NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TH. DIEU

Question de licence

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 450-457

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__450_0>

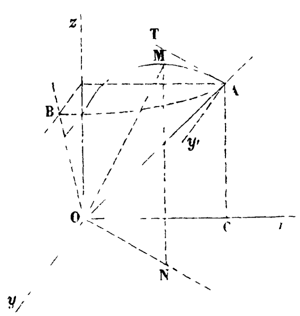
QUESTION DE LICENCE;

Solution de M. Th. DIEU,
Agrégé, Docteur ès sciences.

1. Problème de Mécanique.

Un point matériel, astreint à rester sur un cône de révolution, est sollicité par une force dirigée vers le sommet, proportionnelle à la masse du point matériel et à ses distances au sommet. Il part d'une position donnée A *avec une vitesse* v_0 *dirigée suivant une tangente* AT *au cône. Quel sera le mouvement du point matériel? On fait abstraction du frottement.*

Le sommet du cône est pris pour origine, et son axe pour axe des z; le plan zx passe par la position initiale A;



l'angle de la direction AT de la vitesse v_0 avec la tangente Ay' au parallèle AB du cône sera désigné par ε, AOz par α, AO par r_0, AC par z_0 et OC par ρ_0.

Soit M la position du point matériel à la fin d'une durée t comptée depuis le commencement du mouvement. x, y, z représenteront les coordonnées de M, r la distance OM, ρ sa projection ON sur le plan xy, θ l'angle NOx, et v la vitesse du mobile.

Le principe de Leibnitz donne $v^2 = kr^2 + C$, ou

$$(1) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = (kz^2 \operatorname{séc}^2\alpha + C)\,dt^2,$$

C désignant la quantité $v_0^2 - kr_0^2$, et k la force rapportée aux unités de masse et de distance. k sera positif pour une répulsion, négatif pour une attraction.

Le principe des aires s'applique au mouvement projeté sur xy, car la réaction de la surface rencontre toujours l'axe des z. On a donc $\rho^2 d\theta = C' dt$, ou

$$(2) \qquad x\,dy - y\,dx = C'\,dt,$$

C' désignant $\rho_0^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$ ou $\rho_0 v_0 \cos\varepsilon$, car $\rho_0 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$ est la composante de v_0 suivant Ay'.

De l'équation (2) et de l'équation différentielle du cône,

$$x\,dx + y\,dy = z\,dz \operatorname{tang}^2\alpha,$$

on déduit

$$(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2) = C'^2 dt^2 + z^2 dz^2 \operatorname{tang}^4\alpha.$$

Remplaçant $x^2 + y^2$ par $z^2 \operatorname{tang}^2\alpha$, $dx^2 + dy^2$ par sa valeur tirée de l'équation (1), et résolvant, il vient

$$(3) \qquad dt = \pm \frac{z\,dz . \operatorname{tang}\alpha \operatorname{séc}\alpha}{\sqrt{kz^4 \operatorname{tang}^2\alpha \operatorname{séc}^2\alpha + Cz^2 \operatorname{tang}^2\alpha - C'^2}}.$$

La quantité sous le radical serait un carré si l'on avait

$$C^2 \sin^2\alpha + 4kC'^2 \quad \text{ou} \quad (v_0^2 - kr_0^2)^2 + 4kr_0^2 v_0^2 \cos^2\varepsilon = 0,$$

ce qui exige $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ avec $v_0^2 = kr_0^2$ pour une répulsion, et

$\varepsilon = 0$ avec $v_0^2 = -kr_0^2$ pour une attraction; mais ces cas particuliers seront d'abord écartés.

En posant

$$z^2 \operatorname{tang}\alpha = u, \quad C \sin\alpha \cos\alpha = 2n \quad \text{et} \quad C' \cos\alpha = p,$$

la formule (3) se réduit à

$$2\,dt = \pm \frac{du}{\sqrt{ku^2 + 2nu - p^2}}.$$

Attraction. — Soit $k = -\mu^2$. On a

$$2\,dt = \pm \frac{du}{\sqrt{\frac{n^2}{\mu^2} - p^2 - \left(\mu u - \frac{n}{\mu}\right)^2}},$$

dont l'intégrale est

$$2\mu(t + \gamma) = \mp \operatorname{arc\,cos} \frac{\mu^2 u - n}{\sqrt{n^2 - \mu^2 p^2}},$$

γ désignant la constante arbitraire. L'intégrale de l'équation (3), c'est-à-dire de celle qui s'en déduit par la substitution de $-\mu^2$ à k, est donc,

$$\mu^2 z^2 \operatorname{tang}\alpha = n + \sqrt{n^2 - \mu^2 p^2}\,.\cos 2\mu(t + \gamma)$$

quel que soit le signe à prendre dans le second membre.

