puisque le rayon du cercle est a. De là il faut immédiatement conclure que la somme des carrés des abscisses des sommets a, b, c de tout triangle semi-régulier inscrit dans l'ellipse est égale à $\frac{3a^2}{2}$, et que la somme des carrés des ordonnées de ces trois points est égale à $\frac{3b^2}{2}$. Par conséquent, en nommant O le centre de l'ellipse, on a constamment

$$\overline{Oa}^2 + \overline{Ob}^2 + \overline{Oc}^2 = \frac{3(a^2+b^2)}{2}.$$

Remarquons, de plus, que le centre O de l'ellipse étant le centre des moyennes distances des sommets a, b, c de tout triangle semi-régulier inscrit, on a, pour un point quelconque m, la relation

$$ma^2 + mb^2 + mc^2 = 3\overline{Om}^2 + \overline{Oa}^2 + \overline{Ob}^2 + \overline{Oc}^2 = 3\overline{Om}^2 + \frac{3(a^2+b^2)}{2}.$$

Si le point m est le centre d'un cercle circonscrit au triangle abc et ayant r pour rayon, la relation précédente devient

$$3r^2 = 3.Om^2 + \frac{3(a^2+b^2)}{2},\quad \text{d'où}\quad Om^2 - r^2 = -\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right),$$

égalité qui démontre la proposition énoncée. G.

En les ajoutant, on trouve

$$\frac{16a^2x^2}{c^4} + \frac{16b^2y^2}{c^4} = 1.$$

Cette dernière équation montre que le lieu des centres des cercles considérés est une ellipse semblable à l'ellipse proposée, mais inversement placée (*).

Si l'on prend la dérivée de l'équation (1) par rapport à u, on trouve

$$\frac{x \sin u}{a}(4\cos^2 u - 1) + \frac{y \cos u}{b}(4\sin^2 u - 1) = 0.$$

Pour avoir l'équation de l'enveloppe des cercles (1), il faut éliminer u entre l'équation précédente et l'équation

$$0 = \frac{yc^2}{2b}\sin u(4\cos^2 u - 1)$$
$$- \frac{xc^2}{2a}\cos u(4\sin^2 u - 1) - (x^2 + y^2) + \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

(*) Lorsqu'une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est coupée par un cercle dont les coordonnées du centre sont α, β, quel que soit le rayon de ce cercle, la somme des abscisses des quatre points d'intersection est égale à $4 \cdot \frac{a^2}{c^2}\alpha$, et la somme des ordonnées de ces points est égale à $-4 \cdot \frac{b^2}{c^2}\beta$. Or, si trois de ces quatre points sont les sommets d'un triangle semi-régulier inscrit dans l'ellipse, les sommes de leurs abscisses et de leurs ordonnées étant, séparément, nulles, le quatrième point d'intersection aura pour coordonnées $4 \cdot \frac{a^2}{c^2}\alpha$ et $-4 \cdot \frac{b^2}{c^2}\beta$. Il suffit donc, pour avoir l'équation du lieu du centre (α, β), de remplacer dans l'équation de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, les coordonnées courantes x et y par $\frac{4a^2}{c^2}x$ et $-\frac{4b^2}{c^2}y$, ce qui donne

$$\frac{16a^2x^2}{c^4} + \frac{16b^2y^2}{c^4} = 1. \qquad \text{G.}$$

De ces équations on tire

$$\sin^2 u\,(4\cos^2 u - 1)^2 = \frac{y^2(a^2+b^2-2x^2-2y^2)^2}{c^4 b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2},$$

$$\cos^2 u\,(4\sin^2 u - 1)^2 = \frac{x^2(a^2+b^2-2x^2-2y^2)^2}{c^4 a^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2};$$

et, ajoutant membre à membre, il vient

$$1 = \frac{(a^2+b^2-2x^2-2y^2)^2(a^2y^2+b^2x^2)}{c^4 a^2 b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2}.$$

Ainsi, l'équation de l'enveloppe est

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{a^2+b^2-2x^2-2y^2}{c^2}\right)^2$$

en coordonnées rectangulaires, et

$$(3)\qquad \frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2} = \left(\frac{a^2+b^2-2\rho^2}{c^2\rho}\right)^2$$

en coordonnées polaires.

Transformons cette courbe par rayons vecteurs réciproques, en prenant l'origine pour pôle; l'équation de la courbe transformée sera

$$\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2} = \left[\frac{(a^2+b^2)\rho^2-2k^4}{c^2k^2\rho}\right]^2,$$

ou

$$\frac{\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\sin^2\omega}{b^2} = \left[\frac{\dfrac{(a^2+b^2)}{k^2}\rho^2-2k^2}{c^2\rho}\right]^2,$$

k^2 représentant le paramètre de la transformation.

Si l'on prend k^2 égal à $\frac{a^2+b^2}{2}$, la courbe se transforme en elle-même; elle est donc *anallagmatique* (*).

Note. — Solutions analogues de MM. Charles Ribaucourt, élève à l'École Polytechnique; J. Vollot et L. Plasse, élèves du lycée de Lyon; Driant, élève du lycée de Metz; Édouard Besson, élève du lycée de Besançon.

Seconde solution de la question 813;

Par M. J.-Ch. DUPAIN.

On sait qu'en représentant $\sin x$ par y et $\sin 9x$ par a

$$(1) \qquad 256y^9 - 576y^7 + 432y^5 - 120y^3 + 9y - a = 0.$$

Supposons que a soit nul, c'est-à-dire que $9x$ soit de la forme $0^\circ \pm 180^\circ K$, x sera de la forme $0^\circ \pm 20^\circ K$, et les racines de l'équation (1) seront les différentes valeurs de $\sin(0^\circ \pm 20^\circ K)$. Or, en laissant de côté la valeur zéro, on trouve huit autres valeurs distinctes, qui sont

$$\pm \sin 20^\circ, \quad \pm \sin 40^\circ, \quad \pm \sin 60^\circ, \quad \pm \sin 80^\circ.$$

L'équation

$$(2) \qquad 256u^4 - 576u^2 + 432u^2 - 120u + 9 = 0$$

(*) Le centre O de l'ellipse ayant la même puissance pour tous les cercles circonscrits aux triangles semi-réguliers inscrits, si l'on conduit de ce centre une droite OM à l'un des points d'intersection de deux cercles du système considéré, cette droite, prolongée de l'autre côté de O, ira nécessairement passer par le second point d'intersection N des deux cercles. Il est facile d'en conclure que chacun des cercles du système est touché par l'enveloppe en deux points m, n appartenant à une droite passant par le point O; et comme $Om \times On = \frac{a^2+b^2}{2}$, il est clair qu'en prenant O et $\frac{a^2+b^2}{2}$ pour pôle et coefficient de la transformation, on obtiendra pour transformée l'enveloppe elle-même. G.

a donc pour racines

$$\sin^2 20^\circ,\quad \sin^2 40^\circ,\quad \sin^2 60^\circ,\quad \sin^2 80^\circ;$$

le produit de ces racines est $\frac{9}{256}$, donc

$$\sin 20 . \sin 40^\circ . \sin 60^\circ . \sin 80^\circ = + \frac{3}{16};$$

on prend le signe + parce que tous les facteurs du premier membre sont positifs.

La seconde égalité proposée se démontre de la même manière, et en général on pourrait, au moyen des coefficients de l'équation (2), calculer une fonction symétrique rationnelle des quantités

$$\sin^2 20^\circ,\quad \sin^2 40^\circ,\quad \sin^2 60^\circ,\quad \sin^2 80^\circ.$$

Note du Rédacteur. — En désignant par n un nombre entier et positif, on a généralement :

$$(1)\quad \sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\cdots\sin\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = + \frac{\sqrt{2n+1}}{2^n},$$

$$(2)\quad \cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\cdots\cos\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \frac{1}{2^n};$$

d'où

$$(3)\quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\cdots\operatorname{tang}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{2n+1},$$

$$(4)\quad \text{séc}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)\text{séc}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\text{séc}\left(\frac{3\pi}{2n+1}\right)\cdots\text{séc}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right) = 2^n.$$

On fait disparaître le radical en posant $n = 4$, $n = 12$, etc.

Il est clair que les relations indiquées (question 813) sont comprises dans ces formules générales.

L'égalité (2) montre que la série

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \ldots$$

a pour limite l'unité. G.

Question 683

(voir 2e série, t. II, p. 551);

PAR M. LAISANT,
Capitaine du génie.

Soient

$$l\cos\theta + m\sin\theta\cos\varphi + n\sin\theta\sin\varphi$$
$$+ p\cos^2\theta + q\sin^2\theta\cos^2\varphi + r\sin^2\theta\sin^2\varphi = \mathrm{U},$$

$$\frac{l^2}{2p+\psi} + \frac{m^2}{2q+\psi} + \frac{n^2}{2r+\psi} + \psi = \mathrm{V}.$$

Il faut démontrer que l'équation résultant de l'élimination de θ *et de* φ *entre* $\mathrm{U} = 0$, $\frac{d\mathrm{U}}{d\theta} = 0$, $\frac{d\mathrm{U}}{d\varphi} = 0$ *sera identique avec celle qui provient de l'élimination de* ψ *entre* $\mathrm{V} = 0$, $\frac{d\mathrm{V}}{d\psi} = 0$. (CAYLEY.)

Je forme l'équation $\frac{d\mathrm{U}}{d\varphi} = 0$, qui me donne

$$\frac{m}{\sin\theta\cos\varphi} + 2q = \frac{n}{\sin\theta\sin\varphi} + 2r.$$

Écrivant maintenant $\frac{d\mathrm{U}}{d\theta} = 0$, en tenant compte de la relation précédente, on trouve

$$\frac{l}{\cos\theta} + 2p = \frac{m}{\sin\theta\cos\varphi} + 2q.$$

Posons cette quantité égale à une inconnue auxiliaire $-z$; il viendra la triple égalité

$$\frac{l}{\cos\theta} + 2p = \frac{m}{\sin\theta\cos\varphi} + 2q = \frac{n}{\sin\theta\sin\varphi} + 2r = -z.$$

D'où

$$\cos\theta = -\frac{l}{2p+z},$$

$$\sin\theta\cos\varphi = -\frac{m}{2q+z},$$

$$\sin\theta\sin\varphi = -\frac{n}{2r+z}.$$

Il s'agit d'éliminer θ, φ et z entre ces trois équations et $\mathrm{U}=0$. Or, si nous éliminons θ et φ entre les équations que nous venons d'écrire, en les élevant au carré et les ajoutant, il vient

$$(1)\qquad \frac{l^2}{(2p+z)^2}+\frac{m^2}{(2q+z)^2}+\frac{n^2}{(2r+z)^2}=1.$$

Si, d'autre part, nous formons l'équation $\mathrm{U}=0$, en remplaçant $\cos\theta$, $\sin\theta\cos\varphi$, $\sin\theta\sin\varphi$ par leurs valeurs écrites ci-dessus, nous avons :

$$-\frac{l^2}{2p+z}-\frac{m^2}{2q+z}-\frac{n^2}{2r+z}$$
$$+\frac{pl^2}{(2p+z)^2}+\frac{qm^2}{(2q+z)^2}+\frac{rn^2}{(2r+z)^2}=0.$$

Écrivons le terme $\dfrac{pl^2}{(2p+z)^2}$ sous cette forme:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{2p+z}-\frac{l^2z}{(2p+z)^2}\right);$$

opérons d'une façon analogue pour les deux derniers termes, changeons les signes et multiplions par 2 ; l'équation deviendra

$$\frac{l^2}{2p+z}+\frac{m^2}{2q+z}+\frac{n^2}{2r+z}$$
$$+z\left(\frac{l^2}{(2p+z)^2}+\frac{m^2}{(2q+z)^2}+\frac{n^2}{(2r+z)^2}\right)=0.$$

En vertu de l'équation (1), elle se réduit à

$$(2) \qquad \frac{l^2}{2p+z} + \frac{m^2}{2q+z} + \frac{n^2}{2r+z} + z = 0.$$

Il resterait à éliminer z entre les équations (1) et (2). Or, il est évident qu'au changement près de z en ψ, l'équation (2) n'est autre que $V = 0$. On vérifie sans plus de peine que l'équation (1) est identique avec $\frac{dV}{d\psi} = 0$; les deux éliminations conduiront donc au même résultat.

Note. — Autre solution de M. G.-B. Maffiotti, élève à l'Université de Turin.

NOTE SUR LA QUESTION 787.

(*Voir* le nº d'octobre 1866.)

Déterminer le lieu géométrique du centre d'une sphère qui coupe sous des angles α, β, γ trois sphères données A, B, C.

Plusieurs solutions de ce problème nous ont été communiquées; aucune d'elles ne détermine *exactement* le lieu géométrique dont il s'agit.

Dans quelques-unes, il est bien démontré que le centre d'une sphère qui coupe sous les angles α, β, γ les trois sphères A, B, C, appartient nécessairement à l'un des plans d'un certain système que le calcul a déterminé; mais on en a conclu, à tort, que le lieu cherché se compose du système de ces plans.

D'autres solutions, ne tenant aucun compte des doubles signes dont les cosinus doivent être précédés dans le calcul qui a été fait (*), ont abouti à cette conclusion : que le lieu géométrique cherché est formé d'une seule conique située dans un plan passant par l'axe radical des trois sphères données. S'il en était ainsi, on ne pourrait trouver sur le plan des centres A, B, C que deux circonférences coupant sous les angles α, 6, γ les trois grands cercles des sphères A, B, C qui appartiennent à ce plan; ce qui est inexact, car il y a généralement huit circonférences satisfaisant à cette condition. Leurs centres forment quatre systèmes de deux points situés respectivement sur quatre droites concourantes au centre radical des trois cercles considérés.

Nous engageons donc les personnes qui ont traité la question 787, à examiner de nouveau les raisonnements et les calculs qu'elles ont faits pour la résoudre. G.

QUESTION DE GÉOMÉTRIE;

Solution de M. Eugène FORNASARI,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Besançon.

Placer sur trois circonférences données les sommets d'un triangle dont les côtés soient parallèles aux droites

---

(*) En prenant pour $\alpha, 6, \gamma$ des angles aigus, si le point O extérieur à la sphère A représente le centre d'une seconde sphère coupant la première sous l'angle α, et que les rayons des sphères O et A soient ρ et r, on aura

$$\overline{OA}^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\alpha \quad \text{ou} \quad \overline{OA}^2 = \rho^2 + r^2 + 2\rho r \cos\alpha,$$

selon que le rayon ρ sera plus grand ou plus petit qu'une tangente menée du point O à la sphère A.

qui unissent deux à deux les centres de ces circonférences (*).

On sait que le lieu des points d'où deux circonférences sont vues sous un même angle est une circonférence décrite sur la distance des centres de similitude, directe et inverse, comme diamètre; et, de plus, que si l'on considère trois circonférences, deux à deux, les trois lieux ont une corde commune.

Par conséquent, il existe deux points d'où trois circonférences données sont vues sous des angles égaux.

Soient O, O′, O″ les centres des trois circonférences données, P l'un des deux points d'où ces trois circonférences sont vues sous des angles égaux.

Je mène les droites PO, PO′, PO″, qui coupent les circonférences en des points A, B; A′, B′; A″, B″. Je mène aussi les tangentes PC, PC′, PC″ aux trois circonférences.

Les trois triangles OCP, O′C′P, O″C″P sont semblables, par conséquent

$$\frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{R}}=\frac{\mathrm{PO}'}{\mathrm{R}'}=\frac{\mathrm{PO}''}{\mathrm{R}''},$$

en appelant R, R′, R″ les rayons des trois cercles.

Il suit de là que les triangles PAA′, POO′ sont semblables, et que AA′ est parallèle à OO′. De même, A′A″, AA″ sont parallèles à O′O″, OO″, et, par suite, le triangle AA′A″ répond à la question; il en est de même du triangle BB′B″.

En considérant le second point P′, d'où les trois circonférences sont vues sous des angles égaux, on obtiendrait encore deux autres triangles semblables au triangle

(*) Nous avons modifié l'énoncé que M. Fornasari a donné à la question qu'il a résolue; sa solution ne répondant pas à la question 786.

obtenu en joignant les centres des circonférences données.

Note du Rédacteur. — La question de placer sur trois circonférences données O, O′, O″ les sommets d'un triangle semblable au triangle OO′O″ peut admettre une infinité de solutions. Car, en prenant un point quelconque, A, sur l'une des circonférences, O, on peut considérer ce point comme l'un des trois sommets du triangle cherché, et déterminer un second sommet B sur la circonférence O′ par l'intersection de cette circonférence et d'une autre dont le centre et le rayon se déterminent facilement (*). G.

QUESTIONS.

825. Dans un triangle inscrit à une conique, le pôle d'un côté et les seconds points d'intersection de la courbe et des bissectrices des angles formés au sommet opposé sont en ligne droite. (J.-J.-A. Mathieu.)

826. Si n est un nombre entier quelconque, l'un des quatre nombres n^2, n^2-1, n^2-4, n^2+3 est divisible par 12, et le quotient marque le nombre des solutions différentes de l'équation indéterminée $x+y+z=n$, en nombres entiers et positifs dont aucun n'est nul.

(Vachette.)

827. Déterminer *géométriquement* les trajectoires orthogonales :

(*) Pour que ces deux circonférences se coupent, il faut, toutefois, qu'on ait

$$R.O'O'' < R'.OO'' + R''.OO',$$
$$R'.OO'' < R.O'O'' + R''.OO',$$
$$R''.OO' < R.O'O'' + R'.OO'',$$

c'est-à-dire que le produit du rayon de chacune des trois circonférences données, par la distance du centre des deux autres, doit être moindre que la somme des deux autres produits analogues.

Quand ces conditions sont remplies, le nombre des solutions est illimité.

1° De toutes les paraboles ayant même foyer et même axe, et dont les branches infinies sont tournées dans le même sens;

2° De toutes les paraboles ayant même sommet et même axe. (LAISANT.)

828. Déterminer *géométriquement* un cercle qui coupe sous des angles donnés α, β, γ trois cercles A, B, C, donnés sur un même plan. Nombre des solutions.

829. On donne dans un plan une ellipse et une circonférence (O) concentriques. Une seconde circonférence (O') roule sans glisser sur la première. On demande le lieu des points d'intersection des tangentes communes à la circonférence (O') et à l'ellipse.

(E. DEMAN.)

830. On donne dans un plan deux circonférences (O) et (O'). Un point P se meut sur la première (O); l'enveloppe des polaires de ce point par rapport à la circonférence O' est une conique. Trouver le lieu du centre de cette conique lorsque le centre de la circonférence O' se meut sur une circonférence O'' concentrique à la première (O). (E. DEMAN.)

