Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), p. 169-182
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1865_2_4__169_0>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 619

(voir 2e série, t I, p 170),

PAR M. E. COLOT.

1° *La surface représentée par le système des trois équations*

$$x = \frac{c^2 - b^2}{bc} \frac{RR'}{R + R'},$$

$$y = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{b} \frac{R'\sqrt{b^2 - R^2}}{R + R'},$$

$$z = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c} \frac{R\sqrt{R'^2 - c^2}}{R + R'}$$

est une cyclide; R, R′ *sont les rayons de courbure principaux de la surface au point* x, y, z.

2° *Supposons qu'une famille de courbes situées sur cette cyclide soit représentée par l'équation différentielle*

$$p\,dR + q\,dR' = 0,$$

les courbes, coupant orthogonalement celles du système donné, seront représentées par l'équation

$$\frac{dR}{pR^2(b^2 - R^2)} - \frac{dR'}{qR'^2(R'^2 - c^2)} = 0.$$

3° *L'équation en coordonnées elliptiques de la cyclide dont il s'agit est*

$$\rho - \mu - \nu = 0.$$

(STREBOR.)

1° Les équations de la surface donnent pour les rapports $\frac{y^2}{x^2}$ et $\frac{z^2}{x^2}$ les valeurs

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{c^2}{c^2 - b^2} \frac{b^2 - R^2}{R^2},$$
$$\frac{z^2}{x^2} = \frac{b^2}{c^2 - b^2} \frac{R'^2 - c^2}{R'^2};$$

R ne dépend que du premier de ces deux rapports, et R′ que du second; par conséquent, on obtiendra les courbes $R = \text{const.}$ et $R' = \text{const.}$ en coupant la surface par deux systèmes de plans passant par l'axe OZ et par l'axe OY.

Les équations précédentes reviennent à

$$R^2 = \frac{b^2 c^2 x^2}{c^2 x^2 + (c^2 - b^2) y^2}, \quad R'^2 = \frac{b^2 c^2 x^2}{b^2 x^2 - (c^2 - b^2) z^2},$$

et ces valeurs, substituées dans l'une des trois équations données, conduisent à l'équation de la surface

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(c^2 + b^2)x^2 - 2(c^2 - b^2)y^2 + 2(c^2 - b^2)z^2 + (c^2 - b^2)^2 = 0.$$

On peut se faire une idée assez exacte de cette surface en étudiant quelques-unes de ses sections planes.

Le plan YOZ ne contient que deux points A et B de la surface; ils ont pour coordonnées :

$$\text{A} \ldots \quad x = 0, \quad y = -\sqrt{c^2 - b^2}, \quad z = 0,$$
$$\text{B} \ldots \quad x = 0, \quad y = +\sqrt{c^2 - b^2}, \quad z = 0.$$

Le plan ZOX la coupe suivant les deux circonférences

$$y = 0, \quad (x \mp c)^2 + z^2 = b^2,$$

et le plan XOY suivant les deux circonférences

$$z = 0, \quad (x \mp b)^2 + y^2 = c^2.$$

Les plans $y = x \tang\varphi$ qui passent tous par l'axe OZ déterminent dans la surface deux sections circulaires ayant pour équations dans leurs plans

$$z^2 + \left(u \mp \sqrt{c^2 - b^2 \sin^2\varphi}\right)^2 = b^2 \cos^2\varphi$$

(OU est la trace du plan $y = x \tang\varphi$ sur le plan XOY) ; ce sont les courbes $R =$ const.

De même, les plans $z = x \tang\psi$ donnent les couples de circonférences

$$y^2 + \left(v \mp \sqrt{b^2 - c^2 \sin^2\psi}\right)^2 = c^2 \cos^2\psi$$

(OV est la trace du plan $z = x \tang\psi$ sur le plan ZOX) ; ce sont les courbes $R' =$ const.

