NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JAUFROID

MANSION

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 62-79

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__62_1>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 648

(voir 2e série, t. II, p 189);

PAR MM. JAUFROID ET MANSION.

On donne l'équation d'une courbe en coordonnées polaires, $f(\rho, \omega) = 0$. *Considérant* ω *comme une constante, on prend la dérivée de cette équation par rapport à* ρ; *on élimine* ρ *entre cette équation et l'équation donnée. Que représente, relativement à la courbe* $f(\rho, \omega) = 0$, *l'équation résultant de cette élimination? Examiner en particulier le cas où l'on donne l'équation polaire d'une circonférence ou l'équation polaire d'une conique rapportée à l'un de ses foyers; expliquer les circonstances que l'on rencontre dans ces cas particuliers et former des équations d'ordre supérieur au second qui présentent des circonstances analogues.*

(MANNHEIM.)

La sous-normale d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires a pour expression $-\dfrac{f'_\omega}{f'_\rho}$, en désignant par f'_ρ et f'_ω respectivement les dérivées de $f(\rho, \omega)$ par rapport à ρ et à ω. Il suit de là que les points pour lesquels on a $f'_\rho = 0$ sont ceux dont la sous-normale est infinie, à moins que les valeurs qui satisfont à la fois aux équations

$$f(\rho, \omega) = 0, \quad f'_\rho = 0,$$

ne rendent nulle f'_ω, ce que nous ne supposerons pas d'abord. Si le point de la courbe (ρ, ω) ainsi déterminé est à une distance finie, l'équation $F(\omega) = 0$ qui résulte de l'élimination de ρ représentera la tangente à la courbe menée par le pôle. Si ce point est à une distance infinie, l'équation $F(\omega) = 0$ représentera une parallèle à une asymptote menée par l'origine.

Si l'on avait en même temps $f'_\rho = 0$ et $f'_\omega = 0$, le point considéré serait un point multiple et la droite qui va du pôle à ce point serait donnée par l'une des solutions de l'équation $F(\omega) = 0$.

En résumé, l'équation

$$F(\omega) = 0$$

représente les parallèles aux asymptotes menées par l'origine, les rayons vecteurs tangents à la courbe et ceux qui passent par les points multiples.

Cercle. — Soit le cercle qui a pour rayon R et dont le centre a pour coordonnées polaires d et α. Son équation sera

$$R^2 - \rho^2 - d^2 - 2\rho d \cos(\alpha - \omega) = 0,$$

ce qui donne

$$f'_\rho = -2\rho + 2d\cos(\alpha - \omega), \quad F(\omega) = R - d\sin(\alpha - \omega);$$

l'équation $F(\omega) = 0$ donne les deux tangentes menées au cercle par le pôle, comme il est facile de s'en assurer.

Conique. — On a

$$\rho(1 + e\cos\omega) = p,$$

d'où

$$f'_\rho = 1 + e\cos\omega = F(\omega).$$

On a donc

$$\cos\omega = -\frac{1}{c},$$

ce qui donne deux droites imaginaires pour l'ellipse, deux parallèles aux asymptotes pour l'hyperbole et l'axe dans le cas de la parabole.

L'élimination est toute faite chaque fois que l'équation de la courbe a la forme

$$\rho\varphi(\omega) + \chi(\omega) = 0.$$

Par exemple, la strophoïde

$$\rho\cos\omega - a\cos^2\omega = 0,$$

et la cissoïde de Dioclès

$$\rho\cos\omega - a\sin^2\omega = 0$$

donnent immédiatement

$$\cos\omega = 0 \ (^*).$$

Question 581 (Roberts)

(voir tome XX, page 139);

PAR M. EUGÈNE BELTRAMI.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les n racines de l'équation

$$x^n - 1 = 0;$$

on aura identiquement, quel que soit z,

$$(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n) = z^n - 1,$$

et, par suite,

$$[z-(\alpha_1-\alpha_r)][z-(\alpha_2-\alpha_r)]\ldots[z-(\alpha_n-\alpha_r)] = (z+\alpha_r)^n - 1,$$

(*) La même question a été résolue par MM. Léon Dyrion et de Marsilly.

