NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. DE VIRIEU

Sur le volume d'un tétraèdre et sur un théorème de Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 316-317

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__316_0>

SUR LE VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE ET SUR UN THÉORÈME DE STEINER;

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon (institution Sainte-Barbe).

Soit ABCD un tétraèdre; désignons par AH et AH′ les perpendiculaires abaissées du point A sur la face BCD et sur C′D′ projection de CD sur un plan mené par A perpendiculairement à AB.

AH est la hauteur du tétraèdre; AH′ la distance des arêtes opposées AB, CD. Soit δ l'angle aigu que forme le plan de la face BCD et le plan mené par A perpendiculairement à AB; c'est aussi l'angle des droites AB, AH.

V désignant le volume, on a

$$V = \frac{1}{3}\,\mathrm{AH} \times \mathrm{BCD}, \qquad \mathrm{AC'D'} = \mathrm{BCD}\cos\delta,$$

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\cos\delta, \qquad \mathrm{AC'D'} = \frac{1}{2}\,\mathrm{AH'} \times \mathrm{C'D'};$$

d'où

$$V = \frac{1}{6}\,\mathrm{AB} \times \mathrm{AH'} \times \mathrm{C'D'}.$$

Mais $\mathrm{C'D'} = \mathrm{CD}\cos\mu$, μ désignant l'angle aigu que forment les droites C′D′, CD. Or μ est le complément de l'angle aigu que forment les arêtes opposées CD, AB, et on a

$$V = \frac{1}{6} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{CD} \times \mathrm{AH'} \times \sin\left(\widehat{\mathrm{AB.CD}}\right).$$

Théorème. — *Le volume d'un tétraèdre est égal au sixième du produit de deux arêtes opposées multiplié* *par le produit de leur distance mutuelle et du sinus de l'angle qu'elles forment.*

THÉORÈME DE STEINER. — *Soient deux droites* P, Q, *non situées dans le même plan; si deux points* A, B *se meuvent sur* P *en conservant leur distance, que deux points* C, D *se meuvent sur* Q, *en conservant leur distance, tous les tétraèdres ayant pour sommets ces quatre points mobiles, sont équivalents.*