NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 511-525

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__511_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 590

(voir 1re série, tome XX, page 141);

PAR M. NEUBERG,
Professeur à l'Athénée royal d'Arlon (Belgique).

Si l'on prend les polaires des points milieux des côtés d'un triangle relativement à une conique quelconque inscrite dans le triangle, ces polaires déterminent un triangle qui a une surface constante.

On peut considérer cette proposition comme une conséquence immédiate de la question 591 (*) appliquée aux coniques, et d'une autre proposition qui trouverait sa place naturelle dans les propriétés très-intéressantes des coniques, énoncées par M. Faure dans le tome XX des *Nouvelles Annales*, p. 55, 56 et 216.

En effet, soit

$$\varphi(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes principaux. Désignons par (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) les coordonnées des sommets d'un triangle circonscrit ABC; par (X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3) celles des milieux A', B', C'

(*) La question 591 a été résolue dans l'année 1865. La démonstration que nous en donnons plus loin est analogue à celle de M. Painvin, t. XIX, p. 293 et 297.

des côtés BC, CA, AB; et par (X'_1, Y'_1), (X'_2, Y'_2), (X'_3, Y'_3) celles des sommets du triangle A″B″C″ conjugué avec A′B′C′. Représentons aussi par S, T, T′ les surfaces de ces trois triangles, et posons

$$\varphi_{m,n} = \frac{X_m X'_n}{a^2} + \frac{Y_m Y'_n}{b^2} - 1.$$

On peut écrire

$$-\frac{4TT'}{a^2 b^2} = \begin{vmatrix} \frac{X_1}{a} & \frac{Y_1}{b} & 1 \\ \frac{X_2}{a} & \frac{Y_2}{b} & 1 \\ \frac{X_3}{a} & \frac{Y_3}{b} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{X'_1}{a} & \frac{Y'_1}{b} & -1 \\ \frac{X'_2}{a} & \frac{Y'_2}{b} & -1 \\ \frac{X'_3}{a} & \frac{Y'_3}{b} & -1 \end{vmatrix},$$

ou, en effectuant la multiplication par lignes,

$$(1) \qquad -\frac{4TT'}{a^2 b^2} = \begin{vmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \varphi_{1,3} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \varphi_{2,3} \\ \varphi_{3,1} & \varphi_{3,2} & \varphi_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Mais les triangles T, T′ étant polaires réciproques, on a $\varphi_{m,n} = 0$ pour $m \gtrless n$, et des valeurs de $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{2,1}$, $\varphi_{3,1}$ on tire, par l'élimination de $\frac{X'_1}{a^2}$, $\frac{Y'_1}{b^2}$,

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & -1-\varphi_{1,1} \\ X_2 & Y_2 & -1 \\ X_3 & Y_3 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

En appelant T_1, T_2, T_3 les moitiés des déterminants

$$\begin{vmatrix} X_2 & Y_2 \\ X_3 & Y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_3 & Y_3 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire les surfaces des triangles OB′C′, OC′A′, OA'B' (O est le centre de l'ellipse), la dernière équation donne

$$\varphi_{1,1}.T_1 + T = 0; \text{ d'où } \varphi_{1,1} = -\frac{T}{T_1}.$$

On trouve semblablement

$$\varphi_{2,2} = -\frac{T}{T_2} \quad \text{et} \quad \varphi_{3,3} = -\frac{T}{T_3}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation (1), il viendra

$$-\frac{4TT'}{a^2b^2} = \varphi_{1,1}\varphi_{2,2}\varphi_{3,3} = -\frac{T^3}{T_1T_2T_3}$$

ou

$$(2) \qquad a^2b^2 = \frac{4T_1T_2T_3}{T^2}T',$$

ce qui est la question 591 appliquée aux coniques.

