Nouvelles annales de mathématiques

MIRZA-NIZAM

Note sur les cônes du second ordre

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 5 (1866), p. 105-118

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1866_2_5__105_0>

NOTE SUR LES CONES DU SECOND ORDRE;

PAR M. MIRZA-NIZAM.

I.

RELATIONS QUI EXPRIMENT QUE LE CÔNE A SOIT TROIS PLANS TANGENTS, SOIT TROIS GÉNÉRATRICES RECTANGULAIRES.

L'équation générale des cônes du second degré dont le sommet est (x_1, y_1, z_1) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned}A(x-x_1)^2 &+ A'(y-y_1)^2 + A''(z-z_1)^2 + 2B(y-y_1)(z-z_1)\\ &+ 2B'(x-x_1)(z-z_1) + 2B''(x-x_1)(y-y_1) = 0.\end{aligned}$$

Les équations d'une génératrice sont de la forme

$$\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma},$$

α, β, γ étant les cosinus des angles que fait cette droite avec les trois axes supposés rectangulaires. Cette droite devant se trouver sur le cône, on doit avoir

$$(1)\qquad A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta = 0.$$

En exprimant que deux autres droites (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ se trouvent sur le cône, on obtient deux autres relations qui ne diffèrent de la précédente que parce que α, β, γ sont successivement remplacés par α', β', γ' et $\alpha'', \beta'', \gamma''$. Ajoutant ensuite ces trois relations, en ayant égard aux six relations

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0,\\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, & \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0,\\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0,\end{array}\right.$$

qui expriment que les axes sont rectangulaires, ainsi que les trois génératrices, on obtient pour cette somme

$$(\alpha) \qquad A + A' + A'' = 0.$$

Telle est la relation cherchée.

Remarque. — La relation (α) montre que si le cône a un système de trois génératrices rectangulaires, il en a une infinité; car pour un pareil système, il faudra résoudre par rapport à (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ les équations (2) et les trois relations analogues à (1). Or l'une de ces relations peut être remplacée par la relation (α) qui ne contient pas les variables. On a donc huit équations à neuf inconnues; donc il y a une infinité de systèmes de trois génératrices rectangulaires.

La même remarque s'appliquerait aux trois autres cas que nous avons à traiter.

Cherchons maintenant la relation qui exprime que le cône a trois plans tangents rectangulaires. Pour cela, supposons d'abord la surface rapportée à trois axes parallèles à ses axes principaux, son équation sera

$$A(x - x_1)^2 + A'(y - y_1)^2 + A''(z - z_1)^2 = 0.$$

Son plan tangent aura une équation de la forme

$$(3) \qquad \alpha(x - x') + \beta(y - y') + \gamma(z - z') = 0,$$

α, β, γ étant les cosinus des angles de l'axe de ce plan avec les trois axes de coordonnées et x', y', z' les coordonnées du point de contact. Ces dernières vérifient par conséquent l'équation de condition

$$(4) \qquad A(x' - x_1)^2 + A'(y' - y_1)^2 + A''(z' - z_1)^2 = 0.$$

Or l'équation du plan tangent au point x', y', z' est

$$A(x - x_1)(x' - x_1) + A'(y - y_1)(y' - y_1) + A''(z - z_1)(z' - z_1) = 0;$$

on doit donc avoir

$$\frac{x' - x_1}{\left(\frac{\alpha}{A}\right)} = \frac{y' - y_1}{\left(\frac{\beta}{A'}\right)} = \frac{z' - z_1}{\left(\frac{\gamma}{A''}\right)}.$$

L'équation de condition (4) devient donc

$$\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{A'} + \frac{\gamma^2}{A''} = 0.$$

Telle est la relation qui exprime que le plan (3) est tangent au cône. Prenant maintenant deux autres plans $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ et exprimant qu'ils sont tangents au cône, on obtiendra deux autres relations analogues; ajoutant ces trois relations en ayant égard à ce que les trois plans sont rectangulaires, on obtient

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{A'} + \frac{1}{A''} = 0$$

ou bien

$$AA' + AA'' + A'A'' = 0.$$

On voit donc que si le cône est rapporté à trois axes parallèles à ses axes principaux, la relation cherchée exprime que la somme des produits deux à deux des coefficients de x^2, y^2, z^2 est nulle.

