Nouvelles annales de mathématiques

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 334-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__334_1>

CORRESPONDANCE.

M. Transon a donné à la page 458 de notre précédent volume le théorème suivant :

Soit $f(x, y) = 0$ *l'équation d'une courbe du second degré. Si d'un point* M, *dont les coordonnées sont* (α, β), *on abaisse une perpendiculaire* MP *sur la polaire de ce point et qu'on la prolonge jusqu'en* A, *où elle rencontre l'un des axes de la courbe, on trouve que* $f(\alpha, \beta)$ *est proportionnel au produit* MP.MA.

Nous avons reçu, au sujet de ce théorème et d'une conséquence que M. Mannheim en a déduite, plusieurs communications que nous allons résumer.

1. M. Cornu, élève de Sainte-Barbe, démontre le théorème d'abord pour les courbes à centre rapportées à leur centre et à leur axe; et ensuite pour la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet. M. Cornu fait remarquer qu'on a pour les surfaces du second ordre un théorème analogue, dont voici l'énoncé :

Soient $f(x, y, z) = 0$ *l'équation d'une surface du second ordre;* MP *la perpendiculaire abaissée du point* M (α, β, γ) *sur le plan polaire de ce point;* A *le point où* MP *prolongé rencontre l'un des plans principaux de la surface :* $f(\alpha, \beta, \gamma)$ *est proportionnel au produit* MP.MA.

M. Mannheim avait remarqué que si le point A (dans le cas des courbes du second degré) est sur le petit axe, les points P, A, F et F′ sont sur un même cercle. M. Cornu ajoute que le point d'intersection B de la polaire du point M avec le même axe se trouve sur ce cercle. Un théorème analogue a lieu pour le grand axe, mais, dans ce cas, le cercle passe par les foyers imaginaires situés sur le petit axe.

M. Cornu déduit aussi le même théorème d'un théorème plus général : mais ce dernier n'étant ni d'un énoncé plus simple ni d'une démonstration plus facile, il n'y a aucun avantage à s'en servir dans la question actuelle.

2. M. Painvin. — « Si $f(x, y) = 0$ est l'équation d'une courbe du n^{ieme} ordre; si $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont les intersections de la courbe et d'une droite passant par les points M (x, y) et P (α, β), on a

$$\frac{MM_1.MM_2.MM_3\ldots MM_n}{PM_1.PM_2.PM_3\ldots PM_n} = \frac{f(x, y)}{f(\alpha, \beta)}.$$

C'est le théorème de Newton donnant une signification géométrique de $f(x, y)$ dans les courbes d'un degré quelconque. On peut en déduire beaucoup de significations géométriques dans le cas des courbes du second degré. »

3. M. Mathieu, à Toulouse, trouve, comme l'annonce M. Painvin, d'autres significations. Si l'angle des axes est θ, et x_0, y_0 les coordonnées du centre de la courbe, on a, quand les axes varient, la courbe du second degré restant fixe,

$$\frac{f(\alpha, \beta)}{f(x_0, y_0)} = \text{const.},$$

$$\frac{f(\alpha, \beta)\sin^2\theta}{A + C - B\cos\theta} = \text{const},$$

$$\frac{f^2(\alpha, \beta)\sin^2\theta}{B^2 - 4AC} = \text{const.},$$

et des formules analogues pour les surfaces du second ordre. Nous ne citerons que la première, qui est la plus simple,

$$\frac{f(\alpha, \beta, \gamma)}{f(x_0, y_0, z_0)} = \text{const.};$$

elle conduit au théorème sur les surfaces du second ordre cité plus haut.

4. MM. BERTRAND et GRASSAT, élèves du lycée de Lyon, démontrent à peu près comme M. Cornu le théorème de M. Transon et la conséquence que M. Mannheim en a déduite : démonstration analytique trop facile pour qu'il y ait utilité à la reproduire.

5. M. RECOQ, élève du lycée de Montpellier (classe de M. Berger), énonce les deux théorèmes suivants, dont l'un est une variante du théorème de M. Transon :

La valeur que reçoit le premier membre de l'équation d'une conique, quand on y remplace x et y par les coordonnées d'un point quelconque du plan, représente, à un facteur constant près, le rapport des distances de la polaire du point considéré à ce point et au centre. — Théorème analogue pour une surface du second degré.

P.