On peut aussi écrire

$$-\frac{4S^2}{a^2b^2} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & 1 & 0 \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & 0 & 1 \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & 0 & 1 \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Effectuons par lignes la multiplication des deux déterminants et, dans le produit, retranchons des trois dernières lignes et colonnes les premières ligne et colonne multipliées respectivement par $\frac{1}{2}\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{x_3^2}{a^2}+\frac{y_3^2}{b^2}\right)$. En posant

$$\frac{(x_2-x_3)^2}{a^2} + \frac{(y_2-y_3)^2}{b^2} = l_1^2 \ldots,$$

il viendra

$$-\frac{4S^2}{a^2b^2}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2}l_3^2 & -\frac{1}{2}l_2^2 \\ 1 & -\frac{1}{2}l_3^2 & 0 & -\frac{1}{2}l_1^2 \\ 1 & -\frac{1}{2}l_2^2 & -\frac{1}{2}l_1^2 & 0 \end{vmatrix},$$

et en développant,

$$(3)\qquad \frac{16S^2}{a^2b^2}=-\sum l_1^4+2\sum l_1^2 l_2^2.$$

Mais les équations qui expriment que les droites BC, CA, AB sont tangentes à l'ellipse peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{(x_2-x_3)^2}{a^2}+\frac{(y_2-y_3)^2}{b^2}-\frac{(x_2y_3-x_3y_2)^2}{a^2b^2}=0,$$

ou

$$l_1=\frac{2S_1}{ab},\quad l_2=\frac{2S_2}{ab},\quad l_3=\frac{2S_3}{ab},$$

en appelant S_1. S_2, S_3 les moitiés des déterminants

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix},$$

ou les surfaces des triangles OBC, OCA, OAB.

La relation (3) revient par conséquent à

$$a^2b^2=\frac{1}{S^2}(S_1+S_2+S_3)(-S_1+S_2+S_3)(S_1-S_2+S_3)(S_1+S_2-S_3).$$

On constate facilement que

$$S_1+S+S_3=S,\quad -S_1+S_2+S_3=4T_1,$$

$$S_1 - S_2 + S_3 = 4T_2, \quad S_1 + S_2 - S_3 = 4T_1 \; (^*),$$

d'où

$$(4) \qquad a^2 b^2 = \frac{64 T_1 T_2 T_3}{S}.$$

En comparant les relations (2) et (4), on trouve

$$T' = S,$$

ce qui démontre le théorème 590 pour les ellipses inscrites.

On le conclut immédiatement pour les hyperboles tangentes aux trois côtés du triangle, puisqu'il suffit de remplacer dans les équations précédentes b par $b\sqrt{-1}$.

Représentons par d_1, d_2, d_3 les côtés du triangle ABC, ou les doubles des côtés du triangle A'B'C'; par R le rayon du cercle circonscrit, et par δ_1, δ_2, δ_3 les distances du centre de la conique aux droites B'C', C'A', A'B'. Nous pourrons remplacer dans la formule (4) T_1, T_2, T_3 par $\frac{1}{4}d_1\delta_1$, $\frac{1}{4}d_2\delta_2$, $\frac{1}{4}d_3\delta_3$, et $\frac{d_1 d_2 d_3}{S}$ par $4R$, ce qui donnera

$$a^2 b^2 = 4R\delta_1\delta_2\delta_3,$$

d'où le théorème suivant :

Lorsqu'une conique est inscrite dans un triangle, le produit des carrés de ses demi-axes principaux est égal

---

(*) On a, par exemple,

$$2(-S_1 + S_2 + S_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

et, en ajoutant la première ligne aux deux autres, il vient

$$2(-S_1 + S_2 + S_3) = -\begin{vmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ x_1 + x_3 & y_1 + y_3 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} X_3 & Y_3 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \dots$$

au produit des distances de son centre aux droites qui joignent les milieux des côtés du triangle, multiplié par le double du diamètre du cercle circonscrit.