831. Soient α, β, γ, δ, ε cinq quantités quelconques. Posons

$$A=(\beta-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2+(\beta-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2+(\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2,$$
$$B=(\alpha-\gamma)^2(\delta-\varepsilon)^2+(\alpha-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2+(\alpha-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2,$$
$$C=(\alpha-\beta)^2(\delta-\varepsilon)^2+(\alpha-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2+(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\delta)^2,$$
$$D=(\alpha-\beta)^2(\gamma-\varepsilon)^2+(\alpha-\gamma)^2(\beta-\varepsilon)^2+(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2,$$
$$E=(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2+(\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2+(\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2;$$
$$\begin{aligned}\Pi=&(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2(\alpha-\delta)^2(\alpha-\varepsilon)^2(\beta-\gamma)^2\\&\times(\beta-\delta)^2(\beta-\varepsilon)^2(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2,\end{aligned}$$
$$P=\sum(\alpha-\beta)^4(\gamma-\delta)^2(\gamma-\varepsilon)^2(\delta-\varepsilon)^2.$$

Démontrer la relation suivante :

$$\text{ABCDE} - 2\,\text{P}^2 = 24\,\Pi.$$

(MICHAEL ROBERTS.)

832. Lorsqu'une conique est inscrite à un triangle, son paramètre est égal au diamètre d'un cercle inscrit au triangle, multiplié par le produit des sinus des angles formés par le cercle avec les droites qui joignent l'un des foyers de la conique aux sommets du triangle.

(H. FAURE.)

833. Si les nombres entiers a, b, c sont racines de l'équation

$$x^3 - px + q = 0,$$

on aura

$$p^2 + 3y'a^2 = r'^2,\quad p^2 + 3y''b^2 = r''^2,\quad p^2 + 3y''c^2 = r'''^2;$$

y', y'', y''' et r', r'', r''' étant racines entières de deux équations cubiques que l'on peut construire, et dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et entières de p et q. Le produit $r'r''r'''$, pris positivement, sera un carré.

(S. RÉALIS.)

834. Si a et b sont les deux axes d'une ellipse; R, R_1 les rayons de deux cercles osculateurs; d la distance de leurs centres; p la distance du centre de l'ellipse à l'axe radical des deux cercles, on a la relation

$$2\,dp = 3\,a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{2}{3}}\left(\text{R}_1^{\frac{2}{3}} - \text{R}^{\frac{2}{3}}\right).$$

(L. PAINVIN.)

835. Une sphère et un plan étant donnés, démontrer que toutes les sphères décrites des différents points du plan comme centres, avec des rayons égaux aux tangentes menées de ces points à la sphère donnée, passent par un point fixe, et déterminer ce point.

(Vittorio SANNDI.)

MOUVEMENTS RELATIFS A LA SURFACE DE LA TERRE

(voir p. 387);

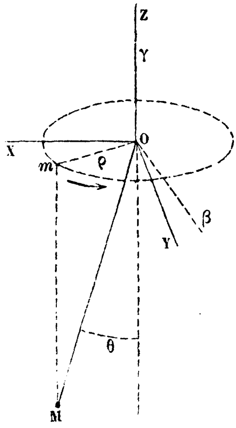
PAR M. C.-E. PAGE,
Professeur à l'École d'Artillerie de Vincennes.

Pendule conique.

Parmi les différents problèmes que présente la question des mouvements relatifs, un des plus intéressants est celui du pendule conique, parce que c'est dans le mouvement de ce pendule qu'on peut constater de la manière la plus évidente l'influence de la rotation de la terre, comme le prouve la belle expérience de M. Foucault (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1851).

Le pendule OM ayant l'entière liberté de tourner dans

FIG. 1.



tous les sens autour du point de suspension O, nous pouvons nous représenter tous les mouvements de ce pendule, en supposant qu'il tourne, avec une certaine vitesse angulaire variable β, autour d'un axe $O\beta$ auquel il reste constamment perpendiculaire; tandis que cet axe lui-même tourne avec une certaine vitesse angulaire variable γ autour de la verticale OZ.

Le plan perpendiculaire à l'axe $O\beta$, dans lequel le pendule se meut en s'approchant et s'éloignant alternativement de la verticale, est le plan d'oscillation.

Soient $OM = l$ la longueur du pendule, θ l'angle d'écart variable, $Om = \rho$ la projection de la longueur l sur le plan horizontal, nous aurons

$$\rho = l.\sin\theta.$$

Le problème est complétement résolu quand on peut exprimer les deux variables β et γ en fonction du temps. On en déduit les angles décrits en vertu de ces vitesses angulaires; par suite, on peut construire la courbe engendrée par la projection m du pendule sur le plan horizontal; enfin, on connaît le mouvement du point m sur cette courbe.

Avant de développer les calculs, nous exposerons les conclusions qu'on en peut tirer; nous commencerons par rappeler la solution du problème dans l'hypothèse de l'immobilité de la terre.

Dans ce cas, on obtient immédiatement deux intégrales qui sont les expressions du principe des forces vives et du principe des aires. En vertu de ce dernier principe, les aires engendrées par le rayon ρ sont proportionnelles aux temps employés à les décrire.

Pour que la courbe décrite par la projection m du pendule sur le plan horizontal soit une circonférence, il faut qu'en représentant par α la valeur initiale de l'angle d'écart θ; par c la valeur initiale de la vitesse angulaire γ, on ait

$$c = \sqrt{\frac{g}{l.\cos\alpha}}.$$

Quand c est moindre que cette valeur, l'angle θ reste toujours moindre que l'angle α; lorsque l'angle α est très-petit, la courbe décrite par la projection du pendule est une ellipse tournant elle-même autour de son centre avec une vitesse angulaire variable. En appelant a le demi-grand axe de cette ellipse, b le demi-petit axe, on a

$$a = l.\sin\alpha \quad \text{et} \quad b = l.\sin\alpha.c.\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

En représentant par γ_1 la vitesse angulaire relative avec laquelle le rayon ρ tourne dans le plan de l'ellipse, par γ_2 la vitesse angulaire avec laquelle le plan de l'ellipse tourne autour du point O, nous aurons, pour la vitesse angulaire absolue avec laquelle le rayon ρ tourne autour du point O,

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2;$$

or, on a la relation

$$\gamma_1 = \gamma.\cos\theta, \quad \text{d'où} \quad \gamma_2 = \gamma(1 - \cos\theta);$$

on voit que tant que l'angle θ reste très-petit, la vitesse angulaire γ_2 n'est qu'une très-petite fraction de la vitesse angulaire γ; par suite, tant qu'on se borne à considérer un petit nombre d'oscillations, on peut faire abstraction du déplacement de l'ellipse.

Il est facile de déterminer à chaque instant la position du point m; pour cela, supposons que le rayon $a = l.\sin\alpha$, de grandeur invariable, tourne autour du point O avec la vitesse angulaire constante c. Au bout du temps t, l'aire du secteur circulaire engendré par le rayon a sera justement égale à l'aire du secteur elliptique engendré par le rayon ρ pendant le même temps. La détermination de la position du point m est donc ramenée à une question de quadrature.

En appelant T la durée d'une oscillation, on a

$$\frac{1}{2}.c.l^2.\sin^2 a.\mathrm{T} = \frac{1}{2}\pi.c.l^2.\sin^2 a.\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{T} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Lorsqu'on tient compte du mouvement de rotation de la terre, on n'obtient qu'une seule intégrale qui est l'expression du principe des forces vives, le principe des aires n'est pas applicable ; il s'ensuit que le problème ne peut être discuté qu'au moyen des équations différentielles.

Considérons d'abord une latitude moyenne, telle que celle de Paris, par exemple. Supposons que le pendule soit écarté de sa position d'équilibre dans une direction perpendiculaire au plan méridien, puis abandonné à l'action de la pesanteur et de la force centrifuge composée, sans aucune vitesse initiale relative.

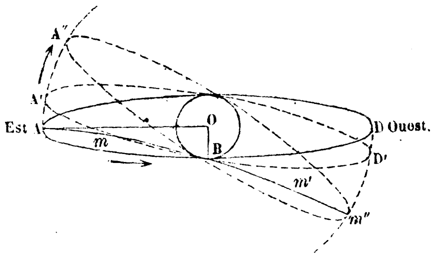
Concevons un système mobile tournant autour de la verticale, avec la vitesse angulaire relative $-\omega.\sin\lambda$, c'est-à dire ayant une vitesse angulaire relative justement égale et contraire à la composante de la vitesse angulaire de la terre autour de la verticale.

Par rapport à ce système, le mouvement est le même que si, la terre étant en repos, le pendule avait reçu la vitesse angulaire relative

$$c = +\omega.\sin\lambda.$$

Ainsi, pour déterminer la courbe engendrée par la projection m du pendule sur le plan horizontal, commençons par construire l'ellipse ABD dont le demi-grand axe OA égale $l\sin\alpha$, le demi-petit axe OB égale $l.\sin\alpha.\omega.\sin\lambda.\sqrt{\frac{l}{g}}$; tandis que le point m se meut sur cette ellipse comme dans l'hypothèse de l'immobilité de la terre, l'ellipse tourne autour de son centre avec

Fig. 2.



la vitesse angulaire constante $-\omega.\sin\lambda$. On forme ainsi la courbe $Amm'm''$, convexe du côté du point de suspension O, et tangente à la circonférence dont OB est le rayon.

On voit que le plan d'oscillation tourne autour de la verticale dans le même sens que la terre, et non pas en sens contraire; mais comme il ne fait pas une demi-révolution pendant une oscillation, les points culminants vont en rétrogradant puisqu'ils correspondent aux extrémités du grand axe de l'ellipse, lequel tourne avec la vitesse $-\omega.\sin\lambda$.

Lorsqu'on ne fait attention qu'aux positions du plan d'oscillation qui correspondent aux plus grands écarts du pendule, ce plan semble tourner en sens contraire de la terre.

Lorsque l'écart initial n'est pas dirigé perpendiculairement au plan méridien, la construction qui vient d'être indiquée n'est suffisamment approchée que pour les latitudes élevées. Au pôle, elle est rigoureusement exacte pour toutes les directions.

En effet, au pôle, le pendule écarté de sa position d'équilibre, et en repos relativement à la terre, est animé autour de la verticale d'une vitesse angulaire absolue $+\omega$. En l'abandonnant à l'action de la pesanteur, il prend le mouvement absolu correspondant à cette vitesse initiale; par conséquent, la projection horizontale décrit une ellipse sur un plan horizontal en repos ; mais la terre tournant relativement à ce plan avec la vitesse angulaire $+\omega$, le mouvement relatif est le même que si, la terre étant en repos, l'ellipse tournait en sens contraire avec la vitesse angulaire $-\omega$.

Pour parvenir à nous représenter ce qui a lieu sous toutes les latitudes et pour tous les azimuts, cherchons ce qui se passe sous l'équateur.

Quand les oscillations sont dirigées perpendiculairement au plan méridien, la force centrifuge composée est dirigée suivant le fil de suspension; par conséquent, elle ne modifie en rien le mouvement du pendule, qui continue à osciller dans le plan de l'équateur, exactement comme si la terre était en repos. Elle modifie seulement la tension du fil. Cette tension est diminuée quand le pendule marche de l'est à l'ouest, elle est augmentée quand il marche de l'ouest à l'est.

Quand le plan d'oscillation n'est pas perpendiculaire au plan méridien, le pendule est poussé par la force centrifuge composée, vers l'est pendant qu'il descend, et vers l'ouest pendant qu'il remonte.

L'angle d'écart initial étant dirigé dans le plan méridien du côté du sud, la projection du pendule sur le plan horizontal décrit une courbe convexe du côté de l'est, le plan d'oscillation tourne de droite à gauche et décrit un peu plus d'une demi-révolution pendant la première oscillation. A la fin de cette première oscillation, la vitesse angulaire γ n'est pas nulle, mais conserve une valeur positive, c'est-à-dire de droite à gauche; par conséquent, la seconde oscillation n'est pas indépendante de la première.

Pendant la seconde oscillation, le pendule marchant du nord vers le sud, la force centrifuge composée tend à faire tourner le plan d'oscillation de gauche à droite et détruit en partie la vitesse angulaire acquise pendant la première oscillation ; la courbe décrite par la projection horizontale est légèrement convexe vers l'ouest et passe très-près du centre. Au bout de la seconde oscillation, la vitesse angulaire est presque nulle, et le point le plus élevé s'est rapproché du plan de l'équateur. Dans une longue série d'oscillations, les points culminants se déplacent très-lentement en tournant de droite à gauche et tendent à venir se placer dans le plan de l'équateur.

Le pendule étant écarté dans le plan méridien du côté du nord, le plan d'oscillation commence par tourner de gauche à droite ; la courbe décrite par la projection horizontale pendant la première oscillation est toujours convexe du côté de l'est. Les points les plus élevés tendent à venir se placer dans le plan de l'équateur, en tournant de gauche à droite.

Sous une latitude quelconque, concevons toujours le système mobile tournant autour de la verticale avec la vitesse angulaire relative

$$- \omega . \sin \lambda.$$

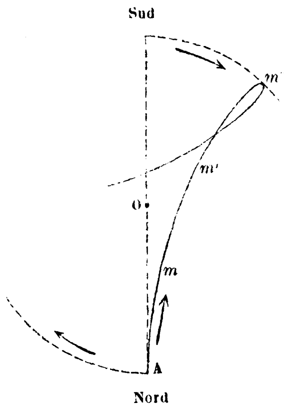
Si l'écart initial n'est pas perpendiculaire au plan méridien, le pendule ne prend pas exactement, par rapport à ce système mobile, le même mouvement que si la terre était en repos et s'il avait reçu la vitesse angulaire initiale $+ \omega \sin \lambda$.

Si l'écart est dirigé dans le plan méridien du côté du sud, la vitesse angulaire γ est un peu augmentée ; elle n'est pas nulle à la fin de la première oscillation, mais conserve une valeur positive. La seconde oscillation n'est pas indépendante de la première ; en général, les oscillations successives ne sont pas indépendantes l'une de l'autre.

L'arc décrit autour de la verticale pendant la première oscillation est un peu augmenté; par suite, la quantité dont le point culminant rétrograde est un peu diminuée.

Quand l'écart initial est dirigé du côté du nord, la vitesse angulaire γ est un peu ralentie; elle devient nulle

FIG. 3.



avant la fin de l'oscillation, elle est négative au point culminant; par suite, la courbe décrite par la projection horizontale doit former une boucle, comme l'indique la figure.

Tant que la vitesse angulaire γ correspondant au point culminant n'est pas nulle, qu'elle soit positive ou négative, le pendule n'atteint pas une hauteur égale à celle d'où il est parti.

En résumé, l'effet le plus apparent produit par la rotation de la terre, sur le mouvement du pendule conique, est la rétrogradation des points culminants. La vitesse angulaire avec laquelle cette rétrogradation s'effectue n'est pas la même dans tous les azimuts. Elle est justement égale et contraire à la composante de la vitesse angulaire de la terre autour de la verticale, quand l'écart initial est perpendiculaire au plan méridien ; elle est un peu moindre quand l'écart est dirigé dans le plan méridien du côté du sud, et un peu plus grande quand il est dirigé du côté du nord.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (ANNÉE 1867).

Composition mathématique;

SOLUTION DE M. CH. CAYLA,
Répétiteur au collége Rollin.

On donne deux droites rectangulaires AB, CD ; *et on considère les hyperboles ayant la droite* AB *pour asymptote, et tangentes à la droite* CD *au point fixe* P.

On demande :

1° *Le lieu des foyers de toutes ces hyperboles ;*

2° *Le lieu du point de rencontre de la seconde asymptote avec la perpendiculaire abaissée du point fixe sur la directrice ;*

3° *Le lieu des points d'intersection de la seconde asymptote avec la droite qui joint le foyer au point d'intersection des deux droites données.*

1° Soit F le foyer d'une des hyperboles remplissant les conditions énoncées. Je mène la droite OF, et FG parallèle à AB ; et je prolonge PF jusqu'en B. Les angles $\widehat{GFO}$, $\widehat{OFP}$ sont égaux (propriété connue des coniques).

Or,

$$\widehat{GFO} = \widehat{AOF};$$

mais

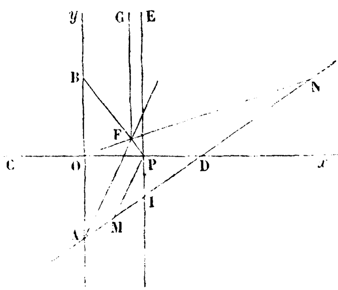
$$\widehat{AOF} = \widehat{OBF} + \widehat{BFO},$$

$$\widehat{OFP} = \widehat{OBF} + \widehat{BOF}.$$

Les premiers membres étant égaux, il en résulte

$$\widehat{BFO} = \widehat{BOF} \quad \text{et} \quad BO = BF.$$

Le lieu des points F est donc la strophoïde rectangulaire définie par le point P et la droite AB.



2° Par le point fixe P, je mène PE parallèle à AB. Je joins AF (*) : cette droite est perpendiculaire à la directrice; par suite, la parallèle menée à cette droite par le point P rencontrera la seconde asymptote AD en un point M du lieu cherché. D'ailleurs, OP = DP (propriété de l'hyperbole).

Or,

$$\widehat{PMI} = \widehat{OAF} = 90 - \widehat{OPM} = \widehat{MPI}.$$

Donc le triangle MPI est isocèle et MI = IP.

(*) Le point A est le centre de l'hyperbole.

Par conséquent, le point M décrit une strophoïde rectangulaire définie par le point fixe D et la droite PE. Cette strophoïde est égale et parallèle à la première.

3° Pour trouver le troisième lieu, je me sers de l'équation focale des coniques

$$(1-m^2)x^2 - 2mnxy + (1-n^2)y^2 - 2(\alpha + mp)x \\ - 2(\beta + np)y + \alpha^2 + \beta^2 - p^2 = 0.$$

L'axe des y est asymptote; donc

$$(1) \qquad n^2 = 1,$$

$$(2) \qquad \beta + np = 0.$$

Ces hyperboles sont tangentes à l'axe des x au point P dont l'abscisse est a, ce qui donne les relations

$$(3) \qquad \beta^2(1-m^2) = (p + m\alpha)^2,$$

$$(4) \qquad a(1-m^2) = \alpha + mp.$$

Un point du lieu est défini par l'intersection de la droite OF qui a pour équation

$$(5) \qquad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta},$$

avec l'asymptote AD, qui, passant par le point fixe D, a une équation de la forme

$$y = t(x - 2a).$$

Le coefficient angulaire t est donné par la formule

$$1 - m^2 - 2mnt = 0.$$

On a donc, pour l'équation de AD,

$$(6) \qquad 2mny = (1-m^2)(x - 2a);$$

on aura l'équation du lieu en éliminant α, β, m, n, p entre les six équations numérotées.