Le lieu géométrique des centres des courbes $R =$ const. a pour équations

$$z = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 = c^2 x^2 + (c^2 - b^2) y^2;$$

c'est la transformée par rayons vecteurs réciproques de l'ellipse

$$z = 0, \quad c^2 x^2 + (c^2 - b^2) y^2 = c^2 (c^2 - b^2),$$

en prenant l'origine comme pôle et $c\sqrt{c^2 - b^2}$ pour paramètre de transformation. Ce lieu est aussi la podaire de l'ellipse

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1.$$

Le lieu géométrique des centres des courbes $R' =$ const. a pour équations

$$y = 0, \quad (x^2 + z^2)^2 = b^2 x^2 - (c^2 - b^2) z^2;$$

c'est la transformée de l'hyperbole

$$y = 0, \quad b^2 x^2 - (c^2 - b^2) z^2 = b^2 (c^2 - b^2),$$

ou la podaire de l'hyperbole

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1.$$

A l'aide de tous les résultats que nous venons d'obtenir, on voit facilement que la surface a la forme de deux fuseaux recourbés de manière à avoir leurs pointes en contact aux points A et B, leurs parties renflées autour des points $x = \mp c$, $y = 0$, $z = 0$, et dont les axes s'appliqueraient sur la courbe

$$z = 0, \quad (x^2 + y^2)^2 = c^2 x^2 + (c^2 + b^2) y^2.$$

La surface proposée est la transformée par rayons vecteurs réciproques d'un cône de révolution; cette transformation s'opère en prenant pour pôle le point A et $2\sqrt{c^2 - b^2}$ pour puissance. Le cône ainsi obtenu a son sommet au point B, son axe parallèle à OX, et ses génératrices font avec l'axe un angle ω, tel que

$$\tang \omega = \frac{b}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

Le cône est l'enveloppe des sphères inscrites ou l'enveloppe de ses plans tangents. La surface est l'enveloppe des transformées des sphères inscrites ou de celles des plans tangents au cône; c'est donc une *cyclide* pour laquelle, dans le premier mode de génération, les trois sphères fixes sont les transformées de trois plans tangents, et dans le second celles de trois sphères inscrites. Les centres de ces deux séries de sphères sont sur l'ellipse et sur l'hyperbole que nous avons déjà rencontrées :

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1,$$

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1;$$

on peut le démontrer, soit par le calcul, soit par des considérations géométriques très-simples empruntées à la théorie des courbes du second ordre. Ces deux courbes sont l'*ellipse focale* et l'*hyperbole ombilicale* du système de surfaces homofocales du second degré que nous aurons à considérer pour établir l'équation de la surface en coordonnées elliptiques.

La cyclide a deux plans tangents singuliers qui la touchent suivant deux circonférences; ces plans passent par l'axe OY et font avec le plan XOY des angles égaux à ω. Aux points A et B il y a deux cônes de tangentes : l'un est le cône de révolution que nous avons trouvé en transformant la surface, et l'autre est le cône symétrique du premier par rapport au plan ZOX. Cette cyclide jouit encore d'une propriété remarquable : elle appartient à la classe des surfaces que M. Moutard a proposé de nommer *anallagmatiques* (p 307). En effet, en prenant l'origine comme pôle et $c^2 - b^2$ comme paramètre de transformation, on retombe sur la surface elle-même (*).

Les lignes de courbure du cône sont les génératrices et les sections circulaires; les transformées par rayons vecteurs réciproques de ces lignes seront les lignes de courbure de la surface proposée.

Les génératrices donnent, par la transformation, des circonférences qui passent par les deux points A et B; les plans de ces circonférences passant tous par l'axe OY, elles se confondent avec les courbes $R' =$ const.