équation dont le premier membre contient le facteur z. Ainsi l'équation

$$(2)\quad \frac{(z+\alpha_1)^n-1}{z}\cdot\frac{(z+\alpha_2)^n-1}{z}\cdots\frac{(z+\alpha_n)^n-1}{z}=0,$$

du degré $n(n-1)$ en z, aura pour racines les $n(n-1)$ différences simples $\alpha_r-\alpha_s$ entre les racines de l'équation (1), et comme ces différences sont deux à deux égales et de signes contraires, le développement du premier membre de l'équation (2) ne contiendra que des puissances paires de z.

Maintenant, si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots m}=(n)_m,$$

on a, à cause de $\alpha_r^n=1$,

$$\frac{(z+\alpha_r)^n-1}{z}=z^{n-1}+(n)_1 z^{n-2}\alpha_r+(n)_2 z^{n-3}\alpha_r^2+\ldots+(n)_{n-1}\alpha_r^{n-1}.$$

Donc si l'on pose

$$y=z^{n-1}+(n)_1 z^{n-2}x+(n)_2 z^{n-3}x^2+\ldots+(n)_{n-1}x^{n-1},$$

le premier membre de l'équation (1) équivaudra au produit des n valeurs de y correspondant aux valeurs α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ de x, et l'équation (2) elle-même pourra s'obtenir en éliminant x entre les deux équations

$$(3)\quad \begin{cases} z^{n-1}+(n)_1 z^{n-2}x+(n)_2 z^{n-3}x^2+\ldots+(n)_{n-1}x^{n-1}=0,\\ x^n-1=0.\end{cases}$$

Pour opérer cette élimination, multiplions successivement par x, $x^2,\ldots$, x^{n-1} la première des deux équations précédentes, en observant que d'après la seconde de ces équations on a

$$x^{n+i}=x^i.$$

Ordonnant par rapport à x les $n-1$ équations résultantes, on obtient le système suivant :

$$\begin{array}{l}
(n)_{n-1} + z^{n-1}x + (n)_1 z^{n-2}x^2 + \ldots + (n)_{n-2}z\, x^{n-1} = 0,\\
(n)_{n-2}z + (n)_{n-1}x + z^{n-1}x^2 + \ldots + (n)_{n-3}z^2x^{n-1} = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n)_1 z^{n-2} + (n)_2 z^{n-3}x + (n)_3 z^{n-4}x^2 + \ldots + z^{n-1}x^{n-1} = 0;
\end{array}$$

et éliminant linéairement les $n-1$ quantités $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ au moyen de ces $n-1$ équations et de l'équation (3), on a enfin

$$(4)\quad \begin{vmatrix}
z^{n-1} & (n)_1 z^{n-2} & (n)_2 z^{n-3} \ldots (n)_{n-1}\\
(n)_{n-1} & z^{n-1} & (n)_1 z^{n-2} \ldots (n)_{n-2}z\\
(n)_{n-2}z & (n)_{n-1} & z^{n-1} \ldots (n)_{n-3}z^2\\
\ldots & \ldots & \ldots\\
(n)_1 z^{n-2} & (n)_2 z^{n-3} & (n)_3 z^{n-4} \ldots \quad z^{n-1}
\end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de ce déterminant ne peut contenir, d'après ce qui a été remarqué plus haut, que des puissances paires de z; si donc on pose $z^2 = t$, on obtient une équation du degré $\frac{n(n-1)}{2}$ en z, dont les racines sont les carrés des différences entre les n racines de l'équation (1).

C'est ce résultat qui constitue le théorème de M. Roberts, que je me proposais de démontrer.