Portant les valeurs de α, β, tirées de (2) et (5), dans l'équation (3), il vient

$$1 - m^2 = \left(1 - \frac{nmx}{y}\right)^2,$$

ou

$$m(x^2 + y^2) = 2nxy,$$

d'où l'on tire

$$m^2 = \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{et} \quad mn = \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Substituant dans (6) et simplifiant, on a l'équation du lieu

$$4xy^2(x^2+y^2) = (x^2-y^2)^2(x-2a).$$

Cette équation du cinquième degré ne contient que des termes du cinquième et du quatrième degrés. Il est avantageux de la transformer en coordonnées polaires

$$4\rho\cos\omega\sin^2\omega = (\cos^2\omega - \sin^2\omega)^2(\rho\cos\omega - 2a),$$

$$\rho = 2a\,\frac{(2\cos^2\omega - 1)^2}{\cos^2\omega\,(4\cos^4\omega - 3)}.$$

Sous cette forme il est facile de construire la courbe qui représente le lieu des points N.

Note. — Solution analogue par M. Pelatan, élève du lycée de Nîmes.

REMARQUE SUR LA QUESTION 529

(voir t. XIX, p. 247);

PAR LE P. PEPIN, S. J.

La question 529 énonce un théorème inexact. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre dans le système de numération septénaire les nombres (22) et (1561), soient

$$2 \times 7 + 2 \quad \text{et} \quad 7^3 + 5 \times 7^2 + 6 \times 7 + 1;$$

leurs cubes sont de la forme

$$\text{mult. } 7^3 + 6 \times 7^2 + 4 \times 7 + 1.$$

Ainsi, dans le système septénaire, ils sont terminés à droite par trois chiffres significatifs communs, et néanmoins leurs racines cubiques (22) et (1561) n'ont aucun chiffre commun.

Je remplacerai ce théorème, de M. Rouché, par les suivants :

1° Pour que, dans un système de numération dont la base est x, on puisse trouver deux cubes terminés à droite par les trois mêmes derniers chiffres, sans que leurs racines cubiques soient aussi terminées par trois chiffres communs, il faut et il suffit que la base x admette au moins un diviseur premier de la forme $6m + 1$.

2° Si cette condition est remplie, ayant pris arbitrairement pour racine du premier cube un nombre de trois chiffres $\gamma\beta\alpha$ dont le chiffre des unités α soit premier avec x, on pourra toujours trouver, au moins, deux nombres de la forme $\gamma'\beta'\alpha'$, dans lesquels le chiffre des unités α' sera différent de α, et dont les cubes seront terminés à droite par les mêmes trois derniers chiffres que le cube du premier nombre $\gamma\beta\alpha$.

On peut trouver des théorèmes analogues plus généraux ; je me contenterai d'énoncer le suivant :

3° Si la base x d'un système de numération admet un diviseur premier de la forme $2kn + 1$, on pourra toujours trouver deux nombres premiers entre eux différant au moins par les chiffres des unités simples, et dont les puissances $n^{\text{ièmes}}$ soient terminées par les n mêmes derniers chiffres.

NOTE SUR UN PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR M. H. SÉVÈNE,
Élève en Mathématiques élémentaires à l'École Sainte-Geneviève.

Deux figures polygonales équivalentes étant données, on peut se demander s'il existe quelque moyen de décomposer l'une d'elles en parties qui puissent être placées sur l'autre, de manière à la recouvrir. C'est le problème dont nous allons chercher la solution.

Considérons d'abord quelques questions moins générales.

1. *Cas de deux parallélogrammes de même base et de même hauteur.*

La démonstration qui établit leur équivalence prouve aussi que pour recouvrir l'un d'entre eux, il suffit de partager l'autre, tantôt en deux segments, tantôt en trois. Supposons que les bases des parallélogrammes coïncident; il y aura deux segments seulement, si les bases supérieures empiètent l'une sur l'autre; il y en aura trois dans le cas contraire.

2. *Cas d'un triangle comparé à un parallélogramme ayant même base et une hauteur moitié plus petite.*

Marquons le milieu de l'un des deux autres côtés du triangle, et achevons le parallélogramme qui aurait pour côtés la base et la moitié du côté du triangle. Le parallélogramme obtenu a même base que le proposé et lui est de plus équivalent. Donc, l'un quelconque de ces deux parallélogrammes peut être décomposé en segments qui recouvrent l'autre. Mais, d'autre part, le triangle peut lui-même être décomposé en deux segments qui recouvrent le parallélogramme auxiliaire ; en effet, chacune des deux figures se compose d'une partie commune et d'un triangle. Or, on peut prouver facilement que les triangles sont superposables, comme ayant les trois côtés égaux chacun à chacun.

3. *Cas de deux triangles de même base et de même hauteur.*

D'après le n° 2, chacun des deux triangles peut être transformé en un parallélogramme de même base et de hauteur moitié moindre. D'ailleurs, d'après le n° 1, ces deux parallélogrammes peuvent être transformés l'un dans l'autre. Donc....

4. *Cas de deux triangles qui sont équivalents, sans avoir même base et même hauteur.*

Soient ABC, $A'B'C'$ ces triangles. Par un sommet C du premier, je mène une parallèle CD à la base. Je place ensuite le triangle $A'B'C'$ de telle façon que deux de ses sommets A', B' soient chacun sur une des droites parallèles AB, CD (*). Cela fait, je mène par C' une parallèle à la base $A'B'$, jusqu'à sa rencontre E avec AB. Je dis que les deux triangles proposés peuvent être transformés l'un dans l'autre, par l'intermédiaire du triangle $A'B'E$. En effet, ce dernier a même base et même hauteur que $A'B'C'$. De plus, il a même hauteur que ABC, et comme il lui est équivalent, il a nécessairement même base ; donc on est ramené au problème 3.

5. *Cas de deux polygones équivalents quelconques.*

Chacun de ces polygones peut être transformé en un triangle, par une série de transformations de triangles

(*) Il serait facile de montrer que cette opération est toujours possible, pourvu qu'on choisisse convenablement le triangle que l'on déplace et le côté qu'on intercale entre les deux parallèles.

partiels en d'autres triangles de même base et de même hauteur. Mais les deux polygones étant équivalents, les deux triangles qui en résultent sont aussi équivalents, et par conséquent peuvent être transformés l'un dans l'autre.

LIEU DES FOYERS DES CONIQUES TANGENTES A QUATRE DROITES DONNÉES;

SOLUTION DE M. GABRIEL LIPPMANN,
Élève du lycée Napoléon.

Soient

$$a = x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$
$$b = x\cos\beta + y\sin\beta - p' = 0,$$
$$c = x\cos\gamma + y\sin\gamma - p'' = 0,$$
$$d = x\cos\delta + y\sin\delta - p''' = 0,$$

les équations des quatre droites données.

En considérant x, y comme les coordonnées de l'un des deux foyers d'une conique tangente à ces droites, les expressions a, b, c, d représenteront les distances de ce foyer aux quatre droites dont il s'agit. Et, en nommant a_1, b_1, c_1, d_1 les valeurs que prennent a, b, c, d lorsque l'on remplace x, y par les coordonnées x_1, y_1 du second foyer de la conique, on aura, d'après une proposition connue,

$$aa_1 = bb_1 = cc_1 = dd_1 = \text{const.}$$

D'où

$$a(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p) = b(x_1\cos\beta + y_1\sin\beta - p'),$$
$$b(x_1\cos\beta + y_1\sin\beta - p') = c(x_1\cos\gamma + y_1\sin\gamma - p''),$$
$$c(x_1\cos\gamma + y_1\sin\gamma - p'') = d(x_1\cos\delta + y_1\sin\delta - p''').$$

L'élimination de x_1, y_1 entre ces trois dernières équations donne

$$\begin{vmatrix} a\cos\alpha - b\cos\beta, & a\sin\alpha - b\sin\beta, & -ap + bp' \\ b\cos\beta - c\cos\gamma, & b\sin\beta - c\sin\gamma, & -bp' + cp'' \\ c\cos\gamma - d\cos\delta, & c\sin\gamma - d\sin\delta, & -cp'' + dp''' \end{vmatrix} = 0,$$

et, en développant ce déterminant, on trouve

$$\begin{aligned} & p\ a[bc\sin(\gamma-\beta) + cd\sin(\delta-\gamma) + db\sin(\beta-\delta)] \\ & -p'\ b[cd\sin(\delta-\gamma) + da\sin(\alpha-\delta) + ac\sin(\gamma-\alpha)] \\ & +p''c\,[da\sin(\alpha-\delta) + ab\sin(\beta-\alpha) + bd\sin(\delta-\beta)] \\ & -p'''d[ab\sin(\beta-\alpha) + bc\sin(\gamma-\beta) + ca\sin(\alpha-\gamma)] = 0, \end{aligned}$$

ce qui est l'équation du lieu cherché.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 93 (*);

PAR M. FOURET,
Officier du Génie.

Soient A, B, C *les longueurs de trois cordes issues d'un même point d'une circonférence de cercle;* B *étant la corde intermédiaire, on a, comme il est facile de s'en assurer,*

$$(\alpha)\qquad A\sin\widehat{BC} + C\sin\widehat{AB} = B\sin\widehat{AC}.$$

Et, sur la surface de la sphère, A, B *et* C *représentant trois arcs de grand cercle issus du même point d'un*

(*) Cette question énoncée (1re série, t. IV, p. 259) a été rappelée (2e série, t. II, p. 225) comme question non résolue.

petit cercle et terminés à leur seconde rencontre avec ce même petit cercle, on a une relation qui ne diffère de la précédente qu'en ce que les longueurs A, B, C *sont remplacées par* $\tang\frac{1}{2}A$, $\tang\frac{1}{2}B$, $\tang\frac{1}{2}C$.

On demande s'il y a une relation analogue à la relation (α), pour quatre cordes de la sphère qui seraient issues d'un même point de la surface.

1. La relation (α) n'est qu'une transformation très-simple du théorème de Ptolémée sur le quadrilatère inscrit dans un cercle.

En effet, soient a, b, c les extrémités de trois cordes A, B, C issues d'un même point o d'une circonférence ; le quadrilatère $oabc$ étant inscrit dans un cercle, on a, d'après ce théorème,

$$oa \times bc + oc \times ab = ob \times ac.$$

Or, en désignant par R le rayon de la circonférence, on a

$$bc = 2\,\mathrm{R}\sin\widehat{\mathrm{BC}},\quad ab = 2\,\mathrm{R}\sin\widehat{\mathrm{AB}},\quad ac = 2\,\mathrm{R}\sin\widehat{\mathrm{AC}},$$

et, en substituant à bc, ab, ac ces valeurs dans la relation précédente, et supprimant 2R qui est facteur commun aux deux membres, on obtient la relation

$$\mathrm{A}\sin\widehat{\mathrm{BC}} + \mathrm{C}\sin\widehat{\mathrm{AB}} = \mathrm{B}\sin\widehat{\mathrm{AC}},$$

qui est précisément la relation (α).

2. Pour arriver à une relation analogue à la précédente, entre quatre cordes d'une sphère ayant une extrémité commune, nous nous sommes laissé guider par les considérations suivantes, qui peuvent trouver leur application dans la plupart des questions semblables à celle qui nous occupe en ce moment.

A une propriété d'une figure plane correspondent généralement plusieurs propriétés analogues dans l'espace, suivant le point de vue auquel on se place ; et cependant cette généralisation, malgré le grand nombre de solutions dont elle est susceptible, est soumise à une double difficulté, qui consiste premièrement à former l'énoncé de la propriété nouvelle, analogue à la propriété connue dont on s'occupe ; secondement, à vérifier l'exactitude de cet énoncé. De ces deux difficultés, la seconde étant généralement la plus grande, c'est celle-ci qu'il faut éliminer, ou du moins diminuer autant que possible. On y parvient, dans le cas qui nous occupe, en faisant subir à la propriété connue une série de transformations qui la ramène à une propriété évidente. On voit alors facilement de quelle manière on peut généraliser l'énoncé de cette dernière, sans qu'elle cesse d'être évidente; et en lui faisant subir la série des transformations précédemment effectuées, mais en sens inverse, on arrive à une généralisation de la propriété première.

3. Avant de faire subir à la relation (α) la série des transformations dont nous venons de parler, nous l'écrirons sous la forme suivante qui offre plus de symétrie :

$$(\alpha') \qquad \mathrm{A}\sin\widehat{\mathrm{BC}} + \mathrm{B}\sin\widehat{\mathrm{CA}} + \mathrm{C}\sin\widehat{\mathrm{AB}} = 0,$$

chacun des angles ayant un sens, et, par suite, un signe déterminé par l'ordre des lettres qui figurent ses côtés.

Cela posé, transformons par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point o pour pôle, et un paramètre de transformation quelconque.

La circonférence se transforme en une droite sur laquelle se trouvent les points a', b', c', correspondant aux points a, b, c; et k désignant le paramètre de transformation, on a

$$oa = \frac{k}{oa'}, \quad ob = \frac{k}{ob'}, \quad oc = \frac{k}{oc'};$$

et, en substituant ces expressions de A, B, C dans la relation (α'), on obtient

$$\frac{1}{oa'}\sin \widehat{BC} + \frac{1}{ob'}\sin \widehat{CA} + \frac{1}{oc'}\sin \widehat{AB} = 0,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$ob' \times oc' \sin \widehat{BC} + oc' \times oa' \sin \widehat{CA} + oa' \times ob' \sin \widehat{AB} = 0;$$

ou bien encore, en remarquant que chacun des termes de cette égalité exprime le double de l'aire d'un certain triangle,

$$\text{trg.}\, b'oc' + \text{trg.}\, c'oa' + \text{trg.}\, a'ob' = 0.$$

Ces trois triangles, qui ont un sommet o commun, ont les mêmes signes que leurs angles en o; et comme ils ont une hauteur commune, on peut supprimer cette hauteur dans la dernière égalité qui devient

$$b'c' + c'a' + a'b' = 0,$$

relation évidente de laquelle on pourrait remonter à la relation (α).

4. Cette relation entre les segments formés par trois points en ligne droite conduit à une relation analogue et presque aussi évidente, qui a lieu entre les triangles déterminés par quatre points d'un même plan.

Quatre points d'un même plan, pris trois à trois, donnent lieu à quatre triangles. *La somme des aires de ces quatre triangles est toujours nulle*, c'est-à-dire que a', b', c', d' désignant les quatre points, on a

$$\text{trg.}\, b'c'd' + \text{trg.}\, c'd'a' + \text{trg.}\, d'a'b' + \text{trg.}\, a'b'c' = 0.$$

Pour déterminer le signe de chaque triangle, il faut considérer comme fixe le sommet désigné par la première lettre, et voir dans quel sens il faut faire tourner le côté qui aboutit au second sommet, pour l'appliquer sur le côté qui aboutit au troisième. En observant cette convention relative aux signes, on vérifie aisément la relation d'identité qui a lieu entre les quatre triangles, et que nous allons transformer. Pour cela, prenons un point o quelconque en dehors du plan, et formons quatre tétraèdres ayant pour sommet commun ce point o, et pour bases les quatre triangles; la somme des volumes des quatre tétraèdres ainsi obtenus est nulle :

$$\text{tétr.}\, ob'c'd' + \text{tétr.}\, oc'd'a' + \text{tétr.}\, od'a'b' + \text{tétr.}\, oa'b'c' = 0,$$

les signes de ces tétraèdres se déterminant d'après ceux des triangles qui forment leurs bases.

Les volumes de ces tétraèdres peuvent s'exprimer en fonction de leurs angles solides en o, et des longueurs des arêtes qui aboutissent à ce point; en prenant six fois ces volumes, on a

$$ob' \times oc' \times od' \sin \widehat{BCD} + oc' \times od' \times oa' \sin \widehat{CDA}$$
$$+ od' \times oa' \times ob' \sin \widehat{DAB} + oa' \times ob' \times oc' \sin \widehat{ABC} = 0.$$

Les signes des sinus se déterminent d'après une règle analogue à celle que nous avons formulée pour les triangles correspondants.

La dernière relation peut s'écrire

$$\frac{1}{oa'} \sin \widehat{BCD} + \frac{1}{ob'} \sin \widehat{CDA} + \frac{1}{oc'} \sin \widehat{DAB} + \frac{1}{od'} \sin \widehat{ABC} = 0.$$

Enfin, en transformant la figure par rayons vecteurs réciproques et prenant le point o pour pôle et un paramètre de transformation quelconque, le plan devient une sphère passant par le point o; les points a', b', c', d' donnent des points a, b, c, d, extrémités de quatre cordes issues du point o, et en désignant leurs longueurs par A, B, C, D, on a la relation

$$(\beta)\quad A\sin\widehat{BCD} + B\sin\widehat{CDA} + C\sin\widehat{DAB} + D\sin\widehat{ABC} = 0,$$

tout à fait analogue à la relation (α).

5. La relation (α), qui n'est, d'ailleurs, comme nous l'avons vu en commençant, qu'une manière d'écrire le théorème de Ptolémée, détermine un point quelconque d'une circonférence dont on donne trois points; cette relation a donc la même importance que l'équation du cercle en coordonnées rectilignes ou polaires; cette dernière équation n'en est d'ailleurs qu'un cas particulier, lorsqu'on prend pour pôle un point du cercle; c'est ce qu'il est facile de voir en supposant les droites oa, ob rectangulaires, et prenant l'une d'elles pour axe polaire.

Les mêmes observations s'appliquent à la relation (β) qui peut être considérée comme l'extension à l'espace du théorème de Ptolémée. Cette relation (β) peut aussi être considérée comme une généralisation de l'équation polaire de la sphère, l'un de ses points étant pris pour pôle. On déduit cette équation de la relation (β), en supposant oa, ob, oc rectangulaires, et se rappelant que *le sinus d'un angle trièdre est égal au produit du sinus de l'angle d'une des faces par le sinus de l'inclinaison de l'arête opposée sur cette face.*

Les relations (α) et (β) sont susceptibles d'un assez grand nombre de conséquences intéressantes sur lesquelles nous pourrons revenir dans une autre occasion; on peut aussi les généraliser au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Pour le moment nous nous contenterons de déduire de la relation (α) la relation analogue en géométrie sphérique.