Or, dans le cas où les axes sont quelconques, par un changement d'axes, on ramènera l'équation à la même forme; seulement les coefficients de x^2, y^2, z^2 seront les trois racines de l'équation en S

$$\begin{aligned}(A - S)(A' - S)(A'' - S) - (A - S)B^2 - (A' - S)B'^2 \\ - (A'' - S)B''^2 + 2BB'B'' = 0,\end{aligned}$$

et la somme des produits deux à deux des trois racines de cette équation égalée à zéro donnera la relation cherchée dans ce cas. La somme des produits deux à deux des racines de cette équation étant

$$AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2,$$

la relation cherchée est

$$(\beta) \qquad (AA' - B''^2) + (AA'' - B'^2) + (A'A'' - B^2) = 0.$$

II.

RELATIONS QUI EXPRIMENT QUE LE CÔNE A TROIS GÉNÉRATRICES, OU TROIS PLANS TANGENTS PARALLÈLES A TROIS DIAMÈTRES CONJUGUÉS, OU TROIS PLANS DIAMÉTRAUX CONJUGUÉS D'UN ELLIPSOÏDE.

Prenons les trois axes de l'ellipsoïde pour axes de coordonnées : l'équation de cette surface sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

l'équation du cône sera

$$\begin{aligned} A(x-x_1)^2 + A'(y-y_1)^2 + A''(z-z_1)^2 + 2B(y-y_1)(z-z_1) \\ + 2B'(x-x_1)(z-z_1) + 2B''(x-x_1)(y-y_1) = 0. \end{aligned}$$

Transformons ces deux surfaces homographiquement en prenant pour formules de transformations

$$x' = \frac{x}{a}, \quad y' = \frac{y}{b}, \quad z' = \frac{z}{c},$$

l'ellipsoïde se change dans la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1,$$

et le cône proposé dans le cône

$$\begin{aligned} Aa^2\left(x' - \frac{x_1}{a}\right)^2 + A'b^2\left(y' - \frac{y_1}{b}\right) + A''c^2\left(z' - \frac{z_1}{c}\right) \\ + 2Bbc\left(y' - \frac{y_1}{b}\right)\left(z' - \frac{z_1}{c}\right) + 2B'ac\left(x' - \frac{x_1}{a}\right)\left(z' - \frac{z_1}{c}\right) \\ + 2B''ab\left(x' - \frac{x_1}{a}\right)\left(y' - \frac{y_1}{b}\right) = 0. \end{aligned}$$

Alors, exprimer que le premier cône a trois génératrices parallèles à trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde, c'est exprimer que le second cône a trois génératrices rectangulaires.

La condition pour que le cône ait trois génératrices parallèles à trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde est donc, d'après l'équation (α),

$$(\gamma) \qquad \mathrm{A}a^2 + \mathrm{A}'b^2 + \mathrm{A}''c^2 = 0,$$

a, b, c étant les demi-axes de l'ellipsoïde. De même, d'après la relation (β), la formule

$$(\mathrm{AA}' - \mathrm{B}''^2)\,a^2b^2 + (\mathrm{AA}'' - \mathrm{B}'^2)\,a^2c^2 + (\mathrm{A}'\mathrm{A}'' - \mathrm{B}^2)\,b^2c^2 = 0$$

ou bien

$$(\delta) \qquad \frac{\mathrm{AA}' - \mathrm{B}''^2}{c^2} + \frac{\mathrm{AA}'' - \mathrm{B}'^2}{b^2} + \frac{\mathrm{A}'\mathrm{A}'' - \mathrm{B}^2}{a^2} = 0$$

exprime que le cône donné a trois plans tangents parallèles à trois plans diamétraux conjugués de l'ellipsoïde (a, b, c).

