Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 273-284

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__273_1>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 556

(voir tome XIX, page 464),

PAR M. MERCE BUSCO.

C_1, C_2, C_3 *sont trois cônes de même degré ayant leurs trois sommets sur la même droite; si* C_1 *coupe* C_3 *suivant une courbe plane, et que* C_2 *coupe* C_3 *suivant une courbe plane,* C_1 *et* C_2 *se couperont aussi suivant une courbe plane et les trois plans passeront par la même droite.* (STEINER.)

On peut prendre pour plans des zx et des zy le plan de la base commune de C_1 et C_3 et celui de la base de C_2 et C_3. Quant au plan des xy ce sera un plan *quelconque* mené par la ligne des sommets S_1, S_2, S_3. Ce plan coupe C_3 suivant un système de m droites dont les coordonnées à l'origine seront désignées par a_1, b_1 ; a_2, b_2 ; ... ; a_n, b_n. Soient en outre α_1, β_1 ; α_2, β_2 ; α_3, β_3 les coordonnées x, y des trois sommets, et A_1, A_2,..., A_m, B_1, B_2,..., B_m les points où les droites dont on vient de parler coupent respectivement l'axe OX et l'axe OY. Les droites $S_3 A_1$, $S_2 A_1$, $S_1 B_1$ auront pour équations

$$y = \frac{\beta_3}{\alpha_3 - a_1}(x - a_1),$$

$$y = \frac{\beta_2}{\alpha_2 - a_1}(x - a_1),$$

$$y - \beta_1 = \frac{\beta_1 - b_1}{\alpha_1}(x - \alpha_1).$$

Si entre les deux dernières on élimine le terme indépendant de x, y et que l'on tienne compte de ce que les points A_1, S_3, B_1 sont en ligne droite, ainsi que S_1, S_2, S_3, on trouve

$$y = \frac{\beta_2(\beta_1 - \beta_3)}{\alpha_1(\beta_2 - \beta_3)}x,$$

ce qui montre que les m points obtenus d'une manière analogue en cherchant l'intersection des couples de droites $S_2 A_2$, $S_1 B_2$; $S_2 A_3$, $S_1 B_3$, etc., sont sur une même droite OD représentée par l'équation précédente. Si l'on cherche l'intersection I de cette droite avec la ligne des sommets, on trouve

$$x - \alpha_3 = \frac{\alpha_1 \beta (\alpha_2 - \alpha_3)}{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2},$$

$$y - \beta_3 = \frac{\alpha_1 \beta (\beta_2 - \beta_3)}{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2};$$

d'où résulte

$$\overline{IS_3} = \frac{\alpha_1 \beta}{\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1} \cdot \overline{S_2 S_3}.$$

Maintenant il est facile de voir que si l'on fait tourner le plan des xy d'un angle quelconque autour de la ligne des sommets, les x des points situés sur cette ligne se trouvent multipliés par un même facteur et les y par un autre facteur commun. D'après cela, les m points en ligne droite de l'intersection de C_1 et C_2 qu'on trouverait comme tout à l'heure seraient sur une droite $O'D'$ qui rencontrerait la ligne des sommets exactement au point I où la ligne OD la rencontrait. (Ceci résulte de la remarque précédente et de ce que $\overline{IS_3}$ contient haut et bas les α et les β au même degré séparément dans son expression où $\overline{S_2 S_3}$ ne change pas.) Donc, quand le plan des xy tournera d'une manière continue autour de la ligne des sommets, chacun des m points situés sur OD décrira une branche de courbe qui ne sortira jamais du plan fixe ZOI. L'ensemble de ces branches constituera la section plane commune aux deux cônes C_1, C_2. L'intersection complète de ces surfaces s'obtiendrait en combinant chacune des droites, telles que $S_3 A_1$, avec chacune des autres $S_3 B_1$, $S_3 B_2$, $S_3 B_m$. Mais il est visible qu'à l'exception des droites où A et B ont le même indice, on n'obtiendrait pas généralement des points donnant lieu comme ci-dessus à des branches planes.

Ce procédé ne diffère pas de celui qu'on emploie dans la Géométrie descriptive pour trouver l'intersection de deux surfaces coniques *quelconques*, et il est clair que ce qu'on vient de dire peut leur être appliqué littéralement. On peut donc énoncer le théorème suivant, dont celui de Steiner doit être considéré comme un cas particulier :

Si trois surfaces coniques ont leurs sommets en ligne droite, et que l'une d'elles rencontre chacune des autres suivant une courbe plane, ces deux dernières admettent aussi une courbe plane commune.

Même question;

PAR M. VIANT.