6. Considérons sur une sphère un petit cercle, et sur ce cercle un point o d'où sont issus trois arcs de grand cercle oa, ob, oc, terminés à la circonférence en question. Prenons le point r diamétralement opposé au point o, comme centre d'une projection stéréographique faite, bien entendu, sur le plan diamétral perpendiculaire à or. Les trois arcs de grand cercle prolongés passent par le point r, et, par suite, ils deviennent en projection trois droites $o'a'$, $o'b'$, $o'c'$, issues d'un même point o', qui n'est autre que le centre de la sphère. D'ailleurs, le petit cercle de la sphère se projette suivant un cercle passant par les points o', a', b', c'. On obtient donc en projection une figure à laquelle s'applique la relation (α). Or, l'angle de deux quelconques des arcs de grand cercle oa, ob, oc est égal à l'angle des droites correspondantes $o'a'$, $o'b'$, $o'c'$; d'un autre côté, les triangles rectangles $a'o'r$, $b'o'r$, $c'o'r$ donnent

$$o'a' = o'r \operatorname{tang} o'ra'$$
$$o'b' = o'r \operatorname{tang} o'rb'$$
$$o'c' = o'r \operatorname{tang} o'rc' ;$$

ou, en nommant A, B, C les angles mesurés par les arcs des grands cercles oa, ob, oc, et r le rayon de la sphère,

$$o'a' = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{A},$$

$$o'b' = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{B},$$

$$o'c' = r \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{C}.$$

En substituant dans la relation (α) et remarquant que

r disparaît, on obtient la relation

$$\text{tang}\frac{1}{2}\text{A}\sin\widehat{\text{BC}} + \text{tang}\frac{1}{2}\text{C}\sin\widehat{\text{AB}} = \text{tang}\frac{1}{2}\text{B}\sin\widehat{\text{AC}},$$

qu'on peut aussi écrire, en ayant égard aux signes des sinus,

$$(\gamma)\quad \text{tang}\frac{1}{2}\text{A}\sin\widehat{\text{BC}} + \text{tang}\frac{1}{2}\text{B}\sin\widehat{\text{CA}} + \text{tang}\frac{1}{2}\text{C}\sin\widehat{\text{AB}} = 0.$$

Remarque. — Il est évident que de cette dernière relation on peut déduire l'équation d'un cercle en coordonnées sphériques (longitude et latitude).

Question 559

(voir 1re série, t. XX, p. 55);

PAR M. A. LEPAGE,
Élève du lycée Bonaparte (classe de M. Ventéjol).

On donne un cylindre droit; une hélice tracée sur ce cylindre; et une sphère inscrite. Une droite horizontale se meut en s'appuyant sur l'hélice, et reste tangente à la sphère inscrite : étudier la surface engendrée par la droite. (DEWULF.)

Je prends pour axe des z l'axe du cylindre, et pour axes des x et des y deux droites rectangulaires menées par le centre O de la sphère, dans le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre.

Je définirai l'hélice par les équations simultanées du cylindre, et de l'héliçoïde engendré par une droite horizontale s'appuyant à la fois sur l'axe du cylindre et sur l'hélice donnée.

Soient h le pas de l'hélice, r le rayon de la sphère, θ un angle variable compté à partir de OX : la génératrice rectiligne de l'héliçoïde aura pour équations

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\theta; \qquad z = \frac{h.\theta}{2\pi}\ (^*).$$

Éliminant θ, j'ai

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi z}{h}\right);$$

de sorte que l'hélice sera représentée par le système

$$(1) \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\left(\frac{2\pi z}{h}\right),$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = r^2.$$

Une génératrice rectiligne quelconque de la surface cherchée aura pour équations

$$(3) \qquad y = mx + n,$$

$$(4) \qquad z = k.$$

Exprimons d'abord que cette génératrice s'appuie sur l'hélice. Pour cela éliminons x, y, z entre les équations (1), (2), (3), (4).

Les relations (1), (3), (4) donnent

$$x = \frac{n}{\operatorname{tang}\left(\frac{2k\pi}{h}\right) - m}, \qquad y = \frac{n.\operatorname{tang}\left(\frac{2k\pi}{h}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{2k\pi}{h}\right) - m},$$

(*) On suppose ici que l'axe des x est dirigé suivant la droite menée du centre O de la sphère au point A où l'hélice donnée est rencontrée par le plan perpendiculaire à l'axe du cylindre et passant par le centre de la sphère. L'angle θ est compté, à partir de OA, dans le sens indiqué par l'arc d'hélice qui, à partir du point A, s'élève au-dessus du plan horizontal XOY. La direction de la droite OA est celle des abscisses positives. La valeur de y est positive du côté du plan ZOX où se trouve l'arc d'hélice, qui, partant de A, est au-dessus du plan XOY. Enfin, la valeur de z est positive ou négative selon qu'elle se rapporte à un point situé au-dessus ou au-dessous du plan XOY. G.

d'où, en substituant dans l'équation (2),

$$n = \pm r \left[\sin \left(\frac{2k\pi}{h} \right) - m . \cos \left(\frac{2k\pi}{h} \right) \right].$$

Prenons d'abord le signe $+$, nous aurons pour la condition cherchée

$$(5) \qquad n = r \left[\sin \left(\frac{2k\pi}{h} \right) - m . \cos \left(\frac{2k\pi}{h} \right) \right].$$

Maintenant, exprimons que la génératrice est tangente à la sphère, ou, ce qui revient au même, à la section déterminée dans la sphère par le plan $z = k$. Cette section sera projetée sur le plan des (xy), suivant la circonférence

$$x^2 + y^2 = r^2 - k^2,$$

et pour que cette dernière courbe soit tangente à la droite $y = mx + n$, il faut qu'on ait

$$(6) \qquad (r^2 - k^2)(m^2 + 1) = n^2.$$

L'équation de la surface cherchée s'obtiendra donc en éliminant les paramètres variables m, n, k entre les équations (3), (4), (5), (6). Les trois premières donnent

$$m = \frac{y - r \sin \left(\frac{2\pi z}{h} \right)}{x - r \sin \left(\frac{2\pi z}{h} \right)},$$

$$n = r \frac{x \sin \left(\frac{2\pi z}{h} \right) - y \cos \left(\frac{2\pi z}{h} \right)}{x - r \sin \left(\frac{2\pi z}{h} \right)}.$$

En substituant dans l'équation (6) et remplaçant

k par z, on a

$$(r^2 - z^2)\left\{\left[\frac{y - r\sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)}{x - r\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right)}\right]^2 + 1\right\}$$

$$= \frac{r^2\left[x\sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right) - y\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right)\right]^2}{\left[x - r\cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right)\right]^2},$$

ou

$$(7)\left\{\begin{array}{l}(r^2 - z^2)\left[x^2 + y^2 + r^2 - 2r\left(y\sin\frac{2\pi z}{h} + x\cos\frac{2\pi z}{h}\right)\right] \\ \quad = r^2\left(x\sin\frac{2\pi z}{h} - y\cos\frac{2\pi z}{h}\right)^2,\end{array}\right.$$

ce qui est l'équation de la surface cherchée.

En prenant la seconde valeur de n, on aurait

$$(8)\left\{\begin{array}{l}(r^2 - z^2)\left[x^2 + y^2 + r^2 + 2r\left(y\sin\frac{2\pi z}{h} + x\cos\frac{2\pi z}{h}\right)\right] \\ \quad = r^2\left(x\sin\frac{2\pi z}{h} - y\cos\frac{2\pi z}{h}\right)^2.\end{array}\right.$$

Il est facile de voir ce que signifie cette double solution.

Les équations simultanées (1) et (2) représentent, outre l'hélice donnée, celle qui lui est symétrique par rapport à l'axe du cylindre, et qui résulte de l'intersection de la surface cylindrique et de l'héliçoïde. Mais l'équation (7) convient seule ici. Car, en posant $z = 0$, l'équation (7) donne la droite double $(x - r)^2 = 0$, et pour la même substitution $z = 0$, faite dans l'équation $z = \frac{h\theta}{2\pi}$, on a $\theta = 0$. Ce qui montre que la trace de l'hélice considérée sur le plan XOY est l'extrémité A du rayon OA qui a été pris pour axe des x. Les deux tangentes horizontales menées de ce point à la sphère se confondent avec la droite $x = r$.

En faisant $z=0$ dans l'équation (8), il vient

$$(x+r)^2=0, \quad x=-r,$$

abscisse correspondante au point diamétralement opposé à A.

La résolution de l'équation (7) par rapport à y donne

$$(9)\quad y=\frac{-r\sin\frac{2\pi z}{h}\left(rx\cos\frac{2\pi z}{h}-r^2+z^2\right)\pm\left(x-r\cos\frac{2\pi z}{h}\right)z\sqrt{r^2-z^2}}{r^2\sin^2\left(\frac{2\pi z}{h}\right)-z^2};$$

ces valeurs de y montrent qu'une section de la surface par un plan parallèle au plan des xy se compose de deux droites, réelles ou imaginaires, et qui peuvent coïncider. Ces droites sont réelles et distinctes pour les valeurs de z comprises entre $+r$ et $-r$, et autres que zéro. Elles coïncident quand $z=0$, ou $=\pm r$, et deviennent imaginaires lorsque z^2 surpasse r^2.

On peut encore se proposer de déterminer la ligne de contact de la sphère et des génératrices horizontales de la surface considérée.

Cette ligne est définie par les équations simultanées de la sphère et du lieu de la polaire d'un point quelconque de l'hélice, par rapport au cercle déterminé dans la sphère par un plan horizontal $z=k$, contenant le point pris sur l'hélice.

Les équations de la polaire sont

$$(10)\qquad xx'+yy'=r^2-k^2,$$

$$(11)\qquad z=k;$$

le point (x', y', k) appartenant à l'hélice, on a

$$(12)\qquad y'=x'\,\text{tang}\,\frac{2k\pi}{h},$$

$$(13)\qquad x'^2+y'^2=r^2;$$

l'élimination de x', y', k déterminera l'équation du lieu de la polaire.

En résolvant les équations (10) et (12) par rapport à x', y', il vient

$$x' = \frac{r^2 - k^2}{x + y \operatorname{tang}\left(\frac{2k\pi}{h}\right)}, \qquad y' = \frac{(r^2 - k^2)\operatorname{tang}\left(\frac{2k\pi}{h}\right)}{x + y \operatorname{tang}\left(\frac{2k\pi}{h}\right)};$$

et la substitution de ces valeurs de x', y' dans

$$x'^2 + y'^2 = r^2$$

donne

$$\frac{(r^2 - k^2)}{x \cos\left(\frac{2k\pi}{h}\right) + y \sin\left(\frac{2k\pi}{h}\right)} = \pm r,$$

ou, en prenant le signe $+$ qui convient seul ici,

$$\frac{r^2 - k^2}{x \cos\left(\frac{2k\pi}{h}\right) + y \sin\left(\frac{2k\pi}{h}\right)} = + r.$$

$k = z$; donc l'équation du lieu de la polaire est

$$\frac{r^2 - z^2}{x \cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right) + y \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)} = r;$$

et, par conséquent, la ligne de contact cherchée est représentée par le système

$$\frac{r^2 - z^2}{x \cos\left(\frac{2\pi z}{h}\right) + y \sin\left(\frac{2\pi z}{h}\right)} = r,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

La surface proposée peut alors être engendrée par une droite horizontale s'appuyant sur cette ligne de contact et sur l'hélice.

Question 752

(voir 2e série, t. V, p. 95);

PAR MM. JULES LEFEBVRE ET ALCIDE MINISCLOUX,
Élèves en Mathématiques spéciales au lycée de Lille
(classe de M. Diguet).

On circonscrit à un triangle quelconque une courbe du second degré telle, que les normales aux trois sommets du triangle passent par un même point. On demande de prouver que le lieu de ce point est une courbe à centre du troisième ordre. Déterminer cette courbe.

Lieu du pied de la quatrième normale (*).

Soient ABC le triangle proposé, et Σ une conique circonscrite à ce triangle et telle, que les normales à cette conique en A, B, C concourent en un même point P.

Nous prenons pour axes de coordonnées le côté AC du triangle et la perpendiculaire BO abaissée sur ce côté du sommet B qui lui est opposé.

Le pied M de la quatrième normale menée du point P à la courbe Σ se trouve, comme on sait, sur une hyperbole équilatère H circonscrite au triangle ABC, et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de symétrie de la conique Σ.

Soient D, E les seconds points d'intersection de l'axe des y, OB, et des courbes H, Σ; et $-\frac{1}{p}$, $-\frac{1}{p'}$ les abscisses OA, OC des points A, C; $-\frac{1}{q}$, $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{q'}$, les

(*) Les deux premières parties de la question 752 ont déjà été résolues (t. IV, p. 420); quant au moyen de trouver le lieu du pied de la quatrième normale, il a seulement été indiqué, et le degré de l'équation de ce lieu n'a pas été déterminé d'une manière précise; c'est à cette dernière partie de la question que se rapporte le calcul de MM. Lefebvre et Miniscloux.

ordonnées des points B, D, E ; et B et λ des paramètres variables ; les équations des courbes Σ et H seront

(1) $pp'x^2 + Bxy + qq'y^2 + (p+p')x + (q+q')y + 1 = 0$, (Σ),

(2) $pp'x^2 + \lambda xy + q\beta y^2 + (p+p')x + (q+\beta)y + 1 = 0$, (H),

ou

(3) $$Bxy + q'Y + X = 0,$$

(4) $$\lambda xy + \beta\, Y + X = 0,$$

en posant

(5) $$pp'x^2 + (p+p')x + qy + 1 = X,$$

(6) $$y(qy+1) = Y.$$

L'équation qui détermine les coefficients angulaires des axes de la conique Σ est

(7) $$Bn^2 + 2(pp' - qq')n - B = 0,$$

et les directions des asymptotes de l'hyperbole H sont données par l'équation

(8) $$q\beta n^2 + \lambda n + pp' = 0.$$

Ces deux équations doivent avoir les mêmes racines; donc

$$\frac{pp'}{q\beta} = -1, \quad \text{ou} \quad q\beta + pp' = 0$$

et

$$\frac{2(pp' - qq')}{\lambda} = \frac{-B}{pp'},$$

d'où l'on tire

$$\beta = -\frac{pp'}{q}, \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{2pp'(qq' - pp')}{B}.$$

En remplaçant β et λ par ces valeurs, l'équation (4) devient

$$B(qX - pp'Y) + (2q^2pp'xy)q' - 2qp^2p'^2xy = 0;$$

d'ailleurs la relation (3) peut s'écrire

$$Bxy + Yq' + X = 0.$$

Ces deux équations du premier degré en B et q' donnent

$$
(9)\left\{\begin{aligned}
\frac{\mathrm{B}}{2pp'q\,(q\mathrm{X}+pp'\mathrm{Y})xy} &= \frac{q'}{\mathrm{X}(pp'\mathrm{Y}-q\mathrm{X})-2qp^2p'^2x^2y^2}\\
&= \frac{1}{\mathrm{Y}(q\mathrm{X}-pp'\mathrm{Y})-2q^2pp'x^2y^2}.
\end{aligned}\right.
$$

Exprimons maintenant que les trois normales à la conique Σ, aux sommets A, B, C du triangle, se coupent au même point.

L'équation de la normale en un point quelconque (x, y) de Σ est, en nommant X', Y' les coordonnées courantes,

$$\frac{\mathrm{Y}'-y}{\mathrm{X}'-x} = \frac{\mathrm{B}x+2qq'y+q+q'}{2pp'x+\mathrm{B}y+p+p'}.$$

Aux sommets A, B, C, on a

$$\left(y=0,\quad x=-\frac{1}{p}\right),$$

$$\left(y=-\frac{1}{q},\quad x=0\right),$$

$$\left(y=0,\quad x=-\frac{1}{p'}\right),$$

et les équations des normales en ces points sont

$$
\begin{aligned}
(p\mathrm{X}'+1)\,[-\mathrm{B}+p(q+q')]+p^2\mathrm{Y}'(p'-p)&=0,\\
q^2\mathrm{X}'(q-q')+(q\mathrm{Y}'+1)[\mathrm{B}-q(p+p')]&=0,\\
(p'\mathrm{X}'+1)[-\mathrm{B}+p'(q+q')]+p'^2\mathrm{Y}'(p-p')&=0.
\end{aligned}
$$

Pour que ces trois normales concourent au même point, il faut que les deux paramètres variables B et q' satisfassent à la condition

$$
(10)\quad \begin{vmatrix}
p\,[\mathrm{B}-p\,(q+q')], & p^2\,(p'-p), & \mathrm{B}-p\,(q+q')\\
p'[\mathrm{B}-p'(q+q')], & p'^2(p-p'), & \mathrm{B}-p'(q+q')\\
q^2(q'-q), & q[\mathrm{B}-q\,(p+p')], & -\mathrm{B}+q\,(p+p')
\end{vmatrix}=0.
$$

Ce déterminant est du troisième degré en B et q'. Si l'on remplace B et q' par leurs valeurs tirées des égalités (9), il en résultera une équation entre x et y, qui devra être vérifiée par les coordonnées du pied de la quatrième normale menée du point P à la conique Σ.

Les numérateurs et les dénominateurs de B et q' étant du quatrième degré en x et y, cette équation sera du douzième degré, à moins, toutefois, que les termes de ce degré ne soient identiquement nuls; or, il n'en est pas ainsi (*), et l'équation dont il s'agit est réellement du douzième degré.

Mais le lieu qu'elle représente se décompose en plusieurs lignes de degré moindre.

Il est d'abord évident que la circonférence circonscrite au triangle ABC doit faire partie du lieu cherché. Car les normales aux points A, B, C de cette circonférence concourent à son centre, et tout point qui lui appartient peut être considéré comme le pied d'une quatrième normale menée de l'intersection des trois premières.

Cela résulte aussi du calcul. En effet, l'équation de la circonférence circonscrite au triangle ABC étant $pp'Y + qX = 0$, les coordonnées d'un point quelconque de cette courbe annulent les valeurs de B et de $qq' - pp'$, données par les équations (9). Et, lorsque $B = 0$, le déterminant (10) devient

$$qpp' \begin{vmatrix} p(q+q'), & p(p'-p), & q+q' \\ p'(q+q'), & p'(p-p'), & q+q' \\ q(q-q'), & -q(p+p'), & -(p+p') \end{vmatrix},$$

(*) C'est ce que MM. Lefebvre et Minisclonx démontrent en remplaçant dans le déterminant (10) les valeurs de B et q' réduites aux termes du quatrième degré. Il en résulte un nouveau déterminant contenant les termes du douzième degré de l'équation (10), et qui effectivement ne peut être identiquement nul que dans des hypothèses incompatibles avec les données de la question. Nous laissons ce calcul à faire au lecteur. G.

ou, en développant,

$$2qpp'(p+p')(p-p')(q+q')(qq'-pp').$$

Or, $qq'-pp'=0$; donc le déterminant est réduit à zéro, par les valeurs des coordonnées d'un point quelconque de la circonférence $pp'Y+qX=0$. Ainsi, $pp'Y+qX$ entre comme facteur dans le premier membre de l'équation (10). Mais $pp'Y+qX$ ne s'y trouve qu'à la première puissance : c'est ce qu'on reconnaît en ordonnant suivant les puissances de B le déterminant qui forme le premier membre de l'équation (10).

On voit aussi que si la conique circonscrite au triangle se réduit au système de deux droites, dont l'une soit un côté quelconque AB du triangle, et l'autre une parallèle à ce côté menée par le sommet C qui lui est opposé, un point quelconque du côté AB peut être considéré comme le pied d'une normale qui concourt à l'infini avec les trois normales en A, B, C. On est conduit à chercher si les premiers membres des équations des trois côtés du triangle sont des facteurs du déterminant (10).