Quant aux sections circulaires du cône, elles ont pour

(*) Cette remarque a été faite par M. Mannheim dans sa belle etude sur les cyclides, avant que le mot *anallagmatique* fût inventé. Moi aussi j ai fait des anallagmatiques sans le savoir, car la surface du quatrième degre, numérotée (8), 2^e série, t. II, p. 236, et dont l'intersection avec l'ellipsoïde donne la ligne des courbures semblables, est une surface anallagmatique du quatrième ordre. P.

transformées des circonférences symétriques par rapport au plan XOY. Leurs plans passent tous par l'axe OZ (*). Ce sont les circonférences $R = \text{const.}$

Représentons maintenant par R_1 et R'_1 les rayons de courbure principaux correspondant aux lignes de courbure $R = \text{const.}$ et $R' = \text{const.}$

Le plan $y = x \operatorname{tang}\varphi$ coupe la surface suivant deux cercles ayant pour rayons $b\cos\varphi$, et faisant avec la surface un angle θ, tel que

$$\sin\theta = \frac{b}{c}\sin\varphi;$$

en appliquant le théorème de Meunier on aura donc

$$b\cos\varphi = R_1\sqrt{1 - \frac{b^2\sin^2\varphi}{c^2}},$$

$$R_1^2 = \frac{b^2c^2\cos^2\varphi}{c^2 - b^2\sin^2\varphi} = \frac{b^2c^2x^2}{c^2x^2 + (c^2 - b^2)y^2} = R^2.$$

Le plan $z = x \operatorname{tang}\psi$ coupe la surface suivant deux cercles ayant pour rayons $c\cos\psi$, et faisant avec la surface un angle τ donné par la relation

$$\sin\tau = \frac{c}{b}\sin\psi;$$

par suite,

$$R_1'^2 = \frac{b^2c^2x^2}{b^2x^2 - (c^2 - b^2)z^2} = R'^2.$$

Donc, les deux variables R et R' représentent bien les

(*) On le démontre en remarquant qu'il suffit de prouver que les traces de ces plans sur XOY passent par l'origine, ce qu'on fait facilement en s'appuyant sur ce théorème de Géométrie plane élémentaire : *Une circonférence tangente à la corde commune de deux circonférences égales, en un des points communs à ces deux circonférences, les coupe en deux points qui sont en ligne droite avec le milieu de la ligne des centres.*

rayons de courbure principaux au point x, y, z de la cyclide.

2° Les courbes $R = \text{const.}$, $R' = \text{const.}$, étant les lignes de courbure de la surface, sont orthogonales; en désignant par ds l'arc d'une courbe quelconque tracée sur la surface, on aura l'équation

$$ds^2 = E\,dR^2 + G\,dR'^2,$$

où

$$E = \left(\frac{dx}{dR}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dR}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dR}\right)^2$$

et

$$G = \left(\frac{dx}{dR'}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dR'}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dR'}\right)^2;$$

et l'angle i que fait cette courbe avec $R = \text{const.}$ aura pour tangente

$$\tan i = \frac{\sqrt{E}\,dR}{\sqrt{G}\,dR'}.$$

On trouve sans difficulté

$$E = \frac{(c^2 - b^2)R'^2}{(R + R')^2(b^2 - R^2)},$$

$$G = \frac{(c^2 - b^2)R^2}{(R + R')^2(R'^2 - c^2)},$$

et par suite

$$ds^2 = \frac{c^2 - b^2}{(R + R')^2}\left(\frac{R'^2}{b^2 - R^2}\,dR^2 + \frac{R^2}{R'^2 - c^2}\,dR'^2\right).$$

Cela posé, en désignant par α et β les angles que font avec $R = \text{const.}$ les courbes

$$p\,dR + q\,dR' = 0,$$

et

$$\frac{dR}{pR^2(b^2 - R^2)} - \frac{dR'}{qR'^2(R'^2 - c)} = 0,$$

on trouve

$$\tang\alpha = -\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{q}{p},$$

$$\tang\beta = \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{pR^2(b^2 - R^2)}{qR'^2(R'^2 - c^2)},$$

et par suite

$$\tang\alpha \tang\beta = -1;$$

donc, les deux familles de courbes sont orthogonales.