La condition d'avoir $z = z_0$ pour $t = 0$ donne

$$\cos 2\mu\gamma = \frac{\mu^2 z_0^2 \operatorname{tang}\alpha - n}{\sqrt{n^2 - \mu^2 p^2}}.$$

Cette valeur de $\cos 2\mu\gamma$ sera entre -1 et $+1$, puisque le mouvement doit avoir lieu; c'est ce qu'on verra d'ailleurs facilement en remplaçant n et p par ce qu'ils représentent. Soit γ' l'arc compris entre 0 et $\frac{\pi}{2\mu}$ qui satisfait; $-\gamma'$ satisfait aussi. Le mouvement de la projection du mobile sur Oz est déterminé par une des intégrales particulières

$$(4)\qquad \mu^2 z^2 \operatorname{tang}\alpha = n + \sqrt{n^2 - \mu^2 p^2}.\cos 2\mu\,(t \mp \gamma').$$

Les valeurs de z sont croissantes ou décroissantes à partir de z_0 selon qu'on prend $-$ ou $+$ devant γ'; le premier signe répond donc au signe supérieur dans la formule (3), et à une vitesse initiale dirigée du côté de AB opposé au sommet, tandis que le second répond au signe inférieur dans la même formule et à une vitesse initiale dirigée du côté du sommet ou suivant Ay'.

Quel que soit le signe qu'on doive prendre dans la formule (4) :

1° *Le mobile ira de sa position initiale jusqu'à un des plans situés du côté des z positifs, représentés par*

$$(5)\qquad \mu^2 z^2 \operatorname{tang}\alpha = n \pm \sqrt{n^2 - \mu^2 p^2},$$

puis de ce plan à l'autre, et ainsi de suite. S'il va d'abord vers le plan le plus éloigné du sommet, il y arrive pour $t = \gamma'$; *s'il va d'abord au contraire vers le plan le plus voisin du sommet, il y arrive pour* $t = \frac{\pi}{2\mu} - \gamma'$; *enfin la durée du passage d'un de ces plans à l'autre est toujours* $\frac{\pi}{2\mu}$.

2° *z reprend périodiquement les mêmes valeurs pour des valeurs de t en progression par différence de raison égale à* $\frac{\pi}{\mu}$, *à partir d'un instant quelconque.*

De l'équation (4) et de $\rho^2 d\theta = C'dt$ qui revient à $z^2 \operatorname{tang}\alpha . d\theta = \frac{p}{\sin\alpha}\,dt$, on tire

$$d\theta = \frac{p\mu^2}{\sin\alpha}\,\frac{dt}{n + \sqrt{n^2 - \mu^2 p^2}\,.\cos 2\mu\,(t \mp \gamma')}.$$

Posant

$$(n - \sqrt{n^2 - \mu^2 p^2}) = a^2 (n + \sqrt{n^2 - \mu^2 p^2}),$$

cette formule se ramène à

$$d\theta = \frac{1}{\sin\alpha} \frac{d[a \operatorname{tang} \mu (t \mp \gamma')]}{1 + a^2 \operatorname{tang}^2 \mu (t \mp \gamma')},$$

dont l'intégrale, prise de telle sorte que $\theta = 0$ réponde à $t = 0$, est

$$(6)\ \theta = \frac{1}{\sin\alpha} \{\text{arc tang}[a \operatorname{tang} \mu (t \mp \gamma')] \pm \text{arc tang}(a \operatorname{tang} \mu\gamma')\}.$$

D'après cette formule, où l'on doit adopter les signes supérieurs ou inférieurs, respectivement associés à ceux des formules (4) et (5), selon que le mobile s'éloigne ou se rapproche d'abord du sommet :

1° *Si le mobile s'éloigne d'abord du sommet, on a* $\theta = \frac{\text{arc tang}(a \operatorname{tang} \mu\gamma')}{\sin\alpha}$ *lorsqu'il arrive sur le premier des plans* (5), *et si au contraire il se rapproche d'abord du sommet, on a* $\theta = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}(a \operatorname{tang} \mu\gamma')\right]$ *lorsqu'il arrive sur le second de ces plans. Pendant que le mobile passe de l'un à l'autre,* θ *augmente constamment de* $\frac{\pi}{2\sin\alpha}$.