L'équation du côté AB étant $px+qy+1=0$, les coordonnées d'un point quelconque de ce côté réduisent les fonctions X, Y à

$$X=-p'q\,xy,$$
$$Y=-p\,xy,$$

et, par suite, les égalités (9) deviennent

$$B=2p'q,$$
$$q'=\frac{p'q}{p}.$$

En remplaçant B et q' par ces valeurs dans le déterminant (10), les éléments de la première colonne prennent les valeurs des éléments de la seconde, à un facteur près qui est $\frac{p}{q}$; donc, ce déterminant est annulé par les valeurs des coordonnées d'un point quelconque de la droite AB; on en peut conclure que le premier membre $px + qy + 1$ de l'équation de cette droite, entre comme facteur dans le déterminant.

Il en est évidemment de même des deux autres côtés du triangle, et, par conséquent, les trois côtés appartiennent au lieu géométrique cherché.

En résumé, l'équation (10) est réellement du douzième degré, et le lieu du pied de la quatrième normale se compose :

1° Du cercle circonscrit au triangle donné;

2° Des trois côtés de ce triangle;

3° D'un lieu du septième degré.

Question 721;

PAR M. KAHER BEY (AU CAIRE).

On donne sur un plan deux circonférences O *et* O′. *D'un point fixe* A *de la première on mène une droite* ABC *qui coupe cette circonférence, de nouveau, au point* B, *et la circonférence* O′ *au point* C. *On porte le segment* BC *de* A *en* M *sur la droite* AB; *on demande le lieu décrit par le point* M, *lorsque la droite* AB *tourne autour du point* A (*).

Soient R et R′ les rayons des cercles O et O′; $AO' = l$, et l'angle $O'AO = \alpha$. Prenons le point A pour pôle et le diamètre du premier cercle O passant par le point A comme axe polaire;

(*) Le lecteur est prié de faire la figure. Les deux cercles O et O′ sont supposés extérieurs l'un à l'autre.

On a

$$AC = AB + BC = AB + AM = 2R\cos\omega + \rho;$$

et

$$\overline{CO'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AO'}^2 - 2AC.AO'\cos O'AC,$$

ou

$$R'^2 = (2R\cos\omega + \rho)^2 + l^2 - 2l(2R\cos\omega + \rho)\cos(\omega - \alpha).$$

Telle est l'équation du lieu géométrique cherché.

On peut écrire cette équation comme il suit, en ordonnant les termes

$$\begin{gathered}\rho^2 + 2[2R\cos\omega - l\cos(\omega - \alpha)]\rho \\ + 4R^2\cos^2\omega - 4Rl\cos\omega\cos(\omega - \alpha) + l^2 - R'^2 = 0,\end{gathered}$$

ou

$$[\rho + 2R\cos\omega - l\cos(\omega - \alpha)]^2 + l^2\sin^2(\omega - \alpha) - R'^2 = 0.$$

La courbe est limitée; il faut évidemment que la quantité $l^2\sin^2(\omega - \alpha) - R'^2$ soit négative. On en conclut la condition

$$\sin^2(\omega - \alpha) < \left(\frac{R'}{l}\right)^2.$$

Dans chaque cas particulier il sera facile de calculer la valeur numérique des angles limites, d'après la formule

$$\sin[\Omega - \alpha] = \pm\frac{R'}{l}.$$

Les deux branches de la courbe se raccordent tangentiellement aux rayons vecteurs qui correspondent à ces limites. (Nous supposons $R' < l$; si l'on avait $R' > l$, il n'y aurait plus d'angles limites.)

La construction de la courbe n'offre aucune difficulté, car son équation peut s'écrire

$$\rho = l\cos(\omega - \alpha) - 2R\cos\omega \pm \sqrt{R'^2 - l^2\sin^2(\omega - \alpha)}.$$

L'équation en coordonnées rectilignes serait évidemment du quatrième degré.

Question 808;

PAR M. E. PELLET,
Élève du lycée de Nîmes.

$U=0$ *étant une équation algébrique;* $U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots,$ *les dérivées successives du premier membre :*

1° *L'équation* $U=0$ *aura des racines imaginaires si on n'a pas, pour toutes les valeurs de* n *et de* x,

$$\left(\frac{U_n}{1.2\ldots n}\right)^2 - 2\,\frac{U_{n-1}U_{n+1}}{1.2\ldots(n-1).1.2\ldots(n+1)} + 2\,\frac{U_{n-2}U_{n+2}}{1.2\ldots(n-2).1.2\ldots(n+2)} - 2\,\frac{U_{n-3}U_{n+3}}{1.2\ldots(n-3).1.2\ldots(n+3)} + \ldots > 0,$$

l'existence d'un couple de racines imaginaires étant accusée chaque fois que l'équation obtenue en égalant à 0 *le premier membre de l'inégalité précédente n'a pas toutes ses racines imaginaires.*

2° *Le même théorème subsistera si l'on remplace les dérivées* $U_1, U_2, \ldots$ *par les dérivées de la fonction suivante*

$$V = U + A_1U_1 + A_2U_2 + \ldots + A_m,$$

formée au moyen des coefficients d'une équation à racines toutes réelles,

$$x^m - A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} - \ldots \pm A_m = 0,$$

d'un degré égal ou inférieur au degré de $U=0$.

(J.-J.-A. MATHIEU.)

Dans l'équation $U=0$ mettons $x+h$ à la place de x, et développons; il vient

$$(1)\quad U + h\frac{U_1}{1} + h^2\frac{U_2}{1.2} + \ldots + h^n\frac{U_n}{1.2\ldots n} + \ldots = 0.$$

Cette équation, où h est l'inconnue, a le même nombre de racines réelles et imaginaires, quelle que soit la valeur réelle substituée à x, que l'équation $U = 0$. La somme des carrés des produits n à n des racines de l'équation (1) est

$$(a)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{U_n}{1.2\ldots n}\right)^2 - 2\,\frac{U_{n-1}\,U_{n+1}}{1.2\ldots(n-1).1.2\ldots(n+1)}\\ &\qquad + 2\,\frac{U_{n-2}\,U_{n+2}}{1.2\ldots(n-2).1.2\ldots(n+2)} - \ldots\end{aligned}\right.$$

(SERRET, *Algèbre supérieure*, n° 176, p. 391.)

Si le polynôme (a) est négatif ou nul, l'équation (1) a évidemment des racines imaginaires, et par suite, l'équation $U = 0$ a aussi des racines imaginaires.

Si l'équation $U = 0$ a toutes ses racines réelles, il en est de même de l'équation $V = 0$; donc, si l'équation $V = 0$ a des racines imaginaires, $U = 0$ n'a pas toutes ses racines réelles. (Cela a été prouvé dans les *Annales*, numéro de février, p. 76, année courante). Par conséquent, le théorème subsiste lorsqu'on substitue aux dérivées de U celles de V.

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS POUR LES DEUX ACADÉMIES DE MONTPELLIER ET D'AIX

(ANNÉE 1867).

1° Étant donné un ellipsoïde, on détermine les points de contact des quatre plans tangents parallèles aux plans des sections circulaires; on mène deux sphères tangentes chacune en deux de ces points symétriques par rapport au grand axe. Trouver l'équation des surfaces de révolution du second degré circonscrites à ces deux sphères.

Classification et discussion de ces surfaces.

2° Lignes d'intersection de ces surfaces et de l'ellipsoïde. Leurs propriétés géométriques par rapport aux deux sphères. Construction de la tangente.

3° Ces lignes forment, sur la surface de l'ellipsoïde, un réseau complet de courbes se coupant orthogonalement.

CONCOURS ENTRE LES HUIT LYCÉES ET LES QUATRE COLLÉGES DE L'ACADÉMIE DE POITIERS.

Mathématiques élémentaires.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1° Construire un triangle, connaissant un côté, la différence des deux autres côtés et le rayon du cercle circonscrit.

Nota. La construction sera effectuée exactement à l'aide de la règle et du compas, en prenant $0^m,025$ pour rayon du cercle; $0^m,04$ pour le côté donné et $0^m,015$ pour la différence des deux autres côtés.

2° Dans une sphère de rayon connu, inscrire un cylindre tel, que le volume de ce cylindre soit équivalent à la somme des volumes des deux segments sphériques qui ont pour bases les bases du cylindre. On discutera l'équation obtenue.

CORRESPONDANCE.

1. *Extrait d'une lettre de M. Faure, adressée le 20 juin dernier à M. Prouhet.* — « Dans la lettre que j'ai eu l'honneur de vous écrire, au mois de juin de l'année dernière, au sujet de la question 760, je vous ai communiqué cet énoncé : *Une surface* S *du second ordre étant conjuguée à un tétraèdre, si du centre on abaisse des perpendiculaires sur les quatre faces du tétraèdre, et que l'on fasse passer une sphère par leurs pieds, la somme des carrés des inverses des demi-axes de la surface sera égale à l'inverse de la puissance de son centre par rapport à la sphère.* Vous voyez, monsieur, que ce théorème donne celui du n° 814. Car, si l'on imagine une surface T de révolution du second ordre ayant l'un de ses foyers au centre de S et touchant les quatre faces du tétraèdre, la puissance du centre de S par rapport à la sphère est égale au carré du demi-axe équatorial de T.

» De plus, la proposition du n° 814 se trouve énoncée à la fin de la page 25 de mon *Recueil de Théorèmes;* il s'agit ici d'une conique, mais *tous les théorèmes* qui font partie du § III de ce recueil s'appliquent d'eux-mêmes aux surfaces.

» Je vous demande pardon d'insister sur ce point, mais devant publier relativement aux surfaces un recueil analogue à celui qui vient de paraître, je désire ne pas perdre un droit de priorité qui me paraît incontestable, surtout, monsieur, si vous avez conservé ma lettre. »

2. *Extrait d'une lettre de M. Catalan.* — « Le numéro de septembre des *Nouvelles Annales* contient une Note de M. Gigon, relative à l'intégration des équa-

tions

$$\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{z+x}=\frac{dz}{x+y},$$

et à l'intégration d'autres équations plus générales. La méthode dont M. Gigon fait usage me paraît être celle que j'ai publiée, il y a deux ans, dans les *Annali di Matematica* (t. VII, p. 66), et dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique* (1866, p. 25).

» Je pense que mon jeune camarade, qui a certainement trouvé de son côté ce que j'avais trouvé du mien, reconnaîtra mon droit de priorité. Je note, en passant, que la question proposée pour la licence se trouve tout au long dans ma première Note (*Annali*, p. 69). »

3. M. Soudat, professeur au Collége d'Annecy, nous a adressé des démonstrations, géométrique et analytique, des formules de Trigonométrie énoncées *Question* 813; c'est par oubli que les solutions de M. *Soudat* n'ont pas été mentionnées.

4. Les solutions des questions 775, 776, 777, que M. Lucien Bignon nous a envoyées de Lima, nous sont parvenues trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention lorsque d'autres solutions des mêmes problèmes ont été insérées dans le journal (*voir* le numéro de novembre 1866).

5. *Réponse à une lettre relative à la question suivante: Si a, b, c, d,... sont les termes positifs d'une série convergente, le produit* $(1+a)(1+b)(1+c)\ldots$ *a une valeur finie.*

Soient l la limite de $a+b+c+\ldots$, et s_n la somme des produits n à n des termes $a, b, c, \ldots$; on aura

$$s_2<\frac{l^2}{1.2},\quad s_3<\frac{l^3}{1.2.3},\ldots,\quad s_n<\frac{l^n}{1.2.3\ldots n};$$

et, par suite,

$$(1+a)(1+b)(1+c)\ldots < 1 + \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1.2} + \ldots + \frac{l^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots, \quad < e^l,$$

e représentant la base du système des logarithmes népériens. G.

BIBLIOGRAPHIE.

Découverte d'un résumé des Porismes d'Euclide.

RÉCLAMATION DE PRIORITÉ

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Il a été publié, dans le tome XX (1re série) des *Nouvelles Annales*, deux articles (*) sur l'ouvrage de M. Chasles : *Les trois livres de Porismes d'Euclide, rétablis pour la première fois, d'après la Notice et les Lemmes de Pappus, et conformément au sentiment de R. Simson sur la forme des énoncés de ces propositions* (Paris, in-8°, 1860). Les auteurs de ces deux articles parlent d'un certain *résumé* des 171 propositions qui formaient les trois livres perdus ; et ils en parlent comme s'il s'agissait d'une de ces choses anciennement et universellement connues, dont personne ne peut se dire ni même nommer l'inventeur. Or, l'existence de ce résumé n'est connue que depuis peu d'années ; je revendique l'honneur de l'avoir signalée le premier.

Le résumé en question se trouve dans le grand recueil de Pappus, à la fin de la Notice sur les Porismes

(*) *Bulletin mathématique*, t. VII, p. 1 et 57 ; 1861.

d'Euclide, qui fait partie de la préface du VII[e] livre. Il se compose presque uniquement de 29 énoncés (M. Chasles en avait d'abord compté 30), dont le texte était, depuis la Renaissance, une énigme pour les géomètres. On supposait que ces énoncés ne pouvaient être autre chose que 29 des 171 propositions d'Euclide. Je ne saurais mieux faire que de citer ce qu'on lit à ce sujet dans l'*Aperçu historique* de M. Chasles (Bruxelles, in-4°, 1837, p. 12) : *Pappus, il est vrai, nous a transmis les énoncés de trente propositions appartenant à ces* porismes, *mais ces énoncés sont si succincts, et sont devenus si défectueux par des lacunes et l'absence des figures qui s'y rapportaient, que le célèbre Halley, si profondément versé dans la Géométrie ancienne, a confessé n'y rien comprendre, etc.*

Plus loin, dans une note au bas de la page 36, M. Chasles rappelle que R. Simson a présenté, le premier, un certain théorème (la proposition XXXIV de son *Traité des Porismes*) *comme étant l'un des porismes d'Euclide, celui auquel se rapportent ces mots de Pappus* : QUOD HÆC AD DATUM PUNCTUM VERGIT, c'est-à-dire le 6[e] des 29 énoncés. En disant *celui auquel*, il suppose nécessairement que chacun de ces énoncés n'est qu'une des 171 propositions d'Euclide.

Ces idées sur les 29 énoncés, que M. Chasles attribue, comme on le voit, à ses devanciers, et nommément à Halley et à R. Simson, en les adoptant lui-même, se retrouvent dans d'autres endroits de l'*Aperçu historique*, et en particulier dans la Note III, où l'auteur expose ses vues personnelles d'alors sur la question des Porismes. Au surplus il a reproduit les mêmes idées, plusieurs années après, dans son discours d'inauguration du *Cours de Géométrie supérieure*, prononcé le 22 décembre 1846 (*Traité de Géométrie supérieure*, p. XLIV).

Ces détails historiques étaient nécessaires, premièrement pour déterminer ce que l'on croyait que devaient être les 29 énoncés avant la publication des résultats de mes propres recherches, et secondement pour faire comprendre la nouveauté et l'intérêt de ces résultats.

Dans les divers articles que j'ai donnés sur les Porismes (le premier porte la date du 29 octobre 1849), les 29 énoncés sont présentés, pour la première fois, comme nous étant parvenus tels ou à peu près tels que Pappus les a écrits; de sorte que les lacunes si nombreuses qu'on supposait dans ces énoncés, et que R. Simson a figurées par des points dans sa traduction, sont imaginaires. La forme inusitée de ces énoncés, qui les faisait paraître *si succincts*, se trouve être une conséquence de la nature même des Porismes; on voit qu'ils ne comportent pas de figures, et en même temps qu'ils résument les 171 propositions d'Euclide, au lieu de n'être que 29 d'entre elles, comme on l'avait cru jusqu'alors. Cette découverte inespérée m'a permis de donner enfin le sens des définitions du terme *Porisme* que Pappus et Proclus nous ont conservées. On sait que R. Simson, n'ayant pu parvenir à les comprendre, les avait remplacées par une définition de sa façon, qui a été adoptée par un grand nombre de géomètres. Il se trouve aujourd'hui que tous, en suivant cette hypothèse, ont fait comme lui fausse route.

Depuis que cette découverte d'un résumé des trois livres perdus a été publiée, elle a donné lieu à des discussions de priorité qu'il ne m'est pas permis de passer sous silence. M. Chasles, dans son livre sur les Porismes, dont le titre est rappelé au commencement de cet article, affirme, p. 8 dans le texte, et p. 9 en note, avoir considéré, dès l'année 1835, les 29 énoncés de Pappus comme résumant les 171 propositions d'Euclide. Dans le cours du débat qui s'est élevé au sujet de cette assertion,

M. Chasles a essayé d'expliquer ce qu'il pouvait sembler avoir dit dans un sens diamétralement opposé, en affirmant qu'il avait attribué à R. Simson, dès le principe, dans l'*Aperçu historique*, les idées que je réclame (*Comptes rendus*, t. LI, p. 1056). Mais cette nouvelle assertion, de même que la première, est contredite péremptoirement par les citations qui précèdent.

En outre, M. Chasles a entrepris de prouver que divers passages du *Traité des Porismes* de R. Simson renferment en effet l'expression de ces idées. L'Académie des Sciences, il faut bien le dire, lui a donné raison sur ce point (*Comptes rendus*, t. LIII, p. 713). Mais les conditions dans lesquelles cette décision a été obtenue sont d'une nature telle, que j'ai considéré comme un devoir d'en appeler au public géomètre. C'est l'objet d'un opuscule dont je termine en ce moment la publication, et qui a pour titre : *Notice sur les débats de priorité auxquels a donné lieu l'ouvrage de M. Chasles sur les Porismes d'Euclide.* Il est permis de douter que l'illustre compagnie ait lieu d'être satisfaite du rôle qu'on lui a fait jouer dans cette circonstance. On peut s'en faire une idée par l'exemple que voici :

Dès que M. Chasles eut mis en avant cette prétendue priorité de R. Simson, je fis remarquer que parmi les propositions, peu nombreuses d'ailleurs, qui sont présentées par ce géomètre comme ayant dû appartenir aux trois livres perdus, il s'en trouve plusieurs qui ne figurent point parmi les 29 énoncés de Pappus ; et j'indiquai sur-le-champ (*Comptes rendus*, t. L, p. 996, en note) celles qui portent les nos 47, 48, 66 et 67. On avait ainsi, par une preuve *matérielle*, la certitude que R. Simson n'a pas considéré les 29 énoncés de Pappus comme résumant les 171 propositions d'Euclide. Mes adversaires n'ont pas voulu s'expliquer sur ce fait !

Je puis donc, aujourd'hui, revendiquer hautement l'honneur d'avoir, le premier, fait connaître l'existence d'un résumé des trois livres perdus, alors que l'on croyait ne posséder que l'indication mutilée de quelques-unes des 171 propositions qu'ils renfermaient.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

(Tous les ouvrages annoncés se trouvent à la librairie de *Gauthier-Villars*, quai des Augustins, 55.)

QUESTIONS.