Questions 668 *et* 676 (Faure et Aoust)

(voir 2e série, t. II, p. 421 et 480);

Par M. H. LEMONNIER,
Professeur au lycée Saint-Louis.

Les formules signalées par M. l'abbé Aoust résultent de deux formules plus générales qu'on trouve dans le

Traité des Sections coniques du Rév. Salmon (p. 142, § 161).

Si x et y sont les coordonnées d'un point dans un système d'axes faisant entre eux l'angle θ; que X et Y en soient les coordonnées dans un système d'axes de même origine faisant l'angle θ', et qu'on ait

$$A x^2 + Bxy + Cy^2 = A'X^2 + B'XY + C'Y^2,$$

on aura

$$(1) \qquad \frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{A' + C' - B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'},$$

$$(2) \qquad \frac{B'^2 - 4AC}{\sin^2\theta} = \frac{B'^2 - 4A'C'}{\sin^2\theta'}.$$

Ces formules, dont on doit au professeur Boole une démonstration très-simple et immédiate, peuvent servir à la résolution de beaucoup de questions sur les coniques. J'ai fait à cet égard, avec extension aux surfaces du second degré, un travail assez étendu qui paraîtra, je l'espère, avant peu dans ce journal.

Pour le moment, je vais me borner à déduire de ces formules celles qui sont dues à M. l'abbé Aoust.

Considérons une conique à centre qui soit rapportée à deux axes coordonnés faisant l'angle θ et ayant l'origine au centre. Désignons par r_1 et r_2 les rayons dirigés suivant les deux axes des coordonnées, et par r un autre rayon aboutissant au point (x, y) et faisant avec l'axe des x un angle ω.

Soient X et Y les coordonnées du même point quand on prend les axes de la conique pour axes coordonnés.

L'équation de la conique étant, dans le premier système,

$$A x^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0,$$

et, dans le second,

$$A'X^2 + C'Y^2 + F = 0,$$

on aura

$$Ar_1^2 + F = 0, \quad Cr_2^2 + F = 0,$$

et comme $x = \frac{r\sin(\theta - \omega)}{\sin\theta}$, $y = \frac{r\sin\omega}{\sin\theta}$,

$$r^2[A\sin^2(\theta - \omega) + B\sin\omega\sin(\theta - \omega) + C\sin^2\omega] + F\sin^2\theta = 0,$$

d'où

$$A = -\frac{F}{r_1^2}, \quad C = -\frac{F}{r_2^2},$$

$$B = \frac{\frac{\sin^2(\theta - \omega)}{r_1^2} + \frac{\sin^2\omega}{r_2^2} - \frac{\sin^2\theta}{r^2}}{\sin\omega\sin(\theta - \omega)}$$

$$= \frac{\sin(\theta - \omega)}{r_1^2\sin\omega} + \frac{\sin\omega}{r_2^2\sin(\theta - \omega)} - \frac{\sin^2\theta}{r^2\sin\omega\sin(\theta - \omega)}.$$

D'ailleurs,

$$A' = -\frac{F}{a^2}, \quad C' = -\frac{F}{b^2}.$$

Les deux relations indiquées deviennent, en les appliquant ici :

$$-\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} - \frac{\sin(\theta - \omega)\cos\theta}{r_1^2\sin\omega} - \frac{\sin\omega\cos\theta}{r_2^2\sin(\theta - \omega)} + \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{r^2\sin\omega\sin(\theta - \omega)}$$

$$= -\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sin^2\theta,$$

$$\left[\frac{\sin(\theta - \omega)}{r_1^2\sin\omega} + \frac{\sin\omega}{r_2^2\sin(\theta - \omega)} - \frac{\sin^2\theta}{r^2\sin\omega\sin(\theta - \omega)}\right]^2 - \frac{4}{r_1^2 r_2^2}$$