C_1, C_2, C_3 sont trois cônes du même degré, ayant leurs trois sommets sur la même droite $A_1 A_2 A_3$; C_1 coupe C_2 suivant une courbe plane B_3; C_1 et C_3 se coupent suivant la courbe plane B_2; C_3 et C_2 se couperont aussi suivant une courbe plane B_1, et les trois plans passeront par la même droite.

Je supposerai la figure engendrée de la manière suivante. Je décris sur B_2 comme base les deux cônes C_1 et C_3. Je considère une section plane B_2 de C_1 comme directrice du cône C_3. Je dis que la courbe de rencontre des deux cônes C_2 et C_3 est plane, et que son plan passe par l'intersection des plans B_2 et B_3.

Supposons d'abord B_3 réduit à une ligne droite; B_2 et B_1 seront dès lors des droites; B_1, B_2, B_3 sont deux à deux dans le même plan, par suite se coupent en un même point O. Ceci suppose que ces trois lignes ne sont pas toutes les trois dans le même plan, auquel cas on pourrait considérer la figure, alors complétement plane, comme projection d'une figure dont les éléments ne seraient plus dans le même plan.

Si les cônes avaient pour bases des couples de droites, on obtiendrait deux points tels que O, et, en les joignant, on aurait une droite suivant laquelle se couperaient les trois figures planes considérées.

Cela posé, prenons le cas général. Traçons dans B_3 les droites M_3, N_3 et prenons le point P_3 sur la courbe; à ces éléments correspondront dans B_2 les droites M_2, N_2 et le point P_2; dans B_1 les éléments M_1, N_1, P_1. P_1, qui est un point de la courbe B_1, appartient au plan $(M_1 N_1)$; car si l'on mène par P_3 une droite qui coupe M_2 et N_2, la figure correspondante de B_1 sera une droite coupant M_1 et N_1. Donc tout point P_1 de la courbe B_1 appartient au plan $(M_1 N_1)$; et d'ailleurs on sait que les trois plans $(M_1 N_1)$, $(M_2 N_2)$, $(M_3 N_3)$ se coupent suivant la même droite.

On a vu que trois droites correspondantes se coupaient au même point : le même théorème devra avoir lieu pour les tangentes en trois points correspondants ; et ceci n'exige pas que les courbes de rencontre soient planes.

Si les courbes sont planes, ce point décrit l'arête commune des trois plans.

Question 613

(voir 2e série, t. I, p. 125) ;

PAR M. BAUQUENNE,
Candidat à l'École Normale.

On donne une conique et un point fixe F *dans son plan. Du point* F *on mène deux droites perpendiculaires entre elles qui coupent la conique en deux points. On joint ces points par la droite* Γ *et l'on mène en chacun d'eux les tangentes* Σ, Σ' *à la conique ; on projette le point* F *sur les trois côtés du triangle* $\Sigma\Gamma\Sigma'$, *par les trois points ainsi obtenus on fait passer une circonférence. Pour chacune des positions de l'angle droit, on obtient ainsi une circonférence. Démontrer que toutes ces circonférences sont tangentes à une même circonférence.* (MANNHEIM.)

Le lieu du sommet γ d'un angle droit $\sigma\gamma\sigma'$ circonscrit à une conique s est un cercle c.

Le cercle c et la conique s étant concentriques et la droite qui va du centre commun au point γ passant par le milieu de $\sigma\sigma'$, le cercle décrit sur $\sigma\sigma'$ comme diamètre passera par γ et sera tangent en ce point au cercle c.

Je transforme la figure par polaires réciproques par rapport à un point F.

La conique s devient une conique S, σ et σ' deviennent deux tangentes Σ et Σ' à S, et γ devient leur corde des contacts Γ. L'angle $\sigma\gamma\sigma'$ étant droit, les droites qui vont du point F aux points (Σ, Γ), (Σ', Γ) sont rectangulaires.

Le cercle c, lieu du point γ, devient une conique dont le foyer est F, enveloppe de Γ, dont le centre ω est déterminé.

Le cercle qui passe par les trois points σ, γ, σ' devient une conique ayant pour foyer F et tangente aux trois droites Σ, Γ, Σ', et comme ce cercle a même tangente en γ que le cercle c, les deux coniques transformées des deux cercles sont tangentes en un même point θ à la droite Γ.

Je projette F sur les trois tangentes à la transformée de $\sigma\gamma\sigma'$; soit p le point qu'on trouve ainsi sur Γ.

Le cercle qui passe par ces trois points a, d'après un théorème connu, pour centre le centre de la conique transformée du cercle variable, que j'appellerai ω'.

Le cercle analogue pour la transformée de c passe aussi par p et a pour centre ω.

Si donc les trois points p, ω, ω' sont en ligne droite, les cercles variables seront tous tangents à ce cercle fixe.