Considérons maintenant une parabole inscrite au triangle ABC et représentée par $\varphi(x, y) = y^2 - 2px = 0$. En adoptant les notations précédentes, sauf à poser $\varphi_{m,n} = Y_m Y'_n - p(X_m + X'_n)$, nous aurons

$$-4p^2TT' \quad \begin{vmatrix} Y_1 & X_1 & -p \\ Y_2 & X_2 & -p \\ Y_3 & X_3 & -p \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y'_1 & -p & X'_1 \\ Y'_2 & -p & X'_2 \\ Y'_3 & -p & X'_3 \end{vmatrix},$$

et en effectuant le produit par les lignes

$$(5) \qquad -4p^2TT' = \begin{vmatrix} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,2} & \varphi_{1,3} \\ \varphi_{2,1} & \varphi_{2,2} & \varphi_{2,3} \\ \varphi_{3,1} & \varphi_{3,2} & \varphi_{3,3} \end{vmatrix}.$$

On a encore $\varphi_{m,n} = 0$ pour $m \gtrless n$; et en éliminant Y'_1, pX'_1 entre les valeurs de $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{2,1}$, $\varphi_{3,1}$, il vient

$$\begin{vmatrix} Y_1 & pX_1 + \varphi_{1,1} & 1 \\ Y_2 & pX_2 & 1 \\ Y_3 & pX_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$2pT - \varphi_{1,1}(Y_2 - Y_3) = 0.$$

On trouve semblablement

$$2pT - \varphi_{2,2}(Y_3 - Y_1) = 0, \qquad 2pT - \varphi_{3,3}(Y_1 - Y_2) = 0.$$

L'équation (5) peut donc s'écrire

$$-4p^2TT' = \varphi_{1,1}\varphi_{2,2}\varphi_{3,3} = \frac{8p^3T^3}{(Y_1 - Y_2)(Y_2 - Y_3)(Y_3 - Y_1)}$$

ou

$$(6) \qquad 2p = \frac{(Y_1 - Y_2)(Y_2 - Y_3)(Y_1 - Y_3)}{T^2} T'.$$

On peut remarquer que le numérateur de la dernière fraction égale le produit des projections des côtés du triangle A′B′C′ sur la directrice de la parabole.

Il est évident que dans la formule (6) on peut remplacer les triangles A′B′C′ et A″B″C″ respectivement par ABC et par le triangle qui a ses sommets aux points de contact des tangentes BC, CA, AB; comme ce dernier vaut le double de ABC, on aura

$$(7) \qquad 2p = \frac{2(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_1 - y_3)}{S}.$$

Des relations (6) et (7) on conclut encore

$$T' = S.$$

On voit aisément que la proposition (590) s'applique aussi aux paraboles circonscrites, ou conjuguées au triangle ABC. Car, dans le premier cas, on a

$$4pS = \begin{vmatrix} y_1 & 2px_1 & 1 \\ y_2 & 2px_2 & 1 \\ y_3 & 2px_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_1^2 & 1 \\ y_2 & y_2^2 & 1 \\ y_3 & y_3^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Le dernier déterminant, en vertu du théorème dit *de Vandermonde*, est égal au produit

$$(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2);$$

d'où

$$(8) \qquad 2p = \frac{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2)}{2S};$$

et cette relation, comparée à l'équation (6), donne

$$T' = T = \frac{S}{4}.$$

En supposant la parabole conjuguée au triangle ABC, on peut faire coïncider dans la formule (6) les triangles

T et T′ avec S, ce qui donnera

$$(9) \qquad 2p = \frac{(y_1 - y_2)(y_2 - y_3)(y_1 - y_3)}{S},$$

et les relations (9) et (6) combinées conduisent à l'équation

$$T' = 2T = \frac{S}{2} \ (^*).$$

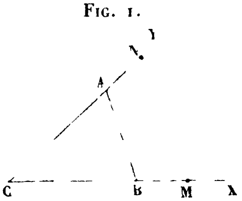
Les formules (7), (8) et (9) sont ordinairement mises sous la forme

$$p = 4R \sin\theta \sin\theta' \sin\theta'',$$
$$p = R \sin\theta \sin\theta' \sin\theta'',$$
$$p = 2R \sin\theta \sin\theta' \sin\theta'',$$

θ, θ', θ'' étant les angles que fait l'axe focal de la parabole avec les côtés du triangle.