$$= -\frac{4}{a^2 b^2}\sin^2\theta.$$

La première se transforme en

$$\frac{1}{r_1^2}\,\frac{\sin\omega + \sin(\theta-\omega)\cos\theta}{\sin\omega} + \frac{1}{r_2^2}\,\frac{\sin(\theta-\omega) + \sin\omega\cos\theta}{\sin(\theta-\omega)} - \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{r^2\sin\omega\sin(\theta-\omega)}$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sin^2\theta,$$

ou

$$\frac{1}{r_1^2}\,\frac{\sin\theta\cos(\theta-\omega)}{\sin\omega} + \frac{1}{r_2^2}\,\frac{\sin\theta\cos\omega}{\sin(\theta-\omega)} - \frac{\sin^2\theta\cos\theta}{r^2\sin\omega\sin(\theta-\omega)}$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sin^2\theta,$$

ou

$$\frac{\cos(\theta-\omega)}{\sin\omega}\cdot\frac{1}{r_1^2} + \frac{\cos\omega}{\sin(\theta-\omega)}\,\frac{1}{r_2^2} - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\omega\sin(\theta-\omega)}\,\frac{1}{r^2}$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sin\theta,$$

ou

$$\sin(\theta-\omega)\cos(\theta-\omega)\,.\,\frac{1}{r_1^2} + \cos\omega\sin\omega\,.\,\frac{1}{r_2^2} - \sin\theta\cos\theta\,.\,\frac{1}{r^2}$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sin\theta\sin\omega\sin(\theta-\omega);$$

c'est

$$\frac{\sin 2(\theta-\omega)}{r_1^2} + \frac{\sin 2\omega}{r_2^2} - \frac{\sin 2\theta}{r^2} = 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sin\theta\sin\omega\sin(\theta-\omega),$$

ce qui revient à

$$\frac{\sin 2(rr_2)}{r_1^2} + \frac{\sin 2(r_1 r)}{r_2^2} + \frac{\sin 2(r_2 r_1)}{r^2}$$

$$= 2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sin(r_1 r_2)\sin(r_2 r)\sin(rr_1),$$

première formule de M. l'abbé Aoust.

La seconde formule se transforme successivement en

$$\frac{\sin^2(\theta-\omega)}{\sin^2\omega}\,\frac{1}{r_1^4}+\frac{\sin^3\omega}{\sin^2(\theta-\omega)}\,\frac{1}{r_2^4}+\frac{\sin^4\theta}{\sin^2\omega\sin^2(\theta-\omega)}\,\frac{1}{r^4}$$
$$-2\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\omega}\,\frac{1}{r_1^2r^2}-2\frac{\sin^2\theta}{\sin^2(\theta-\omega)}\,\frac{1}{r_2^2r^2}-\frac{2}{r_1^2r_2^2}$$
$$=-\frac{4}{a^2b^2}\sin^2\theta,$$

$$\frac{2\sin^2\theta\sin^2(\theta-\omega)}{r_1^2r^2}+\frac{2\sin^2\omega\sin^2(\theta-\omega)}{r_2^2r_1^2}+\frac{2\sin^2\theta\sin^2\omega}{r^2r_2^2}$$
$$-\frac{\sin^4(\theta-\omega)}{r_1^4}-\frac{\sin^4\omega}{r_2^4}-\frac{\sin^4\theta}{r^4}$$
$$=\frac{4}{a^2b^2}\sin^2\theta\sin^2\omega\sin^2(\theta-\omega),$$

ce qui fait

$$\frac{2\sin^2(r_1r_2)\sin^2(r_2r)}{r_1^2r^2}+\frac{2\sin^2(r_2r)\sin^2(rr_1)}{r_2^2r_1^2}+\frac{2\sin^2(rr_1)\sin^2(r_1r_2)}{r^2r_2^2}$$
$$-\frac{\sin^4(rr_2)}{r_1^4}-\frac{\sin^4(r_1r)}{r_2^4}-\frac{\sin^4(r_2r_1)}{r^4}$$
$$=\frac{4}{a^2b^2}\sin^2(r_1r_2)\sin^2(r_2r)\sin^2(rr_1).$$

C'est la seconde formule de M. l'abbé Aoust.

