Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 514-521

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__514_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 309

(voir tome XIV, page 263);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon (institution Sainte-Barbe).

r, p, n étant trois nombres entiers positifs, p et n deux nombres premiers entre eux, $\dfrac{(r-1)(r^{pn}-1)}{(r^p-1)(r^n-1)}$ est un nombre entier.

1. Soit x une variable et y une fonction de cette variable déterminée par la relation

$$(1) \qquad y = \frac{(x-1)(x^{pn}-1)}{(x^p-1)(x^n-1)},$$

il faut démontrer que y est une fonction entière de x.

2. La fonction entière $x^{pn}-1$ est exactement divisible par chacune des suivantes x^p-1, x^n-1; car on peut la mettre sous l'une ou l'autre de ces formes,

$$(x^n)^p-1, \quad (x^p)^n-1.$$

On en conclut que la fonction entière $\dfrac{x^{pn}-1}{x-1}$ est exactement divisible par chacune des fonctions entières $\dfrac{x^p-1}{x-1}$, $\dfrac{x^n-1}{x-1}$ qui sont premières entre elles, d'après l'hypothèse faite sur p et n; donc $\dfrac{x^{pn}-1}{x-1}$ est exactement divisible par le produit $\frac{(x^p - 1)}{x - 1} \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}$. Or on a

$$y = \frac{\left(\frac{x^{pn} - 1}{x - 1}\right)}{\left(\frac{x^p - 1}{x - 1}\right)\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right)};$$

y est une fonction entière, d'où résulte que si x est un nombre entier r, y sera entier. C. Q. F. D.

Question 426

(voir tome XVII, page 33);

PAR MM. DESQ ET GRASSAT,
Elèves du lycée de Lyon.

Dans la solution de cette question, donnée t. I[er], 2[e] série, p. 111, on a traité un problème différent de celui qui était proposé. Voici l'énoncé du problème :

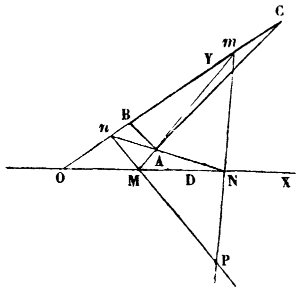
On donne dans le même plan un triangle ABC *et une droite* D; *on prend sur cette droite des longueurs* MN *telles, que chacune soit vue du point* A *sous un angle droit; les droites* AM, AN *coupent* BC *en deux points* m *et* n : *le lieu de l'intersection des droites* Mn, Nm [*est une droite et le lieu des points d'intersection des droites* BM, CN *ou* BN, CM] *est une conique* (*).

(FAURE.)

Au lieu de supposer l'angle MAN droit, supposons-le *quelconque*, nous ne ferons que généraliser. Cherchons le lieu du point de rencontre P de Mn et Nm. Les droites mM, nN passant toutes par le point A, on n'a pas à chercher le lieu de leur point de rencontre.

(*) Les mots placés entre crochets manquaient dans l'énoncé de la question 426. P.

Prenons BC pour axe des y et pour axe des x la droite



donnée D, qui rencontre au point O la droite BC. Nommons α, β les coordonnées du sommet A et k la tangente de l'angle fixe $\widehat{MAN}$.

Soient

$$Om = b, \quad On = b', \quad OM = a, \quad ON = a'.$$

On a, pour Mm,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

pour Nn,

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1.$$

On a les conditions

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 1,$$

$$(2) \qquad \frac{\alpha}{a'} + \frac{\beta}{b'} = 1.$$

Les droites Mn et Nm ont pour équation

$$(3) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b'} = 1$$

et

$$(4) \qquad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1.$$

On a de plus

$$(5) \quad \left(\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a}\right) \sin\theta = k\left[1 + \frac{bb'}{aa'} - \left(\frac{b}{a} + \frac{b'}{a'}\right)\cos\theta\right].$$

Il faut éliminer a, b, a', b' entre ces cinq équations.

