NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GÉRONO

Note sur la détermination des points de contact du cercle qui passe par les milieux des trois côtés d'un triangle, et des cercles tangents à ces côtés

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 220-224

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__220_1>

NOTE

sur la détermination des points de contact du cercle qui passe par les milieux des trois côtés d'un triangle, et des cercles tangents à ces côtés.

Parmi les nombreuses et intéressantes questions résolues dans le *Traité des Sections coniques* de M. Salmon, on trouve plusieurs démonstrations analytiques de la proposition relative au contact du cercle passant par les milieux des côtés d'un triangle et des cercles inscrit et exinscrits (*) ; l'une de ces démonstrations (p. 299), qui est due à M. Hamilton, a conduit à un moyen très-simple de construire les points de tangence des cercles mentionnés. Cette construction est d'autant plus remarquable qu'elle

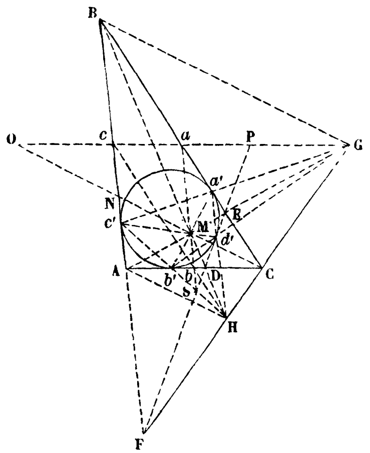
(*) Cette proposition a été démontrée de bien des manières différentes. *Voir* les *Nouvelles Annales* (t. I et IX, 1842 et 1850), et les recueils intitules :

The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics (t. IV et V, 1861 et 1862);

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università italiane (t. I, 1863).

n'exige que l'emploi de la règle : les points cherchés s'obtiennent sans qu'il soit nécessaire de décrire une seule circonférence, il suffit pour les déterminer de connaître les milieux des côtés du triangle, et les points auxquels ces côtés sont touchés par les cercles inscrit et ex-inscrits.

L'objet principal de cette Note est d'établir, au moyen des principes de la Géométrie élémentaire, la construction dont il s'agit.



Je nommerai a, b, c les milieux des côtés BC, CA, AB du triangle ABC ;

a', b', c' les points de contact de ces côtés et du cercle inscrit dans le triangle ;

M l'intersection des droites ab, $a'b'$;

D l'intersection des droites BM, AC ;

Dd' une droite menée du point D tangente en d' à la circonférence $(a'\,b'\,c')$ inscrite dans le triangle.

Je vais démontrer que la circonférence (abc), qui passe par les milieux des côtés du triangle ABC, touche au point d la circonférence inscrite $(a'\,b'\,c')$.

Soit prolongée la tangente Dd' jusqu'à ce qu'elle rencontre les droites BC, BA en des points E, F ; il en résultera un quadrilatère *complet* ABEDFC, ayant pour diagonales AE, BD, FC, et dont les côtés AB, BE, ED, DA, touchent, respectivement, en c', a', d', b' la circonférence inscrite.

Les deux diagonales AE, BD, et les deux cordes de contact $a'b'$, $c'd'$ se coupent en un seul et même point (*); or, BD et $a'b'$ se coupent au point M, donc AE et $c'd'$ passent par ce point.

De même, les cordes de contact $b'd'$, $c'a'$ concourent au point G, intersection des diagonales AE, FC; et les cordes $a'd'$, $c'b'$ se rencontrent au point H, intersection des diagonales BD, FC.

En outre, les points c, a, G sont en ligne droite, et il en est de même des points c, b, H. Cela résulte des considérations suivantes :

La diagonale FC étant divisée harmoniquement par les deux autres diagonales AE, BD (**), les quatre droites BF, BC, BH, BG forment un faisceau harmonique. Mais les trois premières divisent en deux parties égales la transversale CMN; donc la quatrième BG est parallèle à la transversale CMN (***).

Par les points G et a, je mène la droite Ga, que je prolonge jusqu'à la rencontre de CN au point O. Les deux triangles GaB, OaC sont égaux, à cause du parallélisme des droites BG, CO et de l'égalité des côtés Ba, Ca; ainsi la droite GO est divisée en deux parties égales au point a. Mais les quatre droites CG, CM, CE, CA

(*) *Voir* l'excellent *Traité de Géométrie élémentaire* de MM. Rouché et de Comberousse (p. 216).

(**) Page 212 du *Traité de Géométrie élémentaire*, déjà cité.

(***) Page 211 du même ouvrage.

forment un faisceau harmonique; donc la transversale Ga est parallèle à CA, et, par conséquent, elle passe par le point c. En d'autres termes, les points c, a, G sont en ligne droite.

On prouvera de même que AH est parallèle à CN, et que Hb est parallèle à CB. Les trois points c, b, H sont donc aussi en ligne droite.

Actuellement, soient S et P les points où la tangente Dd' rencontre ab et ac prolongées s'il est nécessaire. Je dis qu'on aura

$$\overline{Sd'}^2 = Sa \times Sb \quad \text{et} \quad \overline{Pd'}^2 = Pa \times Pc.$$

En effet, dans le triangle EBF, la droite EA divise en parties proportionnelles la base BF, et sa parallèle aS; donc

$$\frac{SM}{Sa} = \frac{FA}{FB}.$$

La droite DA divise aussi en parties proportionnelles la base BF du triangle DBF, et sa parallèle MS, d'où

$$\frac{Sb}{SM} = \frac{FA}{FB}.$$

Il s'ensuit

$$\overline{SM}^2 = Sa \times Sb.$$

Or,

$$SM = Sd',$$

car le triangle SMd' est semblable au triangle isocèle F$c'd'$, conséquemment

$$\overline{Sd'}^2 = Sa \times Sb.$$

La droite AC étant parallèle à la base cG du triangle FcG, on a

$$\frac{PG}{Pc} = \frac{DC}{DA};$$

de plus, la similitude des triangles aEG, AEC donne

$$\frac{\mathrm{P}a}{\mathrm{PG}} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{DA}}.$$

De là,

$$\overline{\mathrm{PG}}^2 = \mathrm{P}a \times \mathrm{P}c.$$

Mais

$$\mathrm{PG} = \mathrm{P}d',$$

parce que Pd'G et D$d'b'$ sont des triangles semblables, et que le dernier est isocèle; donc

$$\overline{\mathrm{P}d'}^2 = \mathrm{P}a \times \mathrm{P}c.$$

Les égalités

$$\overline{\mathrm{S}d'}^2 = \mathrm{S}a \times \mathrm{S}b \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{P}d'}^2 = \mathrm{P}a \times \mathrm{P}c$$

montrent que les circonférences abd', acd', qui ont le point a commun, sont l'une et l'autre tangentes à la droite Dd' au même point d'; donc elles coïncident et se confondent avec la circonférence abc. Il en résulte que cette dernière est tangente, au point d', à la circonférence $a'b'c'$ inscrite dans le triangle ABC. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Pour trouver le point de contact d', il n'est pas nécessaire de décrire la circonférence $a'b'c'$. On déterminera d'abord l'un des trois points M, G, H; par exemple M, intersection des droites ab, $a'b'$. Puis, des extrémités A, B, du côté AB parallèle à ab, on mènera au point M les droites AM, BM, qui, par leurs rencontres avec BC, AC, donneront les sommets E, D du quadrilatère ABED. L'intersection du côté DE de ce quadrilatère et de la droite c'M sera le point d' cherché.

Une construction semblable détermine les points de contact de la circonférence abc, et des cercles ex-inscrits au triangle ABC considéré. G.