836. Soient deux surfaces du second ordre S et T; ABCD le tétraèdre conjugué par rapport à ces deux sur-

faces, et Γ la courbe gauche d'intersection de S et T. Les plans polaires d'un point P, par rapport aux diverses surfaces du second ordre passant par la courbe Γ, tournent autour d'une droite Δ; les plans menés par la droite Δ et les sommets du tétraèdre ABCD forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant, quel que soit le point considéré P.

Plus particulièrement, les plans menés par une tangente quelconque à la courbe gauche Γ par les sommets du tétraèdre ABCD forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant. (L. Painvin.)

837. Étant donnée une surface du second ordre dont O est le centre, soit M un point quelconque de l'espace : 1° si le point M est extérieur à la surface, on mène une tangente MT, le diamètre conjugué OT de cette tangente, et le demi-diamètre OA conjugué du plan de ces deux droites; les points M, T, O, A sont les sommets d'un tétraèdre, soit V le volume du parallélipipède construit sur ce tétraèdre; 2° si le point M est intérieur à la surface, on mène une demi-corde MT, le demi-diamètre OB conjugué de cette demi-corde, et le demi-diamètre OA conjugué du plan de ces deux droites : les points B, T, O, A sont les sommets d'un tétraèdre, soit V le volume du parallélipipède construit sur ce tétraèdre.

Le volume V est ce que M. Aoust nomme la *puissance* du point M par rapport à la surface considérée (*Comptes rendus*, 1er semestre 1867, p. 590). A cette occasion, je signalerai la relation suivante.

Soit l'équation de la surface du second ordre

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0;$$

si x, y, z sont les coordonnées du point M, V le volume du parallélipipède défini ci-dessus, on a

$$(I) \qquad f(x, y, z) = \pm \frac{\delta^3}{\Delta^2} V^2,$$

δ et Δ représentant les déterminants

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

On doit prendre le signe + ou — suivant que le point M est *extérieur* ou *intérieur* à la surface.

On sait d'ailleurs que si a, b, c sont les axes de la surface, on a

$$(II) \qquad a^2 b^2 c^2 = -\frac{\Delta^3}{\delta^4}.$$

Les relations (I) et (II) rendent, pour ainsi dire, intuitives toutes les propriétés énoncées par M. Aoust (*loco citato*). (L. Painvin.)

838. Soit q_0 le quotient par $1.2.3\ldots p$ du produit de p nombres consécutifs, le premier étant $(a-1)p$; soit q_1 le quotient analogue, le premier nombre étant $(a-1)p-a$; q_2 le quotient analogue, le premier nombre étant $(a-1)p-2a$, et ainsi de suite, en s'arrêtant lorsqu'on trouve un premier nombre nul ou négatif; on aura la relation

$$a^p - 1 = q_0 - \frac{p}{1} q_1 + \frac{p(p-1)}{1.2} q_2 - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} q_3 + \ldots$$

(J.-J.-A. Mathieu.)

RECTIFICATION.

Page 480, ligne 16, *au lieu de* « équations cubiques » *lisez* « équations cubiques homogènes ».

SUR UNE PROPRIÉTÉ

Des surfaces homofocales du second ordre et sur quelques conséquences qui en découlent;

PAR M. PH. GILBERT,
Professeur à l'Université de Louvain,
Correspondant de la Société Philomathique.

On a besoin, dans la théorie des lignes géodésiques de l'ellipsoïde, d'une certaine équation en coordonnées elliptiques du cône circonscrit à une surface du second ordre. En cherchant à déduire cette équation des premiers principes de la théorie des surfaces homofocales, j'ai obtenu une formule qui y conduit d'une manière très-simple, et d'où l'on tire, en outre, diverses conséquences, qui m'ont paru devoir offrir quelque intérêt aux lecteurs de ce journal.

1. L'équation d'une surface du second ordre appartenant à un système de surfaces homofocales étant mise sous la forme

$$(1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

j'appelle λ le *paramètre* de cette surface. D'un point M (x, y, z), appartenant à la surface λ, je mène une tangente quelconque à une surface homofocale, à paramètre θ : M' (x', y', z') sera le point de contact. Je désigne par δ la longueur MM'; par p_λ, p_θ les distances du centre commun aux plans tangents en M et M' aux surfaces λ et θ respectivement; par (δ, λ) l'angle que fait la direction MM' avec la normale *extérieure* à la surface λ, en M; par (θ, λ) l'angle des normales extérieures aux deux surfaces en M et M'. D'après l'équation (1), les cosinus des angles que la première de ces deux normales fait avec les axes sont

$$p_\lambda \frac{x}{\lambda^2}, \quad p_\lambda \frac{y}{\lambda^2 - b^2}, \quad p_\lambda \frac{z}{\lambda^2 - c^2},$$

d'où

$$\cos(\delta, \lambda) = p_\lambda \left(\frac{x' - x}{\delta} \cdot \frac{x}{\lambda^2} + \frac{y' - y}{\delta} \cdot \frac{y}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z' - z}{\delta} \cdot \frac{z}{\lambda^2 - c^2} \right)$$
$$= \frac{p_\lambda}{\delta} \left(\frac{xx'}{\lambda^2} + \frac{yy'}{\lambda^2 - b^2} + \frac{zz'}{\lambda^2 - c^2} - 1 \right),$$

d'où l'on tire

$$\frac{xx'}{\lambda^2} + \frac{yy'}{\lambda^2 - b^2} + \frac{zz'}{\lambda^2 - c^2} - 1 = \frac{\delta \cos(\delta, \lambda)}{p_\lambda}.$$

La droite MM' étant tangente à la surface θ, on a aussi

$$\frac{xx'}{\theta^2} + \frac{yy'}{\theta^2 - b^2} + \frac{zz'}{\theta^2 - c^2} - 1 = 0,$$

et, en soustrayant cette équation de la précédente,

$$\frac{xx'}{\lambda^2 \theta^2} + \frac{yy'}{(\lambda^2 - b^2)(\theta^2 - b^2)} + \frac{zz'}{(\lambda^2 - c^2)(\theta^2 - c^2)} = \frac{\delta \cos(\delta, \lambda)}{p_\lambda (\theta^2 - \lambda^2)}.$$

Mais, d'autre part, on a visiblement

$$\cos(\theta, \lambda) = p_\lambda p_\theta \left[\frac{xx'}{\lambda^2 \theta^2} + \frac{yy'}{(\lambda^2 - b^2)(\theta^2 - b^2)} + \frac{zz'}{(\lambda^2 - c^2)(\theta^2 - c^2)} \right],$$

donc

$$(2) \qquad \cos(\theta, \lambda) = \frac{p_\theta \delta \cos(\delta, \lambda)}{\theta^2 - \lambda^2}.$$

Telle est la formule que je voulais établir : elle donne l'expression du cosinus de l'angle des normales aux deux surfaces λ et θ.

1° Nous en tirons cette première conséquence, que si la droite MM′ touche en même temps la surface λ, $\cos(\delta, \lambda)$ étant nul, on a aussi $\cos(\theta, \lambda) = 0$, donc : *si deux homofocales touchent une même droite, et que par les points de contact on leur mène respectivement des plans tangents, ceux-ci se coupent à angle droit.*

2° Soient μ, ν, les paramètres de deux autres surfaces homofocales qui se coupent au point M. La formule (2) donne de même

$$(2)\quad \cos(\theta, \mu) = \frac{p_\theta\, \delta \cos(\delta, \mu)}{\theta^2 - \mu^2}, \qquad \cos(\theta, \nu) = \frac{p_\theta\, \delta \cos(\delta, \nu)}{\theta^2 - \nu^2}.$$

Mais la droite MM′ étant perpendiculaire à la normale en M′, on a

$$\cos(\delta, \theta) = 0,$$

ou

$$\cos(\delta, \lambda)\cos(\theta, \lambda) + \cos(\delta, \mu)\cos(\theta, \mu) + \cos(\delta, \nu)\cos(\theta, \nu) = 0,$$

d'où

$$\frac{\cos^2(\delta, \lambda)}{\lambda^2 - \theta^2} + \frac{\cos^2(\delta, \mu)}{\mu^2 - \theta^2} + \frac{\cos^2(\delta, \nu)}{\nu^2 - \theta^2} = 0,$$

ce qui est l'équation commune à toutes les tangentes menées du point M à la surface θ, que nous voulions trouver (Chasles, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XXII, p. 517. — Salmon, *Analytic Geometry of three dimensions*, p. 127). La démonstration précédente est beaucoup plus simple que celle que donne M. Salmon (p. 123). Cette équation, lorsqu'on y considère le point M et la droite seuls comme donnés, fournit une équation du second degré en θ^2, dont les racines, toujours réelles et positives, sont les carrés des paramètres de deux surfaces homofocales qui touchent la droite donnée, et qui jouissent de la propriété énoncée au n° 1° (*).

On sait aussi que cette équation conduit à une propriété remarquable, due à M. Chasles, des lignes géodésiques des surfaces du second ordre (Salmon, *Anal. Geom. of three dim.*, p. 315); c'est-à-dire que si l'on y considère λ comme le paramètre d'une surface tangente à la droite donnée, le paramètre θ de la seconde surface tangente à la même droite est déterminé par l'équation

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \theta^2,$$

i étant l'angle que fait la tangente avec la ligne $\mu =$ const., sur la surface λ; et comme le premier membre est constant pour tous les points d'une même ligne géodésique, tangente à la ligne de courbure de la surface λ qui a pour paramètre θ, on en conclut que :

Les tangentes à une même ligne géodésique d'une surface du second ordre λ touchent toutes une même surface homofocale θ, dont l'intersection avec la surface λ donne la ligne de courbure à laquelle cette géodésique est tangente. En d'autres termes, *le lieu de ces tangentes est une développable circonscrite à la surface homofocale θ* (Chasles, *Comptes rendus, etc.*, t. XXII, p. 69).

Tout cela est bien connu; mais voici ce qui n'a pas été peut-être remarqué : si l'on trace sur la surface λ toutes les lignes géodésiques tangentes à une même ligne de courbure C, intersection de cette surface et d'une homofocale θ, les tangentes à ces diverses lignes géodésiques seront toutes normales à une même surface Σ, d'après une proposition de M. Bertrand. Or, *les centres de courbure principaux de cette surface Σ seront tous sur*

(*) Briot, *Complément de Géométrie analytique*, p. 282.

les deux homofocales λ *et* θ, en sorte que les tangentes aux lignes géodésiques de la première λ tracent sur la surface Σ un premier système de lignes de courbure, et les tangentes aux lignes géodésiques de la seconde θ, qui touchent la même ligne de courbure C, viennent tracer sur la même surface Σ le deuxième système de lignes de courbure.

3° Revenons à nos équations (2), d'où nous tirons

$$(\theta^2 - \lambda^2)\cos^2(\theta, \lambda) + (\theta^2 - \mu^2)\cos^2(\theta, \mu) + (\theta^2 - \nu^2)\cos^2(\theta, \nu)$$
$$= p_\theta \delta[\cos(\theta, \lambda)\cos(\delta, \lambda) + \ldots].$$

Le second membre étant nul, comme on l'a déjà observé, l'équation se réduit, à cause de

$$\cos^2(\theta, \lambda) + \cos^2(\theta, \mu) + \cos^2(\theta, \nu) = 1,$$

à celle-ci :

$$\lambda^2\cos^2(\theta, \lambda) + \mu^2\cos^2(\theta, \mu) + \nu^2\cos^2(\theta, \nu) = \theta^2,$$

qui renferme un curieux théorème de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. XXII, p. 67) que l'on peut énoncer ainsi : *Si par un point quelconque* M *on mène un plan fixe* P, *et si l'on porte sur les normales aux trois surfaces homofocales qui se coupent en* M *des longueurs égales à leurs paramètres respectifs, la somme des carrés des projections de ces longueurs sur la normale au plan* P *est constante pour tous les points* M *du plan ; elle vaut le carré du paramètre de l'homofocale tangente à ce plan.*

4° Dans l'équation du cône circonscrit à une surface θ, que nous avons donnée plus haut, lorsqu'on suppose $\mu = \nu = b$, cette équation se réduisant à celle-ci,

$$\frac{\cos^2(\delta, \lambda)}{\lambda^2 - \theta^2} + \frac{\sin^2(\delta, \lambda)}{b^2 - \theta^2} = 0,$$

fait voir que l'angle (δ, λ) est constant et donne cette proposition connue, que *le cône circonscrit à un ellipsoïde θ, et qui a son sommet sur l'hyperbole focale de celui-ci, est de révolution autour de la tangente à cette hyperbole.* L'équation donne

$$\cos(\delta, \lambda) = \sqrt{\frac{\lambda^2 - \theta^2}{\lambda^2 - b^2}}, \quad \sin(\delta, \lambda) = \sqrt{\frac{\theta^2 - b^2}{\lambda^2 - b^2}}.$$

Mais, d'autre part, si l'on ajoute les équations (2), après les avoir élevées au carré, on obtient

$$\frac{1}{p_\theta^2 \delta^2} = \frac{\cos^2(\delta, \lambda)}{(\lambda^2 - \theta^2)^2} + \frac{\cos^2(\delta, \mu)}{(\mu^2 - \theta^2)^2} + \frac{\cos^2(\delta, \nu)}{(\nu^2 - \theta^2)^2},$$

formule assez curieuse par elle-même, et qui devient, dans l'hypothèse $\mu = \nu = b$,

$$\frac{1}{p_\theta^2 \delta^2} = \frac{\cos^2(\delta, \lambda)}{(\lambda^2 - \theta^2)^2} + \frac{\sin^2(\delta, \lambda)}{(b^2 - \theta^2)^2},$$

d'où l'on tire, en remplaçant le sinus et le cosinus par leurs valeurs,

$$p_\theta \delta = \sqrt{(\lambda^2 - \theta^2)(\theta^2 - b^2)},$$

ce qui est une quantité constante pour toutes les génératrices du cône. Donc, *si le sommet d'un cône circonscrit à l'ellipsoïde est sur l'hyperbole focale, la distance du centre au plan tangent en un point de la courbe de contact, multipliée par la distance de ce point au sommet du cône, donne un produit constant pour tous les points de la courbe de contact.* On peut même remarquer que ce produit, divisé par $\sqrt{\lambda^2 - \theta^2}$, est indépendant de λ et égal au demi-axe moyen de l'ellipsoïde.

5° On tire encore des formules (2), en observant que l'on a

$$\cos^2(\delta, \lambda) + \cos^2(\delta, \mu) + \cos^2(\delta, \nu) = 1,$$

l'égalité

$$(\theta^2 - \lambda^2)\cos(\theta, \lambda)\cos(\delta, \lambda) + (\theta^2 - \mu^2)\cos(\theta, \mu)\cos(\delta, \mu) + (\theta^2 - \nu^2)\cos(\theta, \nu)\cos(\delta, \nu) = p_\theta\, \delta,$$

qui se réduit, le coefficient de θ^2 étant nul, à

$$\lambda^2\cos(\theta, \lambda)\cos(\delta, \lambda) + \mu^2\cos(\theta, \mu)\cos(\delta, \mu) + \nu^2\cos(\theta, \nu)\cos(\delta, \nu) = -p_\theta\, \delta.$$

Ainsi, *lorsque d'un point* M *de l'espace on mène une tangente à une surface du second ordre* θ, *si à partir du point* M *on porte sur les normales aux trois surfaces homofocales qui passent par ce point des longueurs égales aux paramètres respectifs de ces surfaces, la somme des projections de ces longueurs sur la tangente proposée, multipliées respectivement par leurs projections sur la normale à la surface* θ, *est égale au produit de la distance du point* M *au point de contact, par la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à la surface* θ.

Remarquons, pour finir, que si d'un point de l'espace (λ, μ, ν), on mène une normale à une surface λ', et si l'on désigne par μ', ν' les paramètres des deux autres surfaces homofocales qui passent par le point d'incidence, on a

$$\frac{\cos^2(\lambda', \lambda)}{(\mu'^2 - \lambda^2)(\nu'^2 - \lambda^2)} + \frac{\cos^2(\lambda', \mu)}{(\mu'^2 - \mu^2)(\nu'^2 - \mu^2)} + \frac{\cos^2(\lambda', \nu)}{(\mu'^2 - \nu^2)(\nu'^2 - \nu^2)} = 0.$$

2. L'équation (2), qui nous a servi de point de départ, n'est elle-même qu'un cas particulier d'une expression plus générale, qui se rapporte à l'angle compris entre les normales à deux surfaces homofocales en deux points donnés quelconques.

Soient donc M, M', deux points quelconques; λ, θ, les paramètres de deux surfaces homofocales passant respectivement par ces points ; conservons d'ailleurs les mêmes notations que dans le premier cas. Nous aurons d'abord, comme on l'a vu,

$$\frac{xx'}{\lambda^2} + \frac{yy'}{\lambda^2 - b^2} + \frac{zz'}{\lambda^2 - c^2} - 1 = \frac{\delta \cos(\delta, \lambda)}{p_\lambda},$$

et, par la même raison,

$$\frac{xx'}{\theta^2} + \frac{yy'}{\theta^2 - b^2} + \frac{zz'}{\theta^2 - c^2} - 1 = \frac{\delta \cos(\delta, \theta)}{p_\theta};$$

soustrayant membre à membre et substituant encore dans l'expression de $\cos(\theta, \lambda)$, nous avons l'égalité remarquable

$$(3) \quad \cos(\theta, \lambda) = \frac{\delta}{\theta^2 - \lambda^2}\left[p_\theta \cos(\delta, \lambda) - p_\lambda \cos(\delta, \theta)\right].$$

Cette formule peut conduire à de nombreuses conséquences, dont voici quelques-unes : on voit tout d'abord que si δ est nul, $\cos(\theta, \lambda)$ s'évanouit ; donc deux surfaces homofocales se coupent toujours à angle droit.

1° On peut supposer que les points M et M' soient sur une même surface du second ordre, ce qui revient à faire θ égal à λ dans l'équation ; on a alors

$$p_\theta \cos(\delta, \lambda) - p_\lambda \cos(\delta, \theta) = 0,$$

ou

$$\frac{p_\lambda}{\cos(\delta, \lambda)} = \frac{p_\theta}{\cos(\delta, \theta)};$$

et comme le premier nombre représente la distance du point M au point où la sécante MM' rencontre un plan perpendiculaire à la normale en M mené par le centre, on a ce théorème :

Si l'on mène à une surface du second ordre une sécante quelconque MM', *et par le centre de la surface* *des plans parallèles aux plans tangents en* M *et en* M′, *ces plans coupent la sécante à des distances égales et de sens contraire des points de contact respectifs* M *et* M′.

Et, comme cas particulier : *Si l'on mène à une conique une sécante quelconque* MM′, *et par le centre de la courbe des parallèles aux tangentes en* M *et en* M′, *ces parallèles coupent la sécante à des distances égales et de sens contraire des points de contact respectifs* M *et* M′.