3° Enfin, pour trouver l'équation de la surface en coordonnées elliptiques, il suffit de rappeler que des équations des trois familles de surfaces homofocales du second ordre :

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

on déduit

$$x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2 = \rho^2 + \mu^2 + \nu^2,$$
$$b^2c^2 + (b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 = \mu^2\nu^2 + \nu^2\rho^2 + \rho^2\mu^2;$$

car l'équation de la cyclide, mise sous la forme

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2)^2$$
$$- 4[b^2c^2 + (b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2] = 0,$$

devient, à l'aide des relations précédentes,

$$(\rho^2 + \mu^2 + \nu^2)^2 - 4(\mu^2\nu^2 + \nu^2\rho^2 + \rho^2\mu^2) = 0.$$

Le premier membre de cette équation se décompose en quatre facteurs du premier degré; la surface a donc quatre nappes

$$\rho + \mu + \nu = 0,$$
$$\mu - \nu - \rho = 0,$$
$$\nu - \rho - \mu = 0,$$
$$\rho - \mu - \nu = 0;$$

la dernière équation représente à elle seule la partie réelle de la surface proposée; la première et la troisième donnent des surfaces imaginaires, et la seconde ne représente que les points A et B.

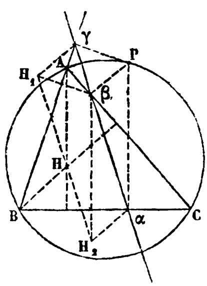
Question 708

(voir 2e série, t. III, p. 442);

PAR MM. LE BEL ET TALAYRACH,
Élèves du lycée Charlemagne (classe de M. Hauser.)

On sait que si d'un point quelconque P *d'un cercle circonscrit à un triangle* ABC, *on mène des perpendiculaires aux trois côtés du triangle, les pieds de ces perpendiculaires sont sur une même droite. Démontrer que cette droite est également distante du point* P *et du point de rencontre des trois hauteurs du triangle.*

Appelons α, β, γ les pieds des perpendiculaires



abaissées du point P sur les trois côtés du triangle ABC, et considérons le quadrilatère complet $AB\alpha\beta C\gamma$. D'après une proposition connue (*Nouvelles Annales*, t. V, p. 13, et t. VI, p. 196), les points de rencontre des hauteurs des triangles $A\beta\gamma$, $C\alpha\beta$, ABC, sont en ligne droite; soient H_1, H_2, H ces points, H se trouve donc sur H_1H_2. Mais la figure $P\beta\gamma H_1$ est un parallélogramme, de même que la figure $P\alpha\beta H_2$; donc la distance de P à la droite $\alpha\beta\gamma$ est la même que celle des points H_1, H_2 à cette droite, et par suite que celle de H. C. Q. F. D.

Remarque. — Ce théorème démontre que dans tout triangle ABC circonscrit à une parabole, le point de rencontre des hauteurs du triangle est sur la directrice.

Car le point P peut être considéré comme le foyer d'une parabole inscrite dans le triangle ABC, laquelle aurait pour tangente au sommet la droite $\alpha\beta\gamma$; d'après ce qui précède, la droite H_1H_2 en serait la directrice.

Note. — MM. Legrand, élève du lycée Saint-Louis (classe de M. Vacquant); Rondeaux, du lycée Charlemagne, et Heurteau, de Sainte-Barbe, donnent une solution peu différente. MM. O. Puel, du Prytanée de la Flèche; Emperanger, du lycée de Bordeaux; A. Morel, du lycée Louis-le-Grand; Roques, du 53e d'infanterie, s'appuient sur la propriété de la parabole, démontrée comme corollaire dans la solution précédente. Autres solutions géométriques de MM. Marini, maître répétiteur au lycée Louis-le-Grand; A. Graber, de Zurich; A. D. et R., élèves de l'École Centrale; de Vigneral.

Question 710

(voir p. 442);

PAR M. L. LACAUCHIE,
Élève de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard.)