Multiplions l'équation (1) par x, l'équation (3) par α, et retranchons; on a

$$\frac{\beta x}{b} - \frac{\alpha y}{b'} = x - \alpha;$$

opérant de même sur les équations (2) et (4), on a

$$\frac{\beta x}{b'} - \frac{\alpha y}{b} = x - \alpha.$$

De ces deux équations on tire

$$(\beta x + \alpha y)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right) = 0$$

équation qui se décompose en

$$b = b' \quad \text{ou} \quad \beta x + \alpha y = 0.$$

Or $b = b'$ est impossible. Car si l'on venait à faire dans l'équation (5) l'hypothèse

$$b = b', \quad \text{d'où} \quad a = a',$$

on aurait $k = 0$, ce qui n'offre aucun sens.

Le lieu est donc la droite $\beta x + \alpha y = 0$, polaire du point A par rapport au système des deux droites BC, OD, résultat que la Géométrie donnait immédiatement.

Si maintenant au lieu de joindre les points Nm, Mn, on joint BM, CN ou BN, CM, comme il a été fait dans la solution de cette même question (t. I[er], 2[e] série, p. 111), le lieu du point d'intersection de ces droites est une conique. En effet, les côtés de l'angle A déterminent sur D deux systèmes homographiques; les lignes BM, BM, et

CN, CN_1, etc., forment deux faisceaux homographiques, le lieu des points d'intersection de deux rayons homologues est une conique passant par les points B et C (*).

Question 698

(voir 2e série, t. III, p. 141);

PAR M. MAX CORNU,
Elève de spéciales à Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

Lorsqu'une courbe a quatre foyers sur un cercle, elle en a nécessairement douze autres situés par quatre sur trois cercles; tous ces cercles sont orthogonaux.

(LAGUERRE.)

Remarque I. — Lorsqu'un cercle (O) est orthogonal à un cercle (O'), ce cercle (O) passe par deux points ω_1, ω_2 qui, considérés comme des cercles de rayon nul, se coupent sur O'; ce sont les cercles limites du système des cercles tels que (O'), orthogonaux au cercle (O).

La réciproque est évidente: si le cercle (O) passe par deux points ω_1, ω_2, qui considérés comme des cercles de rayon nul se coupent sur (O'), le cercle (O) et le cercle O' sont orthogonaux entre eux.

De même le cercle (O'), orthogonal au cercle (O), passe par deux points ω'_1, ω'_2 qui, considérés comme des cercles de rayon nul, se coupent sur (O).

Remarque II. — On sait que tous les cercles passent par deux points de la droite de l'infini; et réciproquement que toutes les coniques qui passent par ces deux points sont des cercles. Un cercle de rayon nul, qui a son

(*) L'auteur de cette solution ne s'est pas trompé: il a corrigé l'énoncé évidemment fautif du tome XVII; il a eu le tort seulement de ne pas en avertir et de ne pas mettre en tête l'énoncé corrigé comme on l'a vu plus haut. P.

centre en un point ω, peut être considéré comme un système de deux droites joignant le point ω_1 aux deux points circulaires de l'infini; donc, pour que (O) et (O') soient orthogonaux, il suffit qu'en joignant deux points de (O), par exemple ω_1 et ω_2, aux deux points circulaires de l'infini, ces systèmes de deux droites se coupent en deux points à distance finie situés sur (O'); et de même, en joignant deux points particuliers ω'_1, ω'_2 aux deux points circulaires de l'infini, ces deux droites se couperont sur (O).

Un foyer d'une courbe est le point d'intersection de deux tangentes menées à la courbe par les points circulaires de l'infini (*). Je considère une courbe ayant quatre foyers sur un cercle; je joins les quatre foyers aux points circulaires de l'infini; j'obtiens huit droites distinctes, car si deux droites se confondaient en une seule, le cercle serait coupé en trois points par cette droite, ce qui est impossible.

Nous voyons donc en passant que la courbe qui a quatre foyers sur un cercle est au moins de quatrième classe. Ces huit droites tangentes à la courbe se coupent en seize points. Donc une courbe qui a quatre foyers sur un cercle en a douze autres; d'ailleurs, parmi ces seize foyers, il n'y en a que quatre de réels.