Soit φ le point symétrique de F par rapport à Γ, $\varphi\theta$ et Fω se croisent au second foyer f de la conique fixe transformée de c, $\varphi\theta$ et Fω' se croisent au second foyer f' de la conique variable transformée de $\sigma\gamma\sigma'$.

Les milieux p, ω, ω' des droites Fφ, Ff, Ff' sont donc sur une parallèle à $\varphi\theta$, c'est-à-dire en ligne droite, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — On sait que dans une transformation telle que la précédente, c'est la polaire du point F par rapport au cercle à transformer qui fournit le centre de la conique transformée de ce cercle.

Quand trois points sont en ligne droite, leurs polaires passent par un même point.

La polaire de ω est la polaire de F par rapport à c.

La polaire de ω' est la polaire de F par rapport à $\sigma\gamma\sigma'$.

La polaire de p est la perpendiculaire en γ à la droite $F\gamma$.

Donc, dans la figure primitive, ces trois droites passent par un même point.

Question 725

(voir 2e série, t. IV, p. 141),

PAR M. LEBASTEUR,
Élève ingénieur de la Marine.

Résoudre algébriquement l'équation

$$[(x^2+2)^2+x^2]^3 = 8x^4(x+2)^2.$$

(LEBASTEUR.)

Posons

$$(1)\qquad x+1=y,$$

alors on a

$$(2)\qquad (y^2+1)^3=(y-1)^4(y+1)^2,$$

qui s'écrit

$$(3)\qquad (y^2+1)^3=(y^2-1)^2(y-1)^2.$$

Je pose

$$y+\frac{1}{y}=z.$$

Divisée aux deux membres par y_1, l'équation (3) devient

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)^3=\left(y-\frac{1}{y}\right)^2\frac{(y-1)^2}{y}$$

$$=\left(y-\frac{1}{y}\right)^2\left(y+\frac{1}{y}-2\right)$$

$$=\left(y^2+\frac{1}{y^2}-2\right)^2\left(y+\frac{1}{y}-2\right).$$

Observant que

$$y^2+\frac{1}{y^2}=z^2-2,$$

on a

$$z^3=(z^2-2)(z-2)$$

ou

$$z^2+z-2=0,$$

d'où

$$z=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Or on a

$$y^2-zy+1=0,$$

$$y=\frac{z\pm\sqrt{z^2-4}}{2}$$

et

$$x=y-1;$$

on a donc

$$x=\frac{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\pm\sqrt{\frac{(-1\pm\sqrt{5})^2}{4}-4}}{2}-1.$$

Il faut ajouter à ceci la racine -1, que nous ne trouvons pas parce que nous avons divisé par y^3 qui, dans l'hypothèse $y=0$, donne $x=-1$.

Les racines, au nombre de cinq, sont donc

$$x_1 = -1,$$

$$x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}}{4}\sqrt{-1}-1,$$

$$x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}}{4}\sqrt{-1}-1,$$

$$x_4 = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}}{4}\sqrt{-1}-1,$$

$$x_5 = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}}{4}\sqrt{-1}-1.$$

On voit que la seule racine -1 est réelle, les quatre autres sont imaginaires; mais il est fort remarquable que cette équation du cinquième degré soit entièrement résoluble par des équations du deuxième.

Question 728

(voir 2e série, t. IV, p. 142);

PAR M. VENCESLAS NIEBYLOWSKI,
Élève de spéciales au lycée Bonaparte.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ *les racines de l'équation*

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0.$$

Si l'on a la relation

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} &(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2 + (\alpha-\gamma)^2(\beta-\delta)^2 \\ &\qquad + (\alpha-\delta)^2(\beta-\gamma)^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

démontrer que la racine ε *est une fonction rationnelle des coefficients de l'équation.* (MICHAEL ROBERTS.)

Outre la relation donnée, on a, entre les racines et les coefficients de l'équation, les relations suivantes :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = -p,$$

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \alpha\varepsilon + \beta\gamma + \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma\delta + \gamma\varepsilon + \delta\varepsilon = q,$$

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\varepsilon + \alpha\gamma\delta + \alpha\gamma\varepsilon&\\ + \alpha\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta + \beta\gamma\varepsilon + \beta\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon &= -r,\end{aligned}$$

$$\alpha\beta\gamma\delta + \alpha\beta\gamma\varepsilon + \alpha\beta\delta\varepsilon + \alpha\gamma\delta\varepsilon + \beta\gamma\delta\varepsilon = s,$$