2° θ *croît toujours de* $\frac{\pi}{\sin\alpha}$ *dans des intervalles de temps successifs égaux à* $\frac{\pi}{\mu}$ *à partir d'un instant quelconque.*

En rapprochant cette dernière conclusion de son analogue relative à z, on voit que :

Le mouvement considéré à partir d'un instant quelconque est périodique. La durée de la période est $\frac{\pi}{\mu}$.

A la fin d'une période le mobile se trouve sur le même parallèle qu'au commencement, mais dans une position différente. Ses vitesses au commencement et à la fin ont la même valeur, et leurs directions font des angles égaux, dans le même sens, avec le parallèle.

Si $\frac{\pi}{\sin\alpha}$ était contenu un nombre entier de fois dans un multiple $2N\pi$ de 2π, c'est-à-dire si $2N\sin\alpha$ était un nombre entier N', après une durée $\frac{N'\pi}{\mu}$ écoulée à partir d'un instant quelconque, z, r, $\frac{dz}{dt}$ et ν auraient repris les mêmes valeurs, tandis que θ aurait augmenté de $2N\pi$; le mobile serait donc dans la même position et aurait la même vitesse en grandeur et en direction qu'à l'instant à partir duquel on le considère. Dans ce cas seulement, la trajectoire est une courbe finie.

Quand $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire pour une vitesse initiale dirigée suivant Ay', l'équation (5) donne $z = z_0$ et $z = \frac{\nu_0 \cos\alpha}{\mu}$ ou $z_0 . \frac{\nu_0}{\mu r_0}$. Selon qu'on a $\nu_0 > \mu r_0$ ou $\nu_0 < \mu r_0$, le mobile s'éloigne d'abord du sommet ou s'en rapproche.

Si avec $\varepsilon = 0$ on a $\nu_0 \doteq \mu r_0$, les plans (5) se confondent tous deux avec celui du parallèle AB, et cela indique que le mobile décrit ce parallèle. Dans ce cas particulier, en effet, la valeur (3) de dt serait imaginaire si l'on n'avait toujours $z = z_0$, car la quantité sous le radical, (substitution faite de $-\mu^2$ à h), se réduit à

$$-\mu^2 \operatorname{tang}^2\alpha \operatorname{séc}^2\alpha (z - z_0)^2.$$

L'équation (1) donne $\nu = \nu_0$, et l'équation (2)

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{C'}{\rho_0^2} = \frac{\nu_0}{\rho_0}, \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{\nu_0}{\rho_0} t.$$

Répulsion. — Soit $k = \mu^2$. On a

$$2\,dt = \pm \frac{du}{\sqrt{\left(\mu u + \frac{n}{\mu}\right)^2 - \left(\frac{n^2}{\mu^2} + p^2\right)}}.$$

Posant $\mu^2 u + n = \xi \sqrt{n^2 + \mu^2 p^2}$, il vient

$$2\mu\,dt = \pm \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}},$$

dont l'intégrale est

$$2\mu(\gamma \pm t) = l\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right),$$

γ désignant la constante arbitraire. On tire de là

$$\xi = \frac{1}{2}\left(e^{2\mu(\gamma \pm t)} + e^{-2\mu(\gamma \pm t)}\right).$$

Par suite, l'intégrale générale de l'équation (3), substitution faite de μ^2 à k, est

$$\mu^2 z^2 \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{n^2 + \mu^2 p^2}\left(e^{2\mu(\gamma \pm t)} + e^{-2\mu(\gamma \pm t)}\right) - n.$$

Pour avoir l'intégrale particulière qui convient au problème, il suffit de déterminer γ par les deux formules

$$\xi_0 = \frac{\mu^2 z_0^2 \operatorname{tang}\alpha + n}{\sqrt{n^2 + \mu^2 p^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{2\mu} \cdot l\left(\xi_0 + \sqrt{\xi_0^2 - 1}\right).$$

Quand le mobile se rapproche d'abord du sommet du cône, il faut prendre les signes inférieurs; alors z décroît jusqu'à la valeur positive donnée par

$$\mu^2 z^2 \operatorname{tang}\alpha = \sqrt{n^2 + \mu^2 p^2} - n,$$

puis croît ensuite indéfiniment. Quand au contraire le mobile s'éloigne d'abord du sommet, il faut prendre les signes supérieurs, et alors z croît toujours à partir de sa valeur initiale.