CH. CAYLA

Composition mathématique donnée en 1864 aux candidats à l'École polytechnique (2e sujet)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 474-477

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__474_0>

COMPOSITION MATHÉMATIQUE

donnée en 1864 aux candidats à l'École Polytechnique (2e sujet);

SOLUTION DE M. CH. CAYLA,
Répétiteur au collége Rollin.

On donne sur un plan une circonférence (O), *un point* A *et une droite* (D). *Du point* A *on mène une droite qui coupe* (D) *en un point* B; *sur* AB *comme diamètre on décrit une circonférence; cette circonférence et la circonférence* O *ont pour corde commune une droite qui rencontre* AB *en un point* M. *On demande le lieu décrit par le point* M, *lorsque la droite* AB *tourne autour du point* A.

1° *Le point* A *et la circonférence* O *étant fixes, examiner quelles sont les différentes formes que présente le lieu* (M) *lorsque l'on considère des droites telles que* (D), *parallèles entre elles.*

2° *Faire voir que les différentes courbes ainsi obtenues passent par quatre points fixes et ont leurs axes parallèles.*

Je prends pour axes de coordonnées la perpendiculaire et la parallèle menées par le point A à la droite donnée D.

Soient a et b les coordonnées du centre O, l'équation de la circonférence donnée est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + p^2 = 0, \tag{1}$$

en posant

$$p^2 = a^2 + b^2 - r^2.$$

La sécante mobile AB a pour équation

$$y = mx. \tag{2}$$

L'équation du second cercle dont le centre est au milieu de AB est

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - \alpha x - m\alpha y = 0,$$

α étant l'abscisse de la droite (D).

La corde commune, ou l'axe radical des deux circonférences, a pour équation

$$(4) \qquad (2a - \alpha)x + (2b - m\alpha)y - p^2 = 0.$$

Éliminant m entre les équations (2) et (4), on a l'équation du lieu

$$(5) \qquad (2a - \alpha)x^2 + 2bxy - \alpha y^2 - p^2 x = 0$$

Donc le lieu du point est une conique.

Discussion. — La quantité dont le signe caractérise le genre de la conique est

$$b^2 + \alpha(2a - \alpha) \quad \text{ou} \quad -[\alpha - (a + d)][\alpha + (d - a)],$$

d représentant la distance OA.

En considérant α comme une coordonnée courante, chacun des facteurs, égalé à zéro, représente une parallèle à l'axe des y, et qu'il est facile de construire. On a ainsi deux droites D', D'' parallèles à D.

Si la droite D est située entre D', D'', le lieu est une hyperbole; si elle est extérieure à ces deux parallèles, le lieu est une ellipse. Enfin, si elle coïncide avec l'une de ces parallèles, le lieu est une parabole.

Quand le lieu est une ellipse, cette ellipse se réduit à un point, qui est l'origine, pour une valeur infiniment grande de α, et elle devient une circonférence lorsque $b = 0$ et $a = 0$. Dans ce cas le point A est le centre du cercle donné.

Si la droite D se confond avec l'axe des y, on aura

$\alpha = 0$, et l'équation du lieu se réduira à

$$2ax^2 + 2bxy - p^2x = 0.$$

Cette dernière équation représente le système des deux droites $x = 0$, $ax + by = \frac{p^2}{2}$.

Lorsque $\alpha = a$, la droite D passe par le centre du cercle donné, et le lieu représenté par l'équation (5) est une hyperbole équilatère.

Le lieu est une parabole lorsqu'on a

$$\alpha = a + d \quad \text{ou} \quad \alpha = a - d.$$

L'équation (5) peut s'écrire

$$\alpha(x^2 + y^2) - x(2ax + 2by - p^2) = 0;$$

sous cette forme on reconnaît l'équation générale des coniques passant par les quatre points d'intersection de la conique $x^2 + y^2 = 0$ avec les droites

$$x = 0, \quad ax + by - \frac{p^2}{2} = 0.$$

Donc, les différentes coniques obtenues en faisant varier α sont tangentes à l'origine à l'axe des y, et elles passent, en outre, par deux points imaginaires conjugués dont il serait facile d'avoir les coordonnées.

L'équation qui fait connaître les coefficients angulaires des axes est

$$u^2 + 2\frac{a}{b}u - 1 = 0.$$

On voit que quand la droite D se déplace parallèlement à elle-même, les directions des axes des coniques ne changent pas. Les coefficients angulaires des axes ont pour valeurs $\frac{-a \pm d}{b}$. L'équation qui fait connaître les coefficients angulaires des axes montre que ces coefficients ne dépendent que du rapport $\frac{a}{b}$; par conséquent les axes des coniques conservent toujours les mêmes directions quand le centre O du cercle donné se déplace sur la droite AO.

Il est facile d'avoir le lieu des centres des coniques obtenues quand α varie. On reconnaît que c'est une hyperbole tangente au point A à l'axe des abscisses.