Remarque. — Les relations (γ) et (δ) supposent que les axes des coordonnées sont les axes de l'ellipsoïde.

III.

APPLICATIONS.

Applications de la relation (α).

Première application. — Résolvons le problème connu :

Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes sont tangentes à une surface à centre donnée.

Prenons trois axes rectangulaires passant par le centre de la surface dont l'équation est

$$f(x, y, z) = A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2B_1 yz + 2B'_1 xz + 2B''_1 xy + F = 0.$$

Soit (x_1, y_1, z_1) un point du lieu. Le cône ayant pour sommet ce point et circonscrit à la surface contiendra les trois arêtes du trièdre trirectangle; donc les coefficients de l'équation de ce cône vérifieront la relation (α). La relation est donc l'équation du lieu, puisqu'elle a lieu entre x_1, y_1, z_1 et les quantités connues.

L'équation de ce cône est

$$(c)\; f(x_1, y_1, z_1) . f(x, y, z) - \frac{1}{4}(xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} + tf'_{t_1})^2 = 0,$$

dans laquelle $f(x, y, z, t)$ est le premier membre de l'équation de la surface donnée, rendu homogène en remplaçant x, y, z par $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ et multipliant par t^2.

On obtient l'équation (c) en cherchant l'équation générale des surfaces doublement tangentes à la surface $f(x, y, z) = 0$ suivant le plan polaire du point (x_1, y_1, z_1), et exprimant que cette surface passe par le point (x_1, y_1, z_1).

Les coefficients de l'équation (c) sont, en désignant par A, A', A'', B, B', B'' les coefficients de x^2, y^2, z^2, $2yz$, $2xz$, $2xy$,

$$A = A_1 f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} f'^2_{x_1},$$

$$A' = A'_1 f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} f'^2_{y_1},$$

$$A'' = A''_1 f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} f'^2_{z_1},$$

$$B = B_1 f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} f'_{y_1} f'_{z_1},$$

$$B' = B'_1 f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} f'_{x_1} f'_{z_1},$$

$$B'' = B''_1 f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4} f'_{x_1} f'_{y_1}.$$

La relation (α) est donc, dans ce cas,

$$(A_1 + A'_1 + A''_1) f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{4}\left(f'^2_{x_1} + f'^2_{y_1} + f'^2_{z_1}\right) = 0.$$

Telle est l'équation du lieu. C'est une surface du second degré. Ordonnant par rapport aux variables et enlevant les accents, on a

$$\begin{aligned} x^2&[(A_1 A'_1 - B''^2_1) + (A_1 A''_1 - B'^2_1)] \\ &+ y^2[(A_1 A'_1 - B''^2_1) + (A'_1 A''_1 - B^2_1)] \\ &+ z^2[(A_1 A''_1 - B'^2_1) + (A'_1 A''_1 - B^2_1)] \\ &+ 2(B_1 A_1 - B'_1 B''_1) yz + 2(A_1 B'_1 - B_1 B''_1) xz \\ &+ 2(A''_1 B''_1 - B_1 B'_1) xy + F(A_1 + A'_1 + A''_1) = 0. \end{aligned}$$

C'est une surface concentrique à la surface donnée et qui a les mêmes axes, car si on avait pris pour axes de coordonnées les axes de la surface donnée, on aurait $B_1 = B'_1 = B''_1 = 0$, et l'équation du lieu se réduirait à

$$\begin{aligned} A_1(A'_1 + A''_1) x^2 + A'_1(A_1 + A''_1) y^2 + A''_1(A_1 + A'_1) z^2 \\ + F(A_1 + A'_1 + A''_1) = 0 \end{aligned}$$

qui est l'équation d'une surface rapportée à ses axes.

Nous n'avons pas pris tout d'abord ce système de coordonnées, parce que nous aurons besoin de l'équation (c) dans ce qui va suivre.

Deuxième application. — Cherchons comme seconde application de l'équation (α) le problème suivant :

Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les arêtes passent par une conique.

Soient

$$E = A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 - 1 = 0,$$
$$P = \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

les équations de la conique, α, β et γ ayant la même signification que précédemment.