Note du Rédacteur. — Pour déterminer une conique inscrite dans un triangle ABC, on peut donner arbitrairement deux des points M, N auxquels la courbe doit toucher deux des côtes CB, CA. Lorsque le produit AN $\times$ BM est moindre que CA $\times$ CB, la conique inscrite est une ellipse; et suivant qu'on a

FIG. 1.



$$AN \times BM = CA \times CB \quad \text{ou} \quad AN \times BM > CA \times CB,$$

cette conique est une parabole ou une hyperbole.

(*) Ce résultat aurait aussi pu s'obtenir en remarquant que le triangle A′B′C′, qui a ses sommets aux milieux des côtés d'un triangle conjugue à la parabole, est circonscrit à la courbe (voir *Nouvelles Annales*, année 1865, p. 310), et que son conjugué A″B″C″ en vaut le double.

Car, en prenant pour axes de coordonnées les côtés CB, CA et désignant par a, b, m, n les droites CB, CA, CM, CN, l'équation de la conique inscrite est

$$(1) \qquad (my + nx - mn)^2 - 4mn\,\frac{(m-a)(n-b)}{ab}\,xy = 0.$$

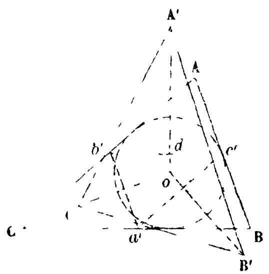
Il est évident que la surface du triangle déterminé par les polaires des milieux des côtés CA, CB, AB, relativement à cette courbe, est une fonction des paramètres de l'équation (1) et de l'angle des axes. Or, si cette fonction conserve constamment la même valeur, quelles que soient les valeurs de m et de n satisfaisant à l'inégalité

$$(m-a)(n-b) < ab,$$

il faut en conclure qu'elle est indépendante de m et de n : c'est dire que si la proposition 590 existe pour toutes les ellipses inscrites, elle a de même lieu pour les paraboles et les hyperboles.

Mais, quelle que soit l'ellipse inscrite, on peut la projeter suivant un cercle; donc, tout se réduit à faire voir que : *Si l'on prend les polaires des milieux a', b', c' des côtés d'un triangle* ABC *par rapport à un cercle tan-*

FIG. 2.



gent aux trois côtés, ces polaires déterminent un triangle A'B'C' *équivalent au triangle donné* ABC.

Cette proposition résulte d'un calcul bien simple. En effet, soient s et $2p$ la surface et le périmètre du triangle ABC; h la perpendiculaire abaissée du sommet A sur le côté BC; o et r le centre et le rayon du cercle inscrit dans le triangle.

Puisque le point A' est le pôle de $b'c'$ par rapport au cercle, la droite oA' est perpendiculaire sur $b'c'$ en un point d tel qu'on a

$$od \times o\text{A}' = r^2.$$

De plus,

$$od = \frac{h}{2} - r = r\left(\frac{h}{2r} - 1\right) = r\left(\frac{p}{a} - 1\right) = \frac{r(p-a)}{a};$$

donc

$$oA' = \frac{ar}{p-a},$$

et de même :

$$oB' = \frac{br}{p-b}, \quad oC' = \frac{cr}{p-c}.$$

D'autre part, les angles $A'oB'$, ACB étant supplémentaires, les surfaces des triangles $A'oB'$, ACB sont entre elles dans le rapport des produits $oA' \times oB'$ et ab; d'où