Soient a, b, c les milieux des côtés d'un triangle ABC; *a_1, b_1, c_1 les pieds des hauteurs;*

α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 les points d'intersection (bc_1, cb_1), (ca_1, ac_1), (ab_1, ba_1), (bc, b_1c_1), (ac, a_1c_1), (ab, a_1b_1);

M *le centre du cercle circonscrit;*

H *le point d'intersection des hauteurs;*

O *le centre du cercle des neuf points.*

Cette notation admise :

1° *Les points* α, β, γ *sont sur la ligne droite* HM.

2° *Les droites* $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ *sont parallèles entre elles, et perpendiculaires à* HM.

3° *Les quatre points* α, β_1, γ_1, A *sont en ligne droite. Il en est de même des quatre points* β, γ_1, α_1, B, *et des quatre points* γ, α_1, β_1, C.

4° α_1, β_1, γ_1 *sont les sommets d'un triangle conjugué au cercle des neuf points* (O).

5° *Les droites* $a\alpha_1$, $b\beta_1$, $c\gamma_1$ *passent par un même point* P; *et pareillement les droites* $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$ *passent par un point* P_1.

6° *Les deux points* P *et* P_1 *appartiennent au cercle des neuf points.*

7° *Les points d'intersection* (AB, $\alpha_1\beta_1$), (BC, $\beta_1\gamma_1$), (AC, $\alpha_1\gamma_1$) *sont une même droite qui passe par* P, P_1.

(SCHROETER.)

J'appelle a', b', c' les points milieux des distances HA, HB, HC par lesquels passe le cercle des neuf points. On sait que les droites aa', bb', cc' sont des diamètres de ce cercle.

1° Si je considère l'hexagone $bc_1c'cb_1b'b$ inscrit au cercle des neuf points, les points α, H, O, intersections des côtés opposés, sont en ligne droite. En considérant les hexagones $ac_1c'ca_1a'a$ et $ab_1b'ba_1a'a$, on démontrerait de même que les points β et γ sont sur la droite OH, qui n'est autre que MH.

2° Si nous considérons le quadrilatère inscrit cc_1b_1b, la polaire du point α où se coupent les diagonales est $A\alpha_1$; de même, les droites $B\beta_1$, $C\gamma_1$ sont les polaires des points β et γ. Les points α, β, γ étant sur une même ligne droite (MH) qui passe par le centre, les droites $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ seront parallèles entre elles et perpendiculaires à la droite MH.

3° L'hexagone $b_1cabc_1a_1b_1$ étant inscrit au cercle, les points α, β_1, γ_1 sont en ligne droite. On démontrerait, en considérant les hexagones $a_1cbac_1b_1a_1$ et $ab_1c_1a_1bca$, qu'il en est de même pour les points β, α_1, γ_1 et les points γ, α_1, β_1.

Or, les polaires des points β, α_1, γ_1 sont les droites $A\beta_1$, $A\alpha$, $C\beta_1$, elles se coupent au même point, donc $A\alpha$ passe par β_1, et les points α, β_1, γ_1, A sont en ligne droite. On démontrerait de même que β, γ_1, α_1, B et γ, α_1, β_1, C sont respectivement en ligne droite.

4° La polaire $A\alpha$ du point α_1 passant par β_1, γ_1, celle de β_1 par α_1, γ_1, le triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ est conjugué au cercle des neuf points (O).

5°-6° Si l'on joint B, β_1 on détermine sur le cercle (O) un point P tel, que la droite qui le joint au point a passe par α_1. On a, en effet, un quadrilatère inscrit acbP; cb coupe la polaire de β_1 en α_1; donc aP passera en α_1. De même ab coupe cette polaire en γ_1, donc CP passera par γ_1.

On démontrerait de la même façon que $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$ se coupent en un même point P_1 situé sur le cercle des neuf points.

7° Soient A_1, B_1, C_1 les points d'intersection (AB, $\alpha_1\beta_1$), (BC, $\beta_1\gamma_1$), (AC, $\alpha_1\gamma_1$). Pa et P_1a_1 se coupent en α_1, donc aa_1, ou BC, et PP_1 se coupent en un point A_1 de la polaire de α_1, ou $\beta_1\gamma_1$. Donc A_1 est sur la droite PP_1. Il en est de même de B_1 et C_1.