Soit (x_1, y_1, z_1) un point du lieu; le cône ayant ce point pour sommet et passant par la conique contiendra les trois génératrices du trièdre trirectangle qui a son sommet au même point : les coefficients de l'équation du cône vérifieront donc la relation (α); cette relation est donc l'équation du lieu.

Or, l'équation du cône ayant son sommet en (x_1, y_1, z_1) et passant par la conique, est

$$(c')\left\{\begin{aligned} &(x - x_1)^2[A_1 P_1 (P_1 - 2\alpha x_1) + E_1 \alpha^2] \\ &\quad + (y - y_1)^2 [A'_1 P_1 (P_1 - 2\beta y_1) + E_1 \beta^2] \\ &\quad + (z - z_1)^2 [A''_1 P_1 (P_1 - 2\gamma z_1) + E_1 \gamma^2] \\ &\quad - 2(y - y_1)(z - z_1)[P_1 (A''_1 \beta z_1 + A'_1 \gamma y_1) - E_1 \beta\gamma] \\ &\quad - 2(x - x_1)(z - z_1)[P_1 (A''_1 \alpha z_1 + A_1 \gamma x_1) - E_1 \alpha\gamma] \\ &\quad - 2(x - x_1)(y - y_1)[P_1 (A'_1 \alpha y_1 + A_1 \beta x_1) - E_1 \alpha\beta] = 0, \end{aligned}\right.$$

E_1 et P_1 étant ce que deviennent E et P lorsqu'on remplace x, y, z par x_1, y_1, z_1.

L'équation du lieu est donc, d'après la relation (α), en ayant égard à la condition $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$,

$$P_1[A_1(P_1 - 2\alpha x_1) + A'_1 (P_1 - 2\beta y_1) + A''_1(P_1 - 2\gamma z_1)] + E_1 = 0$$

qui est une surface du second degré passant par la conique donnée.

Si l'on avait pris le plan de la conique pour plan des xy, ses axes pour l'axe des x et celui des y, l'équation du lieu s'obtiendrait en faisant dans l'équation précédente $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = 1$ et $A''_1 = 0$; le lieu sera, en remplaçant

P_1 par z et E_1 par $A_1 x^2 + A'_1 y^2 - 1$,

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + (A_1 + A'_1) z^2 - 1 = 0.$$

Si nous n'avons pas pris tout d'abord ce système d'axes, c'est parce que nous aurons besoin de l'équation de ce cône sous la forme (c').

Remarque. — Nous avons fait remarquer que si le cône contenait un système de trois génératrices rectangulaires, il en contenait une infinité. Donc chacun des points des lieux cherchés est le sommet d'une infinité de trièdres trirectangles répondant à la question.

Cette remarque s'appliquera également aux autres problèmes que nous allons traiter.

Applications de l'équation (β).

PREMIÈRE APPLICATION. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces sont tangentes à une surface à centre.* (Théorème de Monge.)

Considérons le cône ayant son sommet en un point quelconque du lieu et circonscrit à la surface. Ce cône a trois plans tangents rectangulaires; ses coefficients vérifient donc la relation (β); cette relation exprime donc l'équation du lieu. Dans la première application de l'équation (α), on a obtenu les coefficients de ce cône; alors calculant les trois termes de (β), on a

$$\begin{aligned}
AA' - B''^2 &= [kz_1^2 + F(A_1 A'_1 - B''^2_1)].f(x_1, y_1, z_1),\\
AA'' - B'^2 &= [ky_1^2 + F(A_1 A''_1 - B'^2_1)].f(x_1, y_1, z_1),\\
A'A'' - B^2 &= [kx_1^2 + F(A'_1 A''_1 - B_1^2)].f(x_1, y_1, z_1),
\end{aligned}$$