$$A'oB' = s \times \frac{r^2}{(p-a)(p-b)} = \frac{s(p-c)}{p}.$$

Pareillement

$$A'oC' = \frac{s(p-b)}{p} \quad \text{et} \quad B'oC' = \frac{s(p-a)}{p}.$$

Il s'ensuit

$$A'oB' + A'oC' + B'oC' = \frac{s(3p-a-b-c)}{p} = s.$$

Par conséquent,

$$A'B'C' = ABC.$$

On démontre, d'une manière semblable, que le triangle déterminé par les polaires des points a', b', c', relatives à l'un quelconque des trois cercles ex-inscrits au triangle donné ABC, est equivalent à ce dernier triangle.

G.

Question 775, 776, 777;

PAR M. JOSEPH GRAINDORGE,
Élève ingénieur des Mines à Liége.

775. *L'équation*

$$(1) \quad F(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0$$

ne peut avoir deux racines réelles. (SYLVESTER.)

Pour résoudre cette question, ainsi que les deux suivantes, nous rappellerons la propriété connue, que deux racines consécutives d'une équation comprennent un nombre impair de racines de l'équation dérivée première.

L'équation (1), dont tous les termes sont positifs, n'admet aucune racine positive. On peut l'écrire sous cette forme :

$$F(x) = F'(x) + \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} = 0,$$

d'où

$$(2) \qquad F'(x) = -\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}.$$

Si n est un nombre pair, $F'(x)$ est négatif pour toute valeur réelle de x autre que *zéro*; et si n est impair, $F'(x)$ est positif pour toute valeur négative de x. Donc, d'après le principe rappelé, l'équation $F(x) = 0$ ne peut avoir deux racines réelles.

776. *L'équation*

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(x) = 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2} x^2 + \ldots \\ + \frac{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots n} x^n = 0 \end{aligned} \right.$$

ne peut avoir deux racines réelles quand γ *est* > 0, *ou* $< -n$. (Sylvester.)

On trouve facilement que l'équation proposée peut s'écrire

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} F(x) = \frac{1}{\gamma}(1-x) F'(x) \\ + \frac{(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}{1.2\ldots(n-1)} \left(\frac{\gamma}{n} + 1\right) x^n = 0. \end{aligned} \right.$$

Premier cas. $\gamma > 0$.

L'équation (3) ne peut avoir que des racines négatives, puisque tous ses termes sont positifs.

Soient α et β deux racines consécutives de cette équation; si n est un nombre pair, en substituant successivement α et β à x dans l'équation (4), les facteurs $1-\alpha$, $1-\beta$ seront tous les deux positifs, ainsi que α^n et β^n. Il en résultera que $F'(\alpha)$ et $F'(\beta)$ seront négatifs. Donc, α et β ne peuvent être racines de l'équation $F(x)=0$.

Si n est impair, α^n et β^n seront négatifs, et $F'(\alpha)$, $F'(\beta)$ positifs. Par conséquent, si α est la racine que l'équation admet (puisqu'elle est de degré impair), β ne pourra être racine de cette équation.

Deuxième cas. $\gamma < -n$.

En remplaçant, dans l'équation (4), γ par $-\gamma'$, il viendra

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{\gamma'}(1-x)F'(x)\\ &+\frac{(1-\gamma')(2-\gamma')\ldots(n-1-\gamma')}{1.2.3\ldots(n-1)}\left(1-\frac{\gamma'}{n}\right)x^n, \end{aligned}\right.$$

où γ' sera $> n$.

L'équation proposée devenant

$$\begin{aligned} F(x) = 1-\gamma' x &+ \frac{\gamma'(\gamma'-1)}{1.2}x^2 - \ldots\\ &\pm\frac{\gamma'(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n+1)}{1.2\ldots n}x^n = 0 \end{aligned}$$

ne pourra avoir que des racines positives, puisque ses termes sont alternativement positifs et négatifs.