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = -t.$$

Ces relations peuvent s'écrire

$$(1) \qquad \alpha + \beta + \gamma + \delta = -(p + \varepsilon),$$

$$(2) \qquad \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = q + \varepsilon(p + \varepsilon),$$

$$(3) \qquad \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\{r + \varepsilon[q + \varepsilon(p + \varepsilon)]\},$$

$$(4) \qquad \alpha\beta\gamma\delta = s + \varepsilon\{r + \varepsilon[q + \varepsilon(p + \varepsilon)]\},$$

$$(5) \qquad \alpha\beta\gamma\delta = -\frac{t}{\varepsilon}.$$

En développant l'équation de condition et divisant par 2, on a

$$\begin{aligned}&(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\delta^2 + \gamma^2\delta^2) + 6\alpha\beta\gamma\delta\\ &\quad - [\alpha^2(\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta) + \beta^2(\alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta)\\ &\qquad + \gamma^2(\alpha\beta + \alpha\delta + \beta\delta) + \delta^2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)] = 0,\end{aligned}$$

ou, pour simplifier l'écriture,

$$(6) \qquad \sum + 6\alpha\beta\gamma\delta - \sum\nolimits_1 = 0.$$

Si l'on élève (2) au carré, il vient

$$(7) \qquad [q + \varepsilon(p + \varepsilon)]^2 = \sum + 6\alpha\beta\gamma\delta + 2\sum\nolimits_1.$$

Donc, en vertu de l'équation (6),

$$(8) \qquad 3\sum\nolimits_1 = [q + \varepsilon(p + \varepsilon)]^2.$$

Mais si l'on multiplie (3) successivement par α, β, γ, δ et que l'on fasse la somme des deux membres, on obtient

$$\sum_1 + 4\alpha\beta\gamma\delta = (p + \varepsilon)\{r + \varepsilon[q + \varepsilon(p + \varepsilon)]\},$$

d'où

$$3\sum_1 = 3(p + \varepsilon)\{r + \varepsilon[q + \varepsilon(p + \varepsilon)]\} \\ - 12s - 12\varepsilon\{r + \varepsilon[q + \varepsilon(p + \varepsilon)]\},$$

$$(9)\quad 3\sum_1 = 3(p - 3\varepsilon)\{r + \varepsilon[q + \varepsilon(p + \varepsilon)]\} - 12s;$$

donc, en vertu de l'équation (8),

$$(10)\quad [q + \varepsilon(p + \varepsilon)]^2 = 3(p - 3\varepsilon)\{r + \varepsilon[q + \varepsilon(p + \varepsilon)]\} - 12s,$$

ou, en développant,

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} 10\varepsilon^4 + 8p\varepsilon^3 + (119 - 2p^2)\varepsilon^2 \\ \qquad + (qr - pq)\varepsilon + q^2 - 3pr + 12s = 0; \end{array} \right.$$

or (4) et (5) nous donnent

$$(12)\quad \varepsilon^5 - p\varepsilon^4 - q\varepsilon^3 + r\varepsilon^2 + s\varepsilon + t = 0,$$

ce qui d'ailleurs est évident, puisque ε est racine de l'équation donnée.

Ainsi, en éliminant α, β, γ, δ entre l'équation de condition et (1), (2), (3), (4), on arrive à une équation du quatrième degré; on a donc, grâce à la relation donnée, abaissé d'une unité le degré de l'équation en ε.

Les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6) n'étant pas toutes symétriques par rapport à α, β, γ, δ, ε, il est évident que, dans les équations (11) et (12), ε désigne seulement la cinquième racine, de sorte que *ces équations ayant en commun seulement* (d'après l'élimination de α, β, γ, δ) *la racine* ε, il doit exister entre leurs premiers membres un plus grand commun diviseur du premier degré; donc la racine ε est fonction rationnelle des coefficients de l'équation.

D'ailleurs, en exprimant que les premiers membres des équations (11) et (12) ont un plus grand commun diviseur du premier degré, on trouvera la condition qui doit exister entre les coefficients pour que la relation (I) ait lieu entre les quatre racines.

Note du Redacteur — Il résulte de la demonstration precedente que l'enonce de M. Michael Roberts doit être complete par l'addition suivante: « S'il n'existe qu'un seul groupe de quatre racines qui satisfasse a l'equation (I) ». Car ce n'est qu'à cette condition que les deux equations (11) et (12) ont un seul facteur commun du premier degre et par consequent rationnel par rapport aux coefficients. L'equation qui a pour racines les nombres 1, 2, 3, $2+\frac{1}{3}\sqrt{-3}$, $2-\frac{1}{3}\sqrt{-3}$ est propre a demontrer l'utilite de cette addition à l'enonce, car les trois premières racines satisfont a la relation (I) avec l'une ou l'autre des deux dernieres; ε a donc deux valeurs imaginaires dont aucune n'est une fonction rationnelle des coefficients, parce que ceux-ci sont rationnels

M. Merce Busco a resolu la question 728 a peu pres de la même manière P.