NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRETON

# Sur les rayons de courbure des caustiques en leurs points de rebroussement

*Nouvelles annales de mathématiques 2e série*, tome 4 (1865), p. 25-30

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__25_1>

# SUR LES RAYONS DE COURBURE DES CAUSTIQUES EN LEURS POINTS DE REBROUSSEMENT;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

---

Les instruments destinés soit à augmenter la puissance de la vision, soit à former les images que fixe l'art du photographe, se composent essentiellement, au moins dans leur partie principale, de surfaces sphériques réfringentes ou réfléchissantes, centrées sur un même axe. Si l'on conçoit que des rayons de lumière homogène partent d'un point situé sur cet axe, ils formeront, dans chaque section diamétrale, une caustique due à l'action de la première surface, puis une seconde caustique due à l'action des deux premières surfaces, et ainsi de suite; et chacune de ces caustiques aura sur l'axe central un point de rebroussement de première espèce.

Or, en un tel point, le rayon de courbure d'une courbe est ou infini ou nul (*). Par exemple, la courbe qui a pour équation en coordonnées rectangulaires

$$y^2 = x^5$$

présente, à l'origine, un point de rebroussement de première espèce, pour lequel le rayon de courbure est infini. Il en est de même pour toutes les courbes qui ont pour équation

$$y^2 = x^{4+\varepsilon},$$

$\varepsilon$ étant positif, et tel que $(-x)^\varepsilon$ soit négatif.

En prenant

$$y^2 = x^3,$$

ou plus généralement

$$y^2 = x^{4-\varepsilon},$$

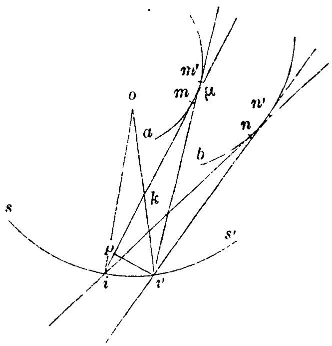
sous les mêmes conditions que ci-dessus, mais en ajoutant cette restriction que $\varepsilon$ soit $< 2$, on a des courbes à point de rebroussement de première espèce pour lesquelles le rayon de courbure est nul.

Il est intéressant d'examiner ce qui a lieu pour les points de rebroussement des caustiques successives que nous considérons ici. On conçoit en effet que si le rayon de courbure est nul, la courbe, s'écartant alors de l'axe très-rapidement, est bien plus favorable à la concentration des rayons dans un petit espace autour du point de rebroussement qui constitue le foyer.

Supposons que *am*, *bn* soient deux caustiqnes consé-

(*) *Voyez* à ce sujet un article inséré au tome XIII du présent journal, p. 127. M. Bertrand a omis dans le *Calcul différentiel* qu'il vient de publier les points de rebroussement de première espèce à rayon de courbure infini. C'est du moins ce qui semble résulter des §§ 501 et 502 de cet ouvrage, et surtout de la table analytique au mot *Rebroussement*.

cutives, c'est-à-dire que tout rayon *mi* tangent à *am* prenne, après avoir subi l'action de la surface $ss'$, la direc-




tion *ni* tangente à *bn*. Du point *i* menons une normale *io* à la surface $ss'$; si l'on appelle V, V′ les angles d'incidence et de réfraction *oim*, *oin*, et $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda'}$ les indices de réfraction propres aux deux milieux dans lesquels la lumière se propage successivement, on aura la relation

$$\frac{1}{\lambda}\sin V = \frac{1}{\lambda'}\sin V'. \tag{1}$$

Dans le cas de la réflexion, on aurait $\lambda' = -\lambda$.

Soit $i'$ un nouveau point d'incidence voisin de $i$, $m'i'$ le rayon tangent à la première caustique, $n'i'$ le rayon tangent à la seconde, et $i'o$ la normale. On aura

$$oi'm' = V + dV, \quad oi'n' = V' + dV',$$

et en différentiant la relation (1)

$$\frac{1}{\lambda}\cos V\, dV = \frac{1}{\lambda'}\cos V'\, dV'. \tag{2}$$

Nommons encore $r$, $\Delta$, $\Delta'$ les longueurs *oi*, *mi*, *ni*. Le point *o* étant l'intersection de deux normales *io*, $i'o$ menées par les points $i$, $i'$ distants de l'intervalle très-petit $ds$,

$r$ est le rayon de courbure de cet arc, et on a $ioi' = \frac{ds}{r}$.
Soit $\mu$ le point d'intersection des rayons $mi$, $m'i$, l'égalité entre la somme des angles du triangle $oki$ et la somme des angles du triangle $\mu k i'$ donne

$$dV = \frac{ds}{r} - k\mu i'.$$

Or, si l'on abaisse $i'p$ perpendiculaire sur $i\mu$, on a

$$k\mu i' = \frac{ip}{p\mu} = \frac{ds\cos V}{\Delta},$$

et par suite

$$(3) \qquad dV = \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos V}{\Delta}\right) ds.$$