1° Si n est un nombre pair, il vient

$$\begin{aligned} F(x) = &-\frac{1}{\gamma'}(1-x)F'(x)\\ &+\frac{(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\left(\frac{\gamma'}{n}-1\right)x^n = 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{\gamma'}(1-x)F'(x) = \frac{(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\left(\frac{\gamma'}{n}-1\right)x^n.$$

Comme γ' est plus grand que n, le second membre de cette dernière équation est positif pour toute valeur réelle de x. Ainsi, le signe de $F'(x)$ est le même que celui de $(1-x)$. Il s'ensuit que, si α et β sont deux racines consécutives de l'équation $F(x)=0$, l'une d'elles doit être moindre que l'unité, et l'autre plus grande. Ce qui revient à dire que l'équation $F(x)=0$ doit avoir une racine comprise entre 0 et 1, et une seule. Or, c'est ce qui n'a pas lieu, car en remplaçant x par 0 et 1 dans $F(x)$, les résultats de ces substitutions sont positifs. En effet,

$$F(0)=1,$$

et

$$F(1) = 1-\gamma'+\ldots+\frac{\gamma'(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n+1)}{1.2\ldots n}$$
$$= \frac{(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n)}{1.2\ldots n},$$

parce que n est pair.

On voit donc que l'équation $F(x)=0$ ne peut avoir deux racines réelles, et par conséquent toutes ses racines sont imaginaires.

2° Si n est impair, il vient

$$F(x) = -\frac{1}{\gamma'}(1-x)F'(x)$$
$$-\frac{(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\left[\frac{\gamma'}{n}-1\right]x^n = 0,$$

d'où

$$\frac{1}{\gamma'}(1-x)F'(x) = -\frac{(\gamma'-1)\ldots(\gamma'-n+1)}{1.2\ldots(n-1)}\left[\frac{\gamma'}{n}-1\right]x^n.$$

Dans ce cas, $F'(x)$ a un signe contraire à celui de $(1-x)$; donc, si α et β sont deux racines consécutives de $F(x)=0$, il faut encore que l'une d'elles soit plus petite et l'autre plus grande que l'unité. Mais, l'équation étant de degré impair, si elle a deux racines réelles α, β, elle en admet nécessairement une troisième; donc deux racines consécutives seraient plus petites que l'unité, ou plus grandes que l'unité, ce qui est impossible, comme on vient de le voir. D'où il faut conclure que l'équation n'admet qu'une seule racine réelle.

777. *Si l'équation $f(x)=0$, du degré m, n'a que des racines imaginaires, l'équation*

$$f(x)+af'(x)+a^2f''(x)+\ldots+a^mf_m(x)=0$$

n'aura, elle aussi, que des racines imaginaires.

(HERMITE.)

L'équation

$$F(x)=f(x)+af'(x)+\ldots+a^mf_m(x)=0$$

est de degré pair, comme $f(x)=0$. Donc, si elle a une racine réelle, elle en aura au moins deux que nous pouvons considérer comme consécutives.

Or, on a

$$F(x)=f(x)+a.F'(x);$$

et si α, β sont les deux racines consécutives de $F(x)=0$, il faut que $F'(\alpha)$ et $F'(\beta)$ aient des signes contraires.

Mais l'égalité

$$F(x)=f(x)+a.F'(x)$$

donne

$$0=f(\alpha)+a.F'(\alpha),$$
$$0=f(\beta)+a.F'(\beta);$$

l'équation $f(x)=0$ n'ayant pas de racine réelle, $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ ont le même signe; il en est donc de même de $F'(\alpha)$

et $F'(\beta)$, ce qui prouve que α et β ne peuvent être racines de $F(x) = 0$; et, par conséquent, cette équation n'a que des racines imaginaires.

Note. — Même solution des questions 775, 776, 777 par M. Laisant, et de la question 775 par M. Laduron, élève à l'École des Mines de Liége.