Observations sur les questions précédentes;

PAR M. H. FAURE.

M. l'abbé Aoust a donné, dans les *Comptes rendus de l'Académie*, divers théorèmes relatifs à la courbure des surfaces. Il en déduit, comme conséquence, le théorème 676 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, qui revient à la question 668, que j'ai moi-même proposée dans ce journal. Ces théorèmes ont déjà été énoncés par moi, mais sous une forme un peu différente; voici en effet comment j'y étais parvenu.

En employant les notations de l'extrait de mon Mémoire sur les coordonnées trilinéaires, la somme des carrés des demi-axes principaux d'une conique inscrite dans un triangle est donnée par la relation

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 = \frac{R}{S}(\alpha^2 \sin 2A + \beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C).$$

Si l'on désigne par a', b', c' les demi-diamètres de la conique parallèle aux côtés du triangle, on a

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \alpha a' = \beta b' = \gamma c';$$

comme d'ailleurs

$$S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C, \qquad \text{on aura} \qquad \frac{1}{\mathcal{A}^2} + \frac{1}{\mathcal{B}^2} = \frac{1}{2 \sin A \sin B \sin C}\left(\frac{\sin 2A}{a'^2} + \frac{\sin 2B}{b'^2} + \frac{\sin 2C}{c'^2}\right).$$

C'est le théorème que j'avais énoncé.

On a aussi la relation

$$\mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2 = \frac{(a\alpha + b\beta + c\gamma)(-a\alpha + b\beta + c\gamma)(a\alpha - b\beta + c\gamma)(a\alpha + b\beta - c\gamma)}{16 S^2}$$

pour exprimer le produit des carrés des demi-axes principaux d'une conique inscrite dans un triangle. Éliminant dans cette formule α, β, γ et S, comme on l'a fait ci-dessus, on trouve immédiatement

$$\frac{1}{4\mathcal{A}^2 \mathcal{B}^2} = \frac{\left(\frac{\sin A}{a'} + \frac{\sin B}{b'} + \frac{\sin C}{c'}\right)\left(-\frac{\sin A}{a'} + \frac{\sin B}{b'} + \frac{\sin C}{c'}\right)\left(\frac{\sin A}{a'} - \frac{\sin B}{b'} + \frac{\sin C}{c'}\right)\left(\frac{\sin A}{a'} + \frac{\sin B}{b'} - \frac{\sin C}{c'}\right)}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}.$$

Question 681

(voir 2e série, t. II, p. 523);

PAR M. CH. DE SAINT-PRIX,
Élève au lycée de Lyon.

En nommant A, B, C *les trois angles d'un triangle rectiligne quelconque, on a*

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} \sin A.\sin B.\sin(A-B) \\ +\sin B.\sin C.\sin(B-C) \\ +\sin C.\sin A.\sin(C-A) \\ +\sin(A-B).\sin(B-C).\sin(C-A) \end{array}\right\} = 0,$$

et

$$(2)\quad \begin{vmatrix} \cos A & \cos B & \cos C \\ \text{séc}\,A & \text{séc}\,B & \text{séc}\,C \\ \text{coséc}\,A & \text{coséc}\,B & \text{coséc}\,C \end{vmatrix} = 0.$$

Je vais démontrer ces égalités pour trois angles a, b, c quelconques.