On trouverait de même

$$(4) \qquad dV' = \left(\frac{1}{r} - \frac{\cos V'}{\Delta'}\right) ds;$$

substituant ces expressions dans (2), il vient

$$(5) \qquad \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\cos^2 V}{\Delta} - \frac{\cos V}{r}\right) = \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{\cos^2 V'}{\Delta'} - \frac{\cos V'}{r}\right);$$

formule donnée par Jacques Bernoulli.

Appelons actuellement R, R' les rayons de courbure des petits arcs $mm'$, $nn'$ des deux caustiques. On a

$$mm' = ip + pm' - im,$$

et à cause de la petitesse de l'angle $i\mu i'$, on peut regarder $i'm'$ comme égal à $pm'$. Par conséquent,

$$mm' = ds.\sin V + d\Delta.$$

En divisant $mm'$ par R, on a la valeur de l'angle de contingence $i\mu i'$ ou $k\mu i'$ déjà exprimé ci-dessus. De là résulte l'égalité

$$(6)\qquad \frac{ds\sin V + d\Delta}{R} = \frac{ds\cos V}{\Delta},$$

d'où l'on tire

$$(7)\qquad d\Delta = \left(\frac{R\cos V}{\Delta} - \sin V\right) ds.$$

On trouve de même

$$(8)\qquad d\Delta' = \left(\frac{R'\cos V'}{\Delta} - \sin V'\right) ds.$$

Or l'équation (5) donne

$$\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{r}\sin V dV - \frac{2}{\Delta}\sin V\cos V dV - \frac{1}{\Delta^2}\cos^2 V d\Delta\right)$$
$$= \frac{1}{\lambda'}\left(\frac{1}{r}\sin V' dV' - \frac{2}{\Delta'}\sin V'\cos V' dV' - \frac{1}{\Delta'^2}\cos^2 V' d\Delta'\right),$$

et, en mettant pour $dV$, $dV'$, $d\Delta$, $d\Delta'$ les expressions ci-dessus (3), (4), (7), (8), il vient, après une simplification facile,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{3}{\lambda}\frac{\sin V}{\Delta}\left(\frac{\cos^2 V}{\Delta} - \frac{\cos V}{r}\right) - \frac{1}{\lambda}\frac{\cos^3 V}{\Delta^3}R \\ &= \frac{3}{\lambda'}\frac{\sin V'}{\Delta'}\left(\frac{\cos^2 V'}{\Delta'} - \frac{\cos V'}{r}\right) - \frac{1}{\lambda'}\frac{\cos^3 V'}{\Delta'^3}R'. \end{aligned}\right.$$

Telle est la relation qui existe généralement entre les rayons de courbure R, R′ aux points correspondants $m$, $n$ de deux caustiques consécutives.

Jusqu'à présent nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur la position des caustiques. Dans le cas spécial que nous avons en vue, les rayons $mi$, $ni$ sont normaux à la surface $ss'$; par conséquent on a $V = 0$, $V' = 0$, et la relation ci-dessus devient

$$(10)\qquad \frac{1}{\lambda\Delta^3}R = \frac{1}{\lambda'\Delta'^3}R'.$$

Or, au point de départ on a $R = 0$, puisque les rayons sont censés diverger de ce point; on a donc $R' = 0$ pour le point de rebroussement de la première caustique. Ayant $R' = 0$, le rayon de courbure au point de rebroussement de la seconde caustique se réduira pareillement à zéro, et ainsi de suite. D'où résulte cette conséquence très-importante, que tous les rayons de courbure dont il s'agit sont nuls.

Le rayon de courbure en un point de rebroussement d'une caustique est encore généralement nul lorsque les rayons de lumière ne sont pas normaux à la surface qui les réfracte ou les réfléchit. En effet, pour qu'il y ait rebroussement, il faut que $nn'$ change de signe, c'est-à-dire que $ds \sin V' + d\Delta'$ se réduise à zéro. Or

$$\frac{ds \sin V' + d\Delta'}{R'} = \frac{ds \cos V'}{\Delta'}, \tag{11}$$

par conséquent

$$ds \sin V' + d\Delta' = \frac{ds \cos V'}{\Delta'} \cdot R'. \tag{12}$$

Le premier membre de cette égalité ne peut, *en général*, se réduire à zéro sans que l'on ait $R' = 0$, ce qui démontre le théorème énoncé.