2° L'équation précédente entre p_λ et p_θ subsiste, si l'on suppose, non plus $\theta = \lambda$, mais $\cos(\theta, \lambda) = 0$. On a donc ce théorème :

Étant pris respectivement sur deux surfaces homofocales deux points M *et* M′, *tels que les normales correspondantes se coupent à angle droit, les deux plans menés par le centre commun des deux surfaces parallèlement aux plans tangents en* M *et en* M′, *déterminent sur la sécante* MM′, *à partir des points de contact respectifs* M *et* M′, *des segments égaux et de sens contraire.*

On a pour les coniques homofocales un théorème absolument analogue, qu'il est inutile d'énoncer.

3° L'équation (3) peut aussi s'écrire sous la forme

$$\theta^2 - \lambda^2 = p_\theta \frac{\delta \cos(\delta, \lambda)}{\cos(\theta, \lambda)} - p_\lambda \frac{\delta \cos(\delta, \theta)}{\cos(\theta, \lambda)},$$

qui renferme un théorème très-général. On voit en effet avec un peu d'attention que

$$\frac{\delta \cos(\delta, \theta)}{\cos(\theta, \lambda)}$$

représente la portion de la normale en M à la surface λ comprise entre ce point et le point où elle perce le plan tangent en M′ à la surface θ, cette longueur étant affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'elle tombe sur la normale *intérieure* ou *extérieure :* désignons-la par ϖ_λ, et soit de même ϖ_θ la distance du point M′ au point où la normale en M′ perce le plan tangent à la surface λ en M, la convention de signe étant la même. L'équation devient

$$(4) \qquad \theta^2 - \lambda^2 = p_\theta \varpi_\theta - p_\lambda \varpi_\lambda,$$

d'où ce théorème : *Étant données deux surfaces homofocales du second ordre, si en deux points quelconques* M *et* M′, *pris respectivement sur ces surfaces, on leur mène des normales, les produits des segments compris sur ces normales entre les deux plans tangents en* M *et en* M′, *par les perpendiculaires abaissées du centre respectivement sur ces plans tangents, diffèrent d'une quantité constante, égale à la différence des carrés des paramètres des deux surfaces homofocales.* Il faut, bien entendu, tenir compte, dans cet énoncé, des signes dont les segments sont affectés.

On a évidemment un théorème parfaitement analogue pour deux coniques homofocales.

Si les plans tangents en M et en M′ sont parallèles, les segments ϖ_λ et ϖ_θ sont évidemment égaux et de signes contraires, et l'on a

$$\varpi_\lambda = - \varpi_\theta = p_\lambda - p_\theta,$$

d'où

$$\theta^2 - \lambda^2 = p_\theta^2 - p_\lambda^2;$$

c'est le théorème de M. Chasles : *La différence des carrés des distances du centre à deux plans parallèles, respectivement tangents à deux surfaces homofocales, est constante et égale à la différence des carrés des* *paramètres de ces surfaces* (*Aperçu historique*, note XXXI, p. 393).

Si $\lambda = \theta$, c'est-à-dire si les points M et M' sont pris sur une même surface, le second membre de l'équation (4) s'évanouit; donc : *Si l'on mène des normales en deux points* M *et* M' *d'une surface du second ordre, les produits des segments compris sur ces normales entre les deux plans tangents en* M *et en* M', *par les distances respectives du centre à ces deux plans tangents, sont égaux entre eux.* Propriété analogue pour les coniques.

Enfin, si la droite qui joint les points M et M' est, par exemple, tangente à la surface θ, on a visiblement

$$\varpi_\lambda = 0, \quad \text{d'où} \quad \theta^2 - \lambda^2 = p_\theta \varpi_\theta,$$

d'où cette propriété des surfaces homofocales : *Étant données deux surfaces homofocales, si d'un point quelconque* M *de l'une d'elles on mène une tangente à l'autre en un point quelconque* M', *la distance du centre au plan tangent en* M', *multipliée par la portion de la normale en ce point comprise entre les deux plans tangents en* M *et en* M', *donne un produit constant, égal à la différence des carrés des paramètres des deux surfaces.*

On a encore un théorème correspondant pour deux coniques homofocales.

4° La formule (4) conduit encore d'une manière si simple à diverses relations entre les rayons de courbure principaux des surfaces homofocales, que je ne puis m'empêcher d'en indiquer quelques-unes. Considérons trois homofocales λ, μ, ν, qui se coupent en un point M, suivant des lignes de courbure, comme on sait. Soit, sur l'intersection des surfaces λ et ν, un point M' infiniment voisin du point M, et appliquons l'équation (4) aux deux surfaces μ et λ passant respectivement par les points M et M'. Nous aurons

$$\lambda^2 - \mu^2 = p_\lambda \varpi_\lambda - p_\mu \varpi_\mu.$$

Mais, à la limite, ϖ_μ se réduit à zéro; ϖ_λ, comme on le voit facilement, devient le rayon de courbure de la surface λ suivant la direction MM' qui est normale à la surface μ : nous désignerons ce rayon par L_μ, en lui attribuant le signe $+$ ou le signe $-$, suivant qu'il est dirigé suivant la normale intérieure ou extérieure à la surface λ, et nous aurons

$$\lambda^2 - \mu^2 = p_\lambda L_\mu,$$

d'où l'on voit que le produit $p_\lambda L_\mu$ est constant le long de la ligne de courbure qui résulte de l'intersection des surfaces λ et μ.

Si l'on prenait le point M' sur l'intersection des surfaces μ et ν, on trouverait de même

$$\lambda^2 - \mu^2 = - p_\mu M_\lambda,$$

M_λ étant le rayon de la surface μ en M, suivant la direction normale à la surface λ.

Enfin, on trouve de même, en prenant le point M' sur l'intersection des surfaces λ et μ,

$$\lambda^2 - \mu^2 = p_\lambda L_\nu - p_\mu M_\nu.$$

Si l'on combine les deux premières égalités, on obtient

$$\frac{L_\mu}{M_\lambda} = -\frac{p_\mu}{p_\lambda},$$

ce qui peut se traduire ainsi : *Les courbures principales de deux surfaces homofocales en un point de leur intersection, suivant les directions qui leur sont réciproquement normales, sont entre elles comme les distances* *du centre aux plans tangents respectifs de ces deux surfaces.*

En combinant la première et la troisième, il vient

$$p_\lambda(L_\nu - L_\mu) = p_\mu M_\nu,$$

d'où

$$\frac{L_\nu - L_\mu}{M_\nu} = \frac{p_\mu}{p_\lambda} = -\frac{L_\mu}{M_\lambda},$$

d'où enfin

$$\frac{L_\nu}{L_\mu} + \frac{M_\nu}{M_\lambda} = 1,$$

c'est-à-dire que, *en un point commun à deux surfaces homofocales, les rayons de courbure de ces surfaces suivant la direction de leur intersection, divisés respectivement par les rayons de courbure de ces mêmes surfaces suivant les directions qui leur sont réciproquement normales, donnent une somme constante et égale à l'unité.*

NOTE SUR LE NOMBRE e;

PAR M. S. REALIS.

§ I.

1. Posons

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Puisque la série qu'on vient d'écrire est convergente quel que soit x, on aura évidemment pour toutes les valeurs positives de cette variable (et l'on prouverait qu'il en est de même à l'égard des valeurs négatives) :

$$(1)\qquad 1 + x < \varphi(x) < 1 + x\varphi(x).$$

C'est en nous basant sur ces relations d'inégalité que nous allons parvenir à sommer la série $\varphi(x)$.

Nous aurons, pour les valeurs de x comprises entre 0 et 1,

$$1 + x < \varphi(x) < (1 - x)^{-1}.$$

Mettons ce résultat sous la forme

$$1 + \frac{1}{m} < \varphi\left(\frac{1}{m}\right) < \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-1},$$

d'où, puisque m est positif,

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left[\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m < \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m},$$

et faisons croître m indéfiniment. Les deux expressions entre lesquelles est comprise $\left[\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m$ se rapprocheront indéfiniment l'une de l'autre, et, à la limite, les trois expressions coïncideront ensemble. Nous pourrons donc écrire

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m}, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

en désignant par e la valeur numérique finie de $\left[\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m$, pour $m = \infty$, laquelle se trouve parfaitement déterminée d'après cette formule et se développe dans la série convergente

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots n} + \ldots.$$

Je crois pouvoir omettre à ce sujet des explications qui rentrent dans les procédés usuels de l'enseignement.

Faisant ensuite, dans les inégalités ci-dessus, $m = \frac{p}{z}$, $z < p$, nous obtiendrons

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p < \left[\varphi\left(\frac{z}{p}\right)\right]^p < \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-p}.$$

Il suit de là que si p augmente indéfiniment, z restant fixe, on aura à la limite

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p = \left[\varphi\left(\frac{z}{p}\right)\right]^p = \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-p}, \quad \text{pour} \quad p = \infty;$$

ou, puisque alors $\left[\varphi\left(\frac{z}{p}\right)\right]^p = \left\{\left[\varphi\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m\right\}^z = e^z$:

$$\left(1 + \frac{z}{p}\right)^p = e^z = \left(1 - \frac{z}{p}\right)^{-p}, \quad \text{pour} \quad p = \infty.$$

On constaterait maintenant, d'après un procédé connu, que

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \dots.$$

La série du second membre n'est autre que celle d'où l'on est parti, dans laquelle on a remplacé x par z ; nous conclurons donc de là

$$\varphi(z) = e^z,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\varphi(x) = e^x,$$

et nous aurons

$$(2) \qquad 1 + x < e^x < 1 + xe^x.$$

C'est le résultat que nous voulions obtenir.

Si l'on fût parti de la formule

$$1 - x < [\varphi(x)]^{-1} < (1 + x)^{-1},$$

qui se déduit également de (1) pour les valeurs de x positives, on eût obtenu de la même manière

$$[\varphi(x)]^{-1} = e^{-x} = \varphi(-x),$$

et, par suite,

$$1 - x < e^{-x} < 1 - xe^{-x},$$

ce qui généralise le résultat ci-dessus. Cette dernière formule, du reste, se conclut directement de la formule (2), en multipliant celle-ci par la quantité positive e^{-x}, et transposant.

Parmi les différentes manières de remonter de la série $\varphi(x)$ à l'équation

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^x,$$

la marche que nous avons suivie a cela de particulier qu'elle nous fait retrouver en même temps l'origine de la série, c'est-à-dire les expressions

$$\left(1 + \frac{x}{p}\right)^p, \quad \left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-p}$$

dont $\varphi(x)$ est la limite commune lorsque p devient infini.

2. En résumé, e désignant la somme de la série numérique

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots,$$

on a les formules suivantes :

$$(2) \qquad 1 + x < e^x < 1 + xe^x,$$

$$(3) \qquad 1 + x < e^x < (1 - x)^{-1},$$

$$(4) \qquad \left(1 + \frac{x}{p}\right)^p < e^x < \left(1 - \frac{x}{p}\right)^{-p},$$

$$(5) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots,$$

dont la première n'avait peut-être pas encore été remarquée.

Les inégalités (2) s'étendent à toutes les valeurs réelles de x qui ne sont pas nulles. Plus cette variable converge vers zéro à partir d'une valeur donnée quelconque, plus les quantités séparées par les signes d'inégalité se rapprochent l'une de l'autre. A la limite, on a des relations d'égalité.

Les inégalités (3) ont lieu pour toutes les valeurs négatives de x, et pour les valeurs positives qui ne dépassent pas l'unité.

Enfin, les inégalités (4) ont lieu pour toutes les valeurs de x réelles et différentes de zéro, sous les conditions de p positif et de $x^2 < p^2$.

Quant à l'équation (5), qui détermine le nombre e, et constitue un théorème fondamental en analyse, on doit la considérer comme tout à fait générale, puisque la série du second membre reste convergente pour toute valeur réelle, ou imaginaire, de x.

Il est facile de voir que le nombre e, ainsi déterminé, est le seul qui satisfait constamment à l'une quelconque des formules (2), (3), (4), où l'on fait varier x d'une manière continue à partir de zéro. Cela résulte de ce que, pour tout nombre h différent de e, on peut déterminer p de manière que la quantité h^x se trouve en dehors des limites entre lesquelles est renfermé e^x, d'après la formule (4).

Mais on aura, en posant

$$e^x = h^z,$$

et prenant les logarithmes dans le système dont la base est e,

$$x = z \log h,$$

et, par suite,

$$1 + z \log h < h^z < 1 + zh^z \log h,$$

pour tout nombre positif h.

Cette formule, où z peut varier d'une manière quelconque sans passer par zéro, convient au nombre h à l'exclusion de tout autre nombre, comme la formule (2) à l'égard du nombre e.

3. Nous avons supposé d'avance

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots,$$

ce qui établit qu'il existe effectivement une fonction qui vérifie la double inégalité (1) dans toute l'étendue des valeurs positives de x, et qui finit par fournir des relations d'égalité lorsque x, en décroissant, finit par devenir nul. Mais, on a pu voir que la considération de ce développement n'était pas nécessaire pour la détermination de φ. La formule (1), posée comme une condition à laquelle doit satisfaire la fonction inconnue φ lorsqu'on y fait croître la variable depuis zéro jusqu'à l'infini, suffit en effet, à elle seule, pour reproduire le développement et amener (indirectement, si l'on veut) la solution

$$e^x = \varphi(x)$$

qui s'étend à toutes les valeurs réelles de x.

On peut ajouter, à ce sujet, que si l'on se propose de satisfaire aux inégalités (1) en ne faisant varier x que de zéro à une limite donnée, il peut y avoir des solutions autres que celle considérée qui conviennent à la question.

Que l'on prenne, par exemple,

$$\psi(x) = \frac{2 + x}{2 - x},$$

et l'on aura également

$$\psi(0) = 1,$$

et

$$1 + x < \psi(x) < 1 + x\psi(x),$$

pour toutes les valeurs négatives de x, et pour les valeurs positives moindres que 2. On prouverait sans peine que $\psi(x)$ est une quantité plus grande ou plus petite que e^x, selon que x est ou n'est pas compris entre 0 et 2.

Il resterait à examiner si la fonction $\varphi(x) = e^x$ est la seule qui vérifie la formule (1) pour toute valeur réelle de x, en donnant $\varphi(0) = 1$. C'est sur quoi je reviendrai ailleurs, pour ne pas m'écarter en ce moment de l'objet principal du présent article.

4. Il importe d'observer que la double inégalité (2) peut s'énoncer au moyen de la seule inégalité

$$(6) \qquad 1 + x < e^x$$

considérée par rapport aux valeurs positives et aux valeurs négatives de x; considérée, dis-je, par rapport aux deux étendues distinctes séparées par la valeur $x = 0$.

Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à multiplier l'inégalité

$$1 - x < e^{-x}$$

par e^x, ce qui donne, en transposant,

$$e^x < 1 + xe^x.$$

Ainsi, la double inégalité (2), où il suffit de considérer les valeurs de x de même signe, représente les deux relations distinctes qu'exprime la formule (6) selon qu'on y fait varier x de 0 à $+\infty$, ou de 0 à $-\infty$. On ne saurait effectivement considérer ces relations comme n'en formant qu'une, dès qu'il y a une solution de continuité dans les valeurs de la variable qui vérifient la formule (6). C'est ce qui se voit mieux sur la formule (4) déjà considérée, et qui est une conséquence de (6). Cette formule exprime bien manifestement deux relations distinctes, puisqu'elle fournit deux limites entre lesquelles est comprise la valeur de e^x. Mais, et c'est là le fait capital, il suffit de l'une quelconque de ces deux relations, posée *à priori* comme une condition à laquelle doit satisfaire le nombre inconnu e, pour en déduire aussitôt la série exponentielle et la détermination de e.

Ajoutons ici que la relation (6) avait été remarquée par Cauchy, qui la démontre à l'aide de la série exponentielle et la désigne comme un *théorème duquel on peut déduire des conséquences importantes*.

Mais, ce qui résulte en particulier des considérations qui précèdent, c'est : 1° que la formule (6) équivaut à deux relations essentiellement distinctes, selon le sens dans lequel on y fait varier x, relations qui sont représentées d'une manière générale par la formule (2) ; 2° que, dans quelque sens qu'on y fasse varier x, la formule (6) exprime une propriété caractéristique n'appartenant qu'au nombre e, et servant par conséquent à le définir.

La double inégalité (2) exprime donc un théorème qui a lieu à l'égard du nombre e défini par l'une quelconque des deux inégalités successives qu'elle renferme. On en dira autant de chacune des doubles inégalités (3) et (4) du n° 2.

L'équation (5) a de même une double portée, en ce qu'elle renferme à la fois la définition

$$e = \varphi(1),$$

et le théorème

$$[\varphi(1)]^x = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ représentant toujours la série qui nous a servi plus haut de point de départ.

Les théorèmes énoncés par les formules (2), (3), (4), (5) sont équivalents, car ces formules, considérées en elles-mêmes, sont des conséquences de l'une quelconque d'entre elles, ou, en d'autres termes, elles se déduisent circulairement l'une de l'autre.

5. On est encore amené à la considération du nombre e de la manière suivante, qui peut être regardée comme une simplification du procédé développé par Cauchy dans ses *Résumés analytiques* (Turin, 1833, p. 52) :

Posons l'inégalité

$$1-\frac{1}{m^2}<1.$$

Nous en déduirons successivement, pour les valeurs de m plus grandes que l'unité,

$$1+\frac{1}{m}<\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-1},$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m},$$

et enfin

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m=e=\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m}, \quad \text{pour} \quad m=\infty,$$

en nommant e la limite commune vers laquelle tendent les deux membres de la dernière inégalité lorsque m tend vers l'infini.

Cette marche, plus simple et plus naturelle que la précédente, est aussi plus conforme à celle qui est adoptée dans l'enseignement. On passerait ensuite, comme dans le n° 1, à la limite commune des expressions

$$\left(1+\frac{x}{p}\right)^p, \quad \left(1-\frac{x}{p}\right)^{-p},$$

et de là à la sommation de la série exponentielle.

Tout cela peut se baser, comme on sait, sur la formule du binôme démontrée pour un exposant entier et positif. Je me dispense, je le répète, d'entrer à ce sujet dans des détails et des développements très-essentiels, sans doute, mais qui sont du domaine de l'enseignement courant et peuvent être suppléés par le lecteur. Je ferai observer cependant que la marche indiquée devient bien plus rapide et plus régulière si les expressions dont on cherche la limite sont développées directement au moyen de la formule du binôme étendue à un exposant quelconque, ou même seulement à un exposant négatif et entier. Les séries qu'on obtient ainsi étant toutes convergentes, leur emploi ne saurait donner lieu à objections. On sait d'ailleurs que la formule en question s'établit par des moyens parfaitement admissibles dans les éléments de l'analyse algébrique.

6. Je remarquerai encore, en terminant ce paragraphe, que la double inégalité (2) peut être présentée sous la forme plus symétrique

$$(7) \qquad (b-a)\,e^a < e^b - e^a < (b-a)\,e^b,$$

où a et b désignent deux nombres réels quelconques.