1° On connaît les formules

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

à l'aide desquelles la relation (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\left(e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}\right)\left(e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}}\right)\left(e^{(a-b)\sqrt{-1}} - e^{-(a-b)\sqrt{-1}}\right) \\ +&\left(e^{b\sqrt{-1}} - e^{-b\sqrt{-1}}\right)\left(e^{c\sqrt{-1}} - e^{-c\sqrt{-1}}\right)\left(e^{(b-c)\sqrt{-1}} - e^{-(b-c)\sqrt{-1}}\right) \\ +&\left(e^{c\sqrt{-1}} - e^{-c\sqrt{-1}}\right)\left(e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}\right)\left(e^{(c-a)\sqrt{-1}} - e^{-(c-a)\sqrt{-1}}\right) \\ +&\left(e^{(a-b)\sqrt{-1}} - e^{-(a-b)\sqrt{-1}}\right)\left(e^{(b-c)\sqrt{-1}} - e^{-(b-c)\sqrt{-1}}\right) \\ \times&\left(e^{(c-a)\sqrt{-1}} - e^{-(c-a)\sqrt{-1}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Développant et recomposant les termes deux à deux, on a

$$
\begin{aligned}
&\sin 2a + \sin 2(a - b) + \sin 2b \\
&- \sin 2b + \sin 2(b - c) + \sin 2c \\
&- \sin 2c + \sin 2(c - a) + \sin 2a \\
&- \sin 2(a - b) - \sin 2(b - c) + \sin 2(a - c) = 0,
\end{aligned}
$$

expression dans laquelle les termes se détruisent deux à deux. C. Q. F. D.

2° Le déterminant développé donne

$$
\begin{aligned}
&\cos a\,\text{séc}\,b\,\text{coséc}\,c - \cos a\,\text{coséc}\,b\,\text{séc}\,c + \text{séc}\,a\,\text{coséc}\,b\cos c \\
&- \text{séc}\,a\cos b\,\text{coséc}\,c + \text{coséc}\,a\cos b\,\text{séc}\,c - \cos a\,\text{séc}\,b\cos c = 0,
\end{aligned}
$$

ou mieux

$$
\begin{aligned}
&\frac{\cos a}{\sin c\cos b} - \frac{\cos a}{\sin b\cos c} + \frac{\cos b}{\sin a\cos c} - \frac{\cos b}{\sin c\cos a} \\
&\qquad + \frac{\cos c}{\sin b\cos a} - \frac{\cos c}{\sin a\cos b} = 0,
\end{aligned}
$$

ou

$$\cos a\sin(b - c) + \cos b\sin(c - a) + \cos c\sin(a - b) = 0,$$

égalité qui se vérifie par le développement des sinus.

Note. — M. de Virieu a démontré la première égalité pour des angles quelconques et la seconde pour des angles dont la somme est égale à $(2n+1)\pi$. M. Alexandre Rezzonico, de Morat (Lombardie), n'a démontré les deux égalités que dans le cas où $A+B+C=180°$; MM. Cagny, de Vigneral et H. Picquet pour des angles quelconques.

Nous avons reçu également des solutions de MM. Cremona et Réalis.

M. Réalis observe que la relation (1) a lieu pour les arcs, ce qui doit être, car si l'on suppose que les angles soient remplacés par les arcs qui les mesurent, et, qu'après avoir divisé par une puissance convenable du rayon, on fasse ce rayon infini, on aura précisément la même relation entre les arcs a, b, c, $a-b$, etc. P.

Question 672

(voir 2e série, t. II, p. 422);

PAR MM. J. COURTIN ET C. GODARD,
Élèves de Sainte-Barbe (classe de M. Moutard).

Étant donnés deux ellipsoïdes concentriques semblables et semblablement placés, on mène de chaque point de la surface du plus grand des plans tangents à l'autre. Démontrer que l'enveloppe des plans des lignes de contact ainsi déterminées est un ellipsoïde semblable aux deux premiers.

Cette proposition peut s'étendre au cas de toutes les surfaces du second degré, même aux surfaces dénuées de centre dont les axes coïncident. La démonstration que nous allons en donner s'applique aux surfaces à centre : on la modifierait facilement pour celles qui n'en ont pas.

