Nouvelles annales de mathématiques

A. Godart

Plans tangents communs à deux cônes de révolution ayant même sommet

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 15-16

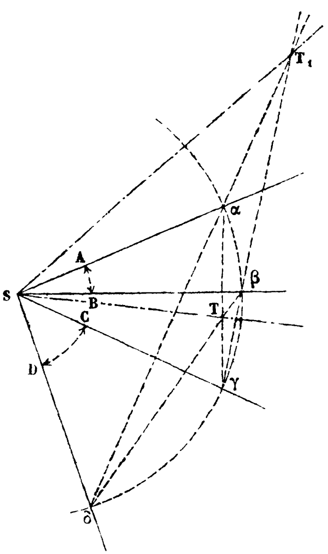
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__15_0>

PLANS TANGENTS COMMUNS A DEUX CONES DE RÉVOLUTION AYANT MÊME SOMMET;

PAR M. A. GODART.

On trouve dans Hachette une solution de ce problème, généralement reproduite dans les Traités de Géométrie descriptive. Nous en proposons une nouvelle qui conduit à un tracé plus simple.

Prenons pour plan horizontal le plan qui contient les



axes des deux cônes et qui coupe le premier suivant les génératrices SA, SB, et le second suivant les génératrices SC, SD.

Décrivons du point S comme centre une circonférence de rayon arbitraire $\alpha\beta\gamma\delta$.

Les deux lignes $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ se coupent en un point T qui appartient à la trace horizontale d'un couple de plans tangents communs. La ligne ST_1 qui passe par le point de rencontre des lignes $\gamma\beta$, $\delta\alpha$ est la trace horizontale du second couple de plans tangents communs.

Pour le démontrer, imaginons la sphère inscrite dans le cône ASB, qui touche la génératrice SA en α, et la génératrice SB en β.

Concevons de même la sphère inscrite dans le cône CSD qui touche la génératrice SC en γ et la génératrice SD en δ.

Un plan tangent commun aux deux cônes est également tangent à chacune de ces sphères, et contient par conséquent le sommet d'un cône qui serait circonscrit à la fois à ces deux sphères.

Mais ce sommet est un centre de similitude de ces deux sphères, ou bien le centre de similitude de leurs deux cercles d'intersection avec le plan horizontal.

Remarquons maintenant que la circonférence (S) est orthogonale aux deux cercles dont nous venons de parler. Et l'on sait que si l'on mène un cercle orthogonal à la fois à deux cercles, les lignes qui joignent les points d'intersection deux à deux passent par les centres de similitude (*). Donc le point T, centre de similitude interne des deux sphères considérées, appartient à un couple de plans tangents communs aux deux cônes. Le point T_1, centre de similitude externe, appartient aux deux autres plans tangents communs.

(*) PONCELET, *Applications d'Analyse et de Géométrie*, t. I