en posant

$$k = A_1 A'_1 A''_1 + 2B_1 B'_1 B''_1 - A_1 B_1^2 - A'_1 B'^2_1 - A''_1 B''^2_1.$$

L'équation du lieu est donc, en enlevant les accents,

$$x^2+y^2+z^2=-\frac{F}{k}[A_1A'_1-B''^2_1+A_1A''_1-B'^2_1+A'_1A''_1-B^2_1].$$

C'est donc une sphère concentrique à la surface donnée. On voit que cette sphère a pour rayon la diagonale du parallélipipède construit sur les demi-axes de la surface, car la surface rapportée à ses axes aurait pour équation

$$Sx^2+S'y^2+S''z^2+F=0,$$

et la somme des carrés des demi-axes est

$$a^2+b^2+c^2=-F\left(\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}+\frac{1}{S''}\right)$$

(S, S', S'' étant les racines de l'équation en S). Or, on a, d'après cette équation en S,

$$\frac{1}{S}+\frac{1}{S'}+\frac{1}{S''}=\frac{A_1A'_1-B''^2_1+A_1A''_1-B'^2+A'_1A''_1-B^2_1}{k};$$

donc

$$a^2+b^2+c^2=-\frac{F}{k}(A_1A'_1-B''^2_1+A_1A''_1-B'^2_1+A'_1A''_1-B^2_1),$$

ce qui prouve ce qu'on a avancé.

Deuxième application. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les faces roulent sur une conique.*

On voit de même que pour avoir l'équation du lieu, il faudra appliquer la relation (β) aux coefficients de l'équation (c'). Des coefficients de cette équation on tire, en représentant par A, A', A'', B, B', B'' ces coefficients,

$$AA'-B''^2=P^2_1[(A'_1A''_1\alpha^2+A_1A''_1\beta^2+A_1A'_1\gamma^2)z^2_1 \\ -(A_1\beta^2+A'_1\alpha^2)],$$

$$AA'' - B'^2 = P_1^2[(A'_1 A''_1 \alpha^2 + A_1 A''_1 \beta^2 + A_1 A'_1 \gamma^2) y_1^2 \\ - (A_1 \gamma^2 + A''_1 \alpha^2)],$$

$$A'A'' - B^2 = P_1^2[(A'_1 A''_1 \alpha^2 + A_1 A''_1 \beta^2 + A_1 A'_1 \gamma^2) x_1^2 \\ - (A'_1 \gamma^2 + A''_1 \beta^2)].$$

L'équation du lieu cherché est donc

$$(A'_1 A''_1 \alpha^2 + A_1 A''_1 \beta^2 + A_1 A'_1 \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ = \alpha^2 (A'_1 + A''_1) + \beta^2 (A_1 + A''_1) + \gamma^2 (A_1 + A'_1),$$

une sphère concentrique à la conique, dont le rayon est la diagonale du rectangle construit sur les deux demi-axes de cette conique; car on sait que les axes de la section de la surface

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 - 1 = 0$$

par le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

sont donnés par l'équation en r^2

$$r^4 (A'_1 A''_1 \alpha^2 + A_1 A''_1 \beta^2 + A_1 A'_1 \gamma^2) \\ - r^2 [\alpha^2 (A'_1 + A''_1) + \beta^2 (A_1 + A''_1) + \gamma^2 (A_1 + A'_1)] + 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$r'^2 + r''^2 = \frac{\alpha^2 (A'_1 + A''_1) + \beta^2 (A_1 + A''_1) + \gamma^2 (A_1 + A'_1)}{A'_1 A''_1 \alpha^2 + A_1 A''_1 \beta^2 + A_1 A'_1 \gamma^2},$$

ce qui démontre ce qu'on a avancé.

Application de la relation (γ).