Si l'on a une conique et que l'on joigne quatre points de cette conique à deux autres points I et J situés sur la courbe, on a deux faisceaux homographiques; ces deux faisceaux de quatre droites se coupent en seize points situés quatre par quatre sur quatre coniques passant par I et J de façon que deux coniques ne passent pas par le même point. Et si l'on considère deux de ces coniques (O)

(*) M. Laguerre (*Comptes rendus*, t. LX, p. 71) distingue deux sortes de foyers : les foyers *ordinaires* et les foyers *singuliers*.

et (O′), ainsi que les quatre points sur chacune d'elles, il y a sur la première deux points ω_1 et ω_2 tels, qu'en les joignant aux points I et J ces droites se coupent sur (O′); et il y a sur l'autre (O′) deux points ω'_1 et ω'_2 tels, qu'en les joignant aux points I et J ces droites se coupent en (O).

Imaginons maintenant que I et J soient les points circulaires de l'infini et que les droites des deux faisceaux soient des tangentes à la courbe menées par les points I et J, les seize points d'intersection des deux faisceaux sont seize foyers de la courbe; les quatre coniques sur lesquelles ils se trouvent quatre par quatre deviennent des cercles orthogonaux deux à deux. C. Q. F. D.

Remarque. — Si quatre foyers sont en ligne droite (ovales de Descartes), les douze autres sont sur trois cercles orthogonaux ayant leur centre sur la droite considérée.

Parmi les courbes qui jouissent de cette propriété, on peut citer les sections du tore. En effet, on peut considérer le tore comme la surface enveloppe d'une sphère de rayon fixe, dont le centre décrit un cercle. Étant donné un plan P, pour avoir les foyers de la section, on peut chercher les positions de la sphère mobile pour lesquelles elle est tangente au plan P; les points de contact sont des foyers. On obtient les positions du centre de la sphère en cherchant les points d'intersection du cercle directeur avec les deux plans parallèles au plan P, et dont la distance à ce plan est égale au rayon de la sphère mobile. Ces points sont au nombre de quatre. Ils sont sur un cercle dont le centre est en k, au point d'intersection de l'axe du tore et du plan P; car la distance du point k à chacun des foyers est égale à la longueur de toutes les tangentes qu'on peut mener de k à la sphère mobile dans toutes ses positions; c'est une longueur fixe.

Remarque. — La corde de contact d'un foyer et de la courbe ou bien la directrice correspondant à une position m du centre de la sphère est la trace sur le plan P du plan passant par l'axe et la normale en m au cercle directeur. On en conclut la propriété suivante :

Les directrices correspondant à ces quatre foyers situés sur un cercle concourent au centre de ce cercle.

Le théorème précédent sur les sections du tore est un cas particulier d'un théorème dû à M. Moutard et énoncé par M. Laguerre (*loc. cit.*) sur les *anallagmatiques* (*) du quatrième ordre :

« Ces courbes peuvent de quatre manières différentes être considérées comme l'enveloppe de cercles coupant un cercle directeur fixe et ayant leurs centres sur une conique. Une anallagmatique a deux foyers singuliers réels communs aux quatre coniques qui peuvent servir à la description de la courbe, et seize foyers ordinaires, dont quatre réels, situés respectivement quatre par quatre sur les cercles directeurs correspondant aux quatre coniques mentionnées. »

Il est très-facile de démontrer que les directrices qui correspondent à chacun des foyers situés sur un même cercle concourent au centre de ce cercle.

Il est bien évident que toute section du tore est une anallagmatique; car tout plan mené par le pôle d'une surface anallagmatique est une courbe anallagmatique; et, dans le tore, tout point de l'axe est évidemment un pôle, et le point k est le pôle de la section.

(*) *Voir*, pour l'explication de ce mot, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. III, p. 306, *Note sur la transformation par rayons vecteurs réciproques.*