On peut encore tirer d'autres conséquences de ces propriétés.

8° Soient α_2, β_2, γ_2 les points d'intersection des droites (Pa, P_1a_1), (Pb, P_1b_1), (Pc, P_1c_1); et α_3, β_3, γ_3 les points d'intersection des droites $(B_1\beta_1, C_1\gamma_1)$, $(A_1\alpha_1, C_1\gamma_1)$, $(A_1\alpha_1, B_1\beta_1)$.

Les points A_1, B_1, C_1 ont pour polaires $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$; ces droites se coupent donc en un même point, qui est le pôle de PP_1.

9° α_2 est un point de la polaire de α_1, ce point est donc sur la droite $A\alpha\beta_1\gamma_1A_1$. Les points β_2, γ_2 sont de même respectivement sur les droites $B\beta\alpha_1\gamma_1B_1$ et $C\gamma\alpha_1\beta_1C_1$.

10° L'hexagone $cb_1Pc_1bP_1c$ étant inscrit au cercle des neuf points, les points α, β_2, γ_2 sont en ligne droite. Il en est de même de β, α_2, γ_2 et de γ, α_2, β_2.

11° Les polaires de α, β_2 et γ_2 étant les droites $A\alpha_1$, $B_1\beta_1$, $C_1\gamma_1$, le point α_3 sera sur la droite $A\alpha_1$, et sera le pôle de la droite $\alpha\beta_2\gamma_2$. De même β_3 et γ_3 sont sur les droites $B\beta_1$ et $C\gamma_1$, et seront les pôles des droites $\beta\alpha_2\gamma_2$ et $\gamma\alpha_2\beta_2$.

12° En appelant α_4, β_4, γ_4 les points de rencontre des droites $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$ deux à deux, on voit que le triangle $\alpha_4\beta_4\gamma_4$ est le triangle conjugué de ABC par rapport au cercle des neuf points. Les polaires de α_1, α_2, α_4 étant $\beta_1\gamma_1$, $A_1\alpha_1$, BC qui se coupent en A_1, ces points sont en ligne droite. Il en est de même de β_1, β_2, β_4 et de γ_1, γ_2, γ_4.

Donc, en résumé, on a : quatre droites contenant chacune six points : $(MOH\alpha\beta\gamma)$, $(A\alpha\beta_1\gamma_1A_1\alpha_2)$, $(B\beta\alpha_1\gamma_1B_1\beta_2)$, $(C\gamma\alpha_1\beta_1C_1\gamma_2)$; une droite en contenant cinq $(PP_1A_1B_1C_1)$; neuf droites contenant chacune trois points : $(\alpha\beta_2\gamma_2)$, $(\beta\alpha_2\gamma_2)$, $(\gamma\alpha_2\beta_2)$, $(\alpha_1\alpha_2\alpha_4)$, $(\beta_1\beta_2\beta_4)$, $(\gamma_1\gamma_2\gamma_4)$, $(A\alpha_1\alpha_3)$, $(B\beta_1\beta_3)$, $(C\gamma_1\gamma_3)$: ces trois dernières droites sont de plus perpendiculaires à MH; — trois groupes de trois droites passant par un même point : $(a\alpha_1)$, $(b\beta_1)$, $(c\gamma_1)$ par le point P; $(a_1\alpha_1)$, $(b_1\beta_1)$, $(c_1\gamma_1)$ par le point P_1; $(\alpha_1\alpha_2)$, $(\beta_1\beta_2)$, $(\gamma_1\gamma_2)$ par le pôle de PP_1;

— enfin deux triangles : $\alpha_4\beta_4\gamma_4$, conjugué de ABC par rapport au cercle (O), et $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ conjugué de ce cercle.

Note. — Solutions analogues par le P. Autefage et par MM. Le Bel et Talayrach.