Première application. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres dont les arêtes sont tangentes à une surface à centre et parallèles à trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde.*

Prenons les trois axes de l'ellipsoïde pour axes de coordonnées. L'équation de la première surface sera

$$f(x, y, z) = A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2B_1 yz + 2B'_1 xz + 2B''_1 xy + F = 0,$$

et l'équation de l'ellipsoïde sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Le cône ayant pour sommet un point du lieu et circonscrit à la première surface, contenant trois génératrices parallèles à trois diamètres conjugués de l'ellipsoïde, les coefficients de son équation doivent vérifier la relation (γ). Or, on a trouvé déjà les coefficients de ce cône (c) dans la première application de la relation (α); donc, remplaçant dans la relation (δ) ces coefficients par leurs valeurs, on a pour l'équation du lieu

$$\begin{aligned} & x^2[(A_1 A'_1 - B''_1) b^2 + (A_1 A''_1 - B'^2_1) c^2] \\ & + y^2[(A_1 A'_1 - B''^2_1) a^2 + (A'_1 A''_1 - B^2_1) c^2] \\ & + z^2[(A_1 A''_1 - B'^2_1) a^2 + (A'_1 A''_1 - B^2_1) b^2] \\ & + 2 (B_1 A_1 - B'_1 B''_1) a^2 yz + 2 (A'_1 B'_1 - B_1 B''_1) b^2 xz \\ & + 2 (A''_1 B''_1 - B_1 B'_1) c^2 xy + F (A_1 a^2 + A'_1 b^2 + A''_1 c^2) = 0 \end{aligned}$$

qui est une surface du second degré concentrique à la surface donnée.

Deuxième application. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres dont les arêtes passent par une conique à centre donnée et sont parallèles à trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde.*

On peut transporter l'ellipsoïde parallèlement à lui-même, jusqu'à ce que son centre coïncide avec celui de la conique. Prenant alors pour axes de coordonnées les trois axes de l'ellipsoïde, son équation sera

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La conique peut être considérée comme l'intersection d'un plan passant par le centre et d'une surface à centre du second degré, ayant les mêmes axes que l'ellipsoïde. Par conséquent, pour avoir l'équation du lieu, il faudra écrire la relation (δ) entre les coefficients du cône (c') qui a son sommet au point (x_1, y_1, z_1) du lieu et passant par la conique. L'équation du lieu est donc

$$\begin{aligned}P_1[A_1(P_1 - 2\alpha x_1)a^2 + A'_1(P_1 - 2\beta x_1)b^2 + A''_1(P_1 - 2\gamma x_1)] \\ + E_1(a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2) = 0,\end{aligned}$$

qui représente une surface du second degré passant par la conique donnée et par l'intersection de l'ellipsoïde avec le plan représenté par le second facteur du premier terme égalé à zéro.

Applications de la relation (δ).

PREMIÈRE APPLICATION. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à une surface à centre donnée et dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'un ellipsoïde.* (Généralisation du théorème de Monge et concours général de 1860.)

En prenant pour axes de coordonnées les trois axes de l'ellipsoïde, on voit que pour avoir l'équation du lieu il faudra exprimer la relation (δ) entre les coefficients du cône (c). L'équation du lieu est donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{F}{k}\left(\frac{A_1A'_1 - B''^2}{c^2} + \frac{A_1A''_1 - B'^2}{b^2} + \frac{A'_1A''_1 - B^2}{a^2}\right) = 0,$$

qui représente un ellipsoïde concentrique à la surface donnée et homothétique à l'ellipsoïde donné.

DEUXIÈME APPLICATION. — *Trouver le lieu des sommets des trièdres dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'un ellipsoïde et qui roulent sur une conique à centre donnée.*

En prenant encore les axes de l'ellipsoïde donné pour axes de coordonnées, l'équation du lieu n'est autre chose que la relation (δ) entre les coefficients du cône (c'). L'équation du lieu est donc

$$(A'_1 A''_1 \alpha^2 + A_1 A''_1 \beta^2 + A_1 A'_1 \gamma^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)$$
$$= \frac{A'_1 \gamma^2 + A''_1 \beta^2}{a^2} + \frac{A_1 \gamma^2 + A''_1 \alpha^2}{b^2} + \frac{A_1 \beta^2 + A'_1 \alpha^2}{c^2},$$

qui est un ellipsoïde concentrique à la conique donnée et homothétique à l'ellipsoïde donné.

Il résulte de là que toutes les questions sur les trièdres se résolvent par une marche analogue de calcul.