Faisant, dans cette dernière formule, $b - a = x$, et divisant tous les termes par e^a, on en tire effectivement la formule (2). Et, en divisant tous les termes de (7) par e^b, on en tire encore la formule (2), avec changement de x en $-x$. Ainsi, la formule (7) considérée relativement à toutes les valeurs inégales de a et b revient précisément à la formule (2) considérée relativement à toutes les valeurs de x différentes de zéro. Dans le cas spécial de $a = b$, ou $x = 0$, ces formules se réduisent à des égalités. Elles sont donc équivalentes dans toute leur étendue.

On a de même, pour tout nombre positif h,

$$(b-a)\,h^a \log h < h^b - h^a < (b-a)\,h^b \log h,$$

les logarithmes étant pris dans le système dont la base est e; ce qui revient à une formule démontrée précédemment.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question de Licence

(voir 2ᵉ série, t. IV, p. 424);

PAR M. GIGON,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

On propose d'intégrer les équations simultanées

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} + u'y - v'z = 0,\\ &\frac{dz}{dx} + v'y + u'z = 0;\end{aligned}\right.$$

u' et v' désignant les dérivées de deux fonctions données u et v de la variable x. (Faculté des Sciences de Paris, juillet 1865.)

Solution. — Ajoutons ensemble les deux équations (1) après avoir multiplié la seconde par $\sqrt{-1}$, il vient

$$(2)\quad \frac{dy + dz\sqrt{-1}}{dx} + u'\left(y + z\sqrt{-1}\right) + v'\sqrt{-1}\left(y + z\sqrt{-1}\right) = 0.$$

Cette équation renfermant une partie réelle et une partie imaginaire est équivalente, à elle seule, au système des deux équations (1).

En posant

$$(3) \qquad s = y + z\sqrt{-1},$$

l'équation (2) se transforme en la suivante

$$(2\ bis) \qquad \frac{ds}{dx} + \left(u' + v'\sqrt{-1}\right)s = 0,$$

qu'on met sous la forme

$$(2\ ter) \qquad \frac{ds}{s} + \left(u' + v'\sqrt{-1}\right)dx = 0.$$

Dans cette dernière équation, les variables sont séparées ; on intègre, et l'on trouve, en désignant par $A + B\sqrt{-1}$ une constante arbitraire imaginaire,

$$(4) \qquad \log s + \left(u + v\sqrt{-1}\right) = A + B\sqrt{-1}.$$

En séparant dans (4) les parties réelles et les parties imaginaires, on obtiendra les deux intégrales du système (1).

On pose

$$s = m\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\right) = me^{\alpha\sqrt{-1}},$$

et, vu (3), il s'ensuit

$$m = (y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}; \quad \alpha = \text{arc tang}\,\frac{z}{y}; \quad \log s = \log m + \alpha\sqrt{-1}.$$

Observons que dans ce calcul tous les logarithmes indiqués sont népériens.

L'équation (4) s'écrit donc

$$(4\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} &\log(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{-1}\,\text{arc tang}\,\frac{z}{y} + u + v\sqrt{-1} \\ &\quad = A + B\sqrt{-1}; \end{aligned} \right.$$

et par suite, les deux intégrales réelles du système proposé (1), résolues par rapport aux deux constantes arbitraires réelles A et B, sont les suivantes :

$$(5)\quad \begin{cases} \log(y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} + u = \mathrm{A}, \\ \text{arc tang}\,\dfrac{z}{y} + v = \mathrm{B}. \end{cases}$$

Ce résultat se vérifie sans difficulté.

Même question ;

PAR LE P. PÉPIN, S. J.

Intégration des équations simultanées

$$(1)\qquad \frac{dy}{dx} + u'y - v'z = 0,$$

$$(2)\qquad \frac{dz}{dx} + v'y + u'z = 0,$$

u', v' désignant les dérivées de deux fonctions données u, v de la variable x.

Première solution. — Multipliant la première équation par y, la seconde par z, et ajoutant les produits, on obtient

$$y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = -u'(y^2+z^2).$$

Posons

$$y^2+z^2 = t;\quad \text{d'où}\quad y\frac{dy}{dx} + z\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dt}{dx},$$

l'équation précédente pourra s'écrire

$$\frac{dt}{dx} = -2u't,\quad \text{ou}\quad \frac{dt}{t} = -2\,du;$$

d'où

$$Lt = -2u + \text{const};$$

$$(3) \qquad t = Ae^{-2u} = y^2 + z^2,$$

A désignant une constante arbitraire.

Multiplions l'équation (1) par z, et l'équation (2) par y, puis retranchons, nous obtiendrons l'équation

$$z\frac{dy}{dx} - y\frac{dz}{dx} = v'(y^2 + z^2),$$

ou

$$\frac{d\left(\frac{y}{z}\right)}{1 + \left(\frac{y}{z}\right)^2} = dv,$$

dont l'intégrale est

$$\text{arc tang}\,\frac{y}{z} = v + c,$$

d'où

$$(4) \qquad \frac{y}{z} = \text{tang}\,(v + c),$$

c étant une constante arbitraire.

En résolvant les équations (3) et (4) par rapport à y, z, et posant $\sqrt{A} = c'$, on obtient pour intégrales générales des équations proposées

$$y = c'e^{-u}\sin(v + c), \quad z = c'e^{-u}\cos(v + c) \; (*).$$

(*) Les équations (3) et (4) sont les intégrales générales (5) trouvées par M. Gigon (p. 553). Car l'équation (3)

$$y^2 + z^2 = Ae^{-2u}$$

donne immédiatement

$$L(y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} + u = \text{const.} = A;$$

Seconde solution. — On peut arriver au même résultat par l'emploi d'un facteur constant.

Ajoutant les équations proposées, après avoir multiplié la seconde par $-i$, et remarquant qu'on a

$$\frac{v' + iu'}{u' - iv'} = +i, \quad i = \sqrt{-1},$$

on obtient

$$d(y - iz) + (u' - iv')\left[y - \frac{v' + iu'}{u' - iv'}\right] dx = 0;$$

$$\frac{d(y - iz)}{y - iz} = -d(u - iv),$$

d'où

$$\mathrm{L}(y - iz) = -(u + a) + i(v + b);$$

$$y - iz = e^{-a} e^{-u} e^{i(v+b)} = e^{-a} e^{-u}[\cos(v + b) + i\sin(v + b)].$$

Enfin, en égalant séparément les parties réelles et les parties imaginaires, nous aurons pour intégrales générales

$$y = e^{-a} e^{-u} \cos(v + b),$$

$$-z = e^{-a} e^{-u} \sin(v + b).$$

On fera coïncider ces formules avec les précédentes en remplaçant e^{-a} par c', et b par $c - \frac{\pi}{2}$.

Note. — M. Graindorge a résolu la question d'une manière à peu près semblable.

---

et de l'équation (4),

$$\frac{y}{z} = \operatorname{tang}(v + c),$$

on déduit facilement

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{z}{y} + v = \text{const} = \mathrm{B}.$$

G.

Question 825

(voir 2e série, t. VI, p. 478).

PAR M. WILLIÈRE DE THUIN.

Dans un triangle inscrit à une conique, le pôle d'un côté et les seconds points d'intersection de la courbe et des bissectrices des angles formés au sommet sont en ligne droite. (J.-J.-A. MATHIEU.)

Soit la conique

$$l\beta\gamma + m\alpha\gamma + n\alpha\beta = 0,$$

circonscrite au triangle dont les côtés sont

$$(\mathrm{AB}),\ \gamma = 0;\quad (\mathrm{BC}),\ \alpha = 0;\quad (\mathrm{CA}),\ \beta = 0.$$

Le pôle du côté BC est déterminé par l'intersection des deux tangentes

$$(1)\qquad l\beta + m\alpha = 0,\quad l\gamma + n\alpha = 0.$$

Les bissectrices des angles en A ont pour équations

$$\beta - \gamma = 0,\quad \beta + \gamma = 0.$$

En cherchant les points d'intersection de ces deux droites avec la courbe, on trouve qu'ils sont déterminés par les deux systèmes

$$(2)\qquad \beta - \gamma = 0,\quad l\gamma + (m+n)\alpha = 0,$$

$$(3)\qquad \beta + \gamma = 0,\quad \alpha(m-n) - l\gamma = 0.$$

La droite qui passe par ces deux points aura donc pour équation

$$ml\beta - nl\gamma + (m^2 - n^2)\alpha = 0;$$

et l'on voit que cette droite passe aussi par le pôle (1).

Note. — La même question a été résolue par MM. Auguste Macé et Napoléon Porte, élèves du lycée de Grenoble; Alfred Giard, élève du lycée de Douai; André et Jardé, élèves du lycée Louis-le-Grand; Édouard Duvivier, du lycée de Bordeaux; Louis Plivard, Julien Welsch, L. Leclerc et Herment, élèves du lycée de Metz (classe de M. Ribout); Léon Barbier, du lycée de Strasbourg; Édouard Besson, du lycée de Besançon; Ch. Lesquier, du lycée de Caen; Henri Ledoux et Paul Endrès, du lycée de Douai; Alphonse Ellie, maître répétiteur au lycée de Bordeaux; E. Jasserou, élève du lycée de Besançon (classe de M. Chevilliet); A. Lemaître, maître répétiteur au lycée de Besançon.

M. Porte a donné une solution géométrique.

Note sur la question 825;

PAR M. KOEHLER,
Capitaine du Génie.

ÉNONCÉ. — *Dans un triangle inscrit à une conique, le pôle d'un côté et les seconds points d'intersection de la courbe avec les bissectrices des angles formés au sommet opposé sont en ligne droite.*

(J.-J.-A. MATHIEU.)

Le théorème dont il s'agit est un cas particulier d'une propriété plus générale des coniques, dont l'énoncé peut être présenté sous la forme suivante :

Lorsqu'un faisceau harmonique a son sommet en un point d'une conique, les droites qui joignent deux à deux les seconds points d'intersection des rayons conjugués et de la courbe, forment un couple de droites conjuguées par rapport à la conique.

Soit O (a, a', b, b') le faisceau harmonique; il faut prouver que chacune des droites aa', bb' passe par le pôle de l'autre. En vertu d'une propriété fondamentale des coniques, le faisceau O(a, a', b, b') et le faisceau formé autour du point b' par les droites $b'a$, $b'a'$, $b'b$ et par la tangente b'P ont leurs rapports anharmoniques égaux ; on peut donc écrire

$$O(a, a', b, b') = b'(a, a', b, P).$$

Comme on a

$$\frac{\sin(a, b)}{\sin(a, b')} : \frac{\sin(a', b)}{\sin(a', b')} = -1,$$

on peut établir la correspondance de la manière suivante :

$$O(a, a', b, b') = b'(a, b, a', P),$$

ce qui ne serait pas permis, si le rapport anharmonique avait une valeur quelconque. On voit de même que

$$O(a, a', b, b') = b(a, b', a', P).$$

Les deux faisceaux formés en b et en b' sont donc tous deux harmoniques, et de plus deux rayons correspondants coïncident suivant bb' ; donc, les points d'intersection a, a', P des trois autres couples de rayons sont en ligne droite ; en d'autres termes, la droite aa' passe par le pôle P de bb', ce qu'il fallait prouver.

On peut arriver encore très-facilement au même théorème en suivant une marche employée souvent par M. Poncelet, dans le *Traité des Propriétés projectives des figures*.

Soient aOa' un angle inscrit dans un cercle ; Ob, Ob' les bissectrices de cet angle et de son supplément. La droite bb' est un diamètre, la droite aa' lui est perpendiculaire, puisque les arcs ab, ba' sont égaux. Donc, le pôle P de aa' est sur bb', et le pôle de bb' est à l'infini sur aa'. Transformons la figure par homographie, ou par simple perspective ; le cercle devient une conique quelconque, le faisceau $O(a, a', b, b')$ devient un faisceau harmonique quelconque, et les droites aa', bb' restent conjuguées.

On peut énoncer immédiatement le théorème corrélatif suivant, dont la démonstration directe serait d'ailleurs aussi simple.

Si, sur une tangente à une conique, on prend quatre points en rapport harmonique, les points d'intersection des secondes tangentes menées à la courbe par les points conjugués formeront un couple de points conjugués par rapport à la conique.

Et comme cas particulier :

Dans tout triangle circonscrit à une conique, la polaire d'un sommet, la tangente parallèle au côté opposé et la seconde tangente menée à la courbe par le milieu de ce côté se coupent au même point.

Solution géométrique de la question 830;

PAR M. LÉON GEOFFROY,
Élève de l'École Centrale.

ÉNONCÉ. — *On donne dans un plan deux circonférences* O *et* O'; *un point* P *se meut sur la première* O; *l'enveloppe des polaires de ce point, par rapport à la circonférence* O', *est une conique; lorsque le centre de la circonférence* O' *se meut sur une circonférence* O'', *concentrique à la première* O, *quel lieu décrit le centre de cette conique?*

1^er^ *Cas.* — Supposons d'abord que le centre O' soit en dehors de la circonférence O; dans ce cas, l'enveloppe des polaires du point P, c'est-à-dire la polaire réciproque ω de la circonférence O, est une hyperbole.

En effet, il y a toujours deux tangentes O'A, O'B à la circonférence O, se coupant en O'. Les pôles de ces droites

O'A, O'B appartiennent à la polaire réciproque ω; mais ces deux pôles sont à l'infini; la polaire réciproque ω est donc une conique ayant deux branches infinies dans des sens différents; c'est donc une hyperbole.

Je dis maintenant que le centre a de cette conique se trouve sur la droite des centres OO'. En effet, les tangentes à la conique ω aux points situés à l'infini sont les polaires des points A et B du cercle O, c'est-à-dire des droites CD, C'D', qui peuvent facilement se construire, puisque ce sont les cordes de contact des couples de tangentes issues de A et de B; ces droites CD, C'D' sont les asymptotes de l'hyperbole ω, et leur intersection a donne le centre de la conique ω. Or, il résulte des constructions indiquées, qui sont symétriques de part et d'autre de OO', que le point a est sur OO'.

Quand le centre O' décrira une circonférence O'' concentrique à O, la figure dont nous avons indiqué la construction ne fera que tourner, sans déformation, autour du point O. Le lieu du centre a est donc une circonférence concentrique à O, et qu'il est facile de tracer, en effectuant les constructions indiquées pour la détermination du point a.

2e *Cas*. — Supposons maintenant que le centre O' soit en dedans du cercle O; la polaire réciproque ω est alors une conique sans branche infinie, c'est-à-dire une ellipse. La droite OO' est un axe de cette ellipse. En effet, considérons deux points quelconques A, A' du cercle O, symétriquement placés par rapport à OO', les cordes de contact correspondantes du cercle O' se coupent sur OO', et sont également inclinées sur cette droite; les points A et A' étant quelconques, nous voyons que toutes les tangentes à l'ellipse ω se coupent deux à deux sur OO' et qu'elles sont alors également inclinées sur cette droite, ce qui prouve que OO' est un axe de l'ellipse.

Il nous est également facile, dans ce cas, de déterminer la position du centre de l'ellipse ω; prenons les polaires des points L et L', où OO' coupe la circonférence O : ces polaires sont perpendiculaires à OO'; donc ce sont les tangentes aux extrémités d'un axe de l'ellipse ω; on construit donc ainsi l'un des axes de l'ellipse, en position et en grandeur, et, par suite, le centre a se trouve déterminé de position.

Quand O' décrit le cercle O'', on voit, comme précédemment, que le centre a de l'ellipse décrit une circonférence dont le centre est en O.

3^e^ *Cas.* — Le centre O' peut enfin se trouver sur le cercle O, la polaire réciproque ω serait alors une parabole; ce qu'on verrait en remarquant qu'il n'y a alors qu'une seule tangente possible par O' au cercle O, c'est-à-dire que la conique ω n'a qu'une branche infinie. La recherche du centre a devient illusoire; ce centre passe à l'infini.

Solution analytique de la même question;

PAR M. AUGUSTE MACÉ,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Grenoble.

Je prends pour origine le centre O, et pour axes deux droites rectangulaires.

La circonférence O aura pour équation

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

et la circonférence O'

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2;$$

a, b étant les coordonnées du centre O'.

Si x', y' représentent les coordonnées du point P, on aura

(1) $$x'^2 + y'^2 = R^2;$$

et l'équation de la polaire de ce point, par rapport à la circonférence O', sera

(2) $$(x - a)x' + (y - b)y' - ax - by = r^2 - a^2 - b^2.$$

En égalant les rapports des dérivées des équations (1) et (2), prises par rapport à x' et à y', on a, de plus,

(3) $$\frac{x'}{x - a} = \frac{y'}{y - b}.$$

L'élimination de x', y' entre les équations (1), (2) et (3), donnera l'équation de l'enveloppe des polaires.

Or, de l'équation (3) on déduit

$$\frac{x'}{x - a} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = \frac{\pm R}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}},$$

et

$$\frac{y'}{y - b} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} = \frac{\pm R}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}}.$$

En remplaçant x' et y' par leurs valeurs, dans l'équation (2), il vient

(4) $$(ax + by + r^2 - a^2 - b^2)^2 = R^2[(x - a)^2 + (y - b)^2],$$

ce qui est l'équation de l'enveloppe des polaires.

Le centre de cette conique sera donné par les deux dérivées

(5) $$a(ax + by + r^2 - a^2 - b^2) = R^2(x - a),$$

(6) $$b(ax + by + r^2 - a^2 - b^2) = R^2(x - b).$$

Et, comme le point O' se meut sur une circonférence O'' concentrique à la circonférence O, on doit avoir

$$(7) \qquad a^2 + b^2 = K^2.$$

Si, maintenant, nous éliminons a, b, entre les équations (5), (6) et (7), nous aurons le lieu du centre de la conique.

Or, de (4) et de (5) on tire

$$\frac{a}{b} = \frac{x-a}{y-b} = \frac{x}{y}, \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{\pm K}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Substituant les valeurs de a et de b dans l'équation

$$a(ax + by + r^2 - K^2) = R^2(x - a),$$

nous aurons pour l'équation du lieu

$$(R^2 - K^2)^2(x^2 + y^2) = K^2(R^2 + r^2 - K^2)^2.$$

Donc, le lieu du centre de la conique est une circonférence concentrique à la circonférence donnée O.

Note. — Solutions analogues de MM. Willière; Graindorge; J. Welsch, Herment, L. Henning, élèves du lycée de Metz; Niébylowski, élève de l'École Normale.

L'un des Professeurs les plus distingués des Facultés des Sciences, M. Bourget, ayant bien voulu participer à la rédaction des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, nous prévenons qu'à partir de 1868 les articles destinés au Journal peuvent être adressés à M. Bourget, rue de Reims, 6, Paris. GERONO.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME VI, 2e SÉRIE.)

Analyse.

Trigonométrie.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Calcul infinitésimal.

Mécanique.

Bulletin bibliographique.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME VI, 2e SÉRIE.)

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.