Soit

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H$$

l'équation d'une surface du second degré douée de centre;

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = \lambda H,$$

celle d'une autre surface concentrique à la première, semblable et semblablement placée. On sait que l'équation du plan de la courbe de contact d'un cône issu d'un point (x, y, z) et circonscrit à une surface du second degré dont l'équation est $F(x, y, z) = 0$, se présente sous la forme

$$XF'_x + YF'_y + ZF'_z + TF'_t = 0,$$

si l'on suppose préalablement l'équation rendue homogène par l'introduction de la lettre T dont la valeur $= 1$.

Or, ce plan est celui dont il est question dans l'énoncé. Donc, si l'on nomme x', y', z' les coordonnées d'un point de la première surface et qui par suite satisfont à la relation

$$Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 = H,$$

l'équation du plan polaire de ce point par rapport à la seconde surface sera

$$Px'x + P'y'y + P''z'z = \lambda H.$$

Or, la relation

$$Px'^2 + P'y'^2 + P''z'^2 = H,$$

si nous posons

$$Px' = l, \quad P'y' = m, \quad P''z' = n, \quad \lambda H = p,$$

peut s'écrire

$$\frac{l^2}{P} + \frac{m^2}{P'} + \frac{n^2}{P''} = \frac{\lambda p^2}{H} \quad \text{ou bien} \quad \frac{p^2}{\frac{H}{\lambda}}.$$

Cette relation exprime que le plan

$$lx + my + nz = p$$

est tangent à la surface

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = \frac{H}{\lambda},$$

surface semblable aux précédentes et semblablement placée.

Réciproquement, si on prend les pôles de tous les plans tangents à une surface du second degré, par rapport à une surface semblablement placée et concentrique, ces pôles engendrent une surface du second degré.

De là quelques cas particuliers remarquables, mais trop connus pour qu'il soit utile d'entrer dans de plus amples détails.

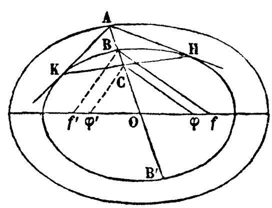
Note. — Question résolue à peu près de la même manière par MM. Mirza-Nizam, Abraham Schnée, Ch. Dupain, Grouard, élève de l'École Polytechnique, Muzeau, lieutenant d'artillerie, Grassat et Tivolier, Léon Dyrion.

Même question (solution géométrique);

PAR MM. DEBATISSE ET L. NOUETTE,
Élèves du lycée Charlemagne (classe de M. Hauser).

Je fais une section par un plan quelconque passant par le centre commun aux deux surfaces données. J'obtiens deux ellipses semblables et semblablement placées.

Soient A un point de la plus grande et KH la corde des



contacts des tangentes à la seconde ellipse menées par A. Je joins AO : cette droite coupe la petite ellipse en B et B′ et la corde des contacts KH en C. Soient f et f' les foyers de la deuxième ellipse : je joins B, f et par C je mène une parallèle à Bf rencontrant l'axe focal en φ. On a

$$\frac{\mathrm{O}\varphi}{\mathrm{O}f} = \frac{\mathrm{C}\varphi}{\mathrm{B}f} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}}.$$

Or, les points A et C, B et B′ étant conjugués harmoniques, on a

$$\overline{\mathrm{OB}}^2 = \mathrm{OC}.\mathrm{OA},$$

donc

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OB}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OA}} = \frac{a'}{a},$$

si a' et a sont les demi grands axes des deux ellipses. Donc Oφ est constant, et par conséquent le point φ; et l'on a

$$C\varphi = \frac{a'}{a} Bf.$$

De même on a, en menant $C\varphi'$ parallèle à Bf',

$$C\varphi' = \frac{a'}{a} Bf'.$$

On voit aussi que le point φ' est fixe; donc

$$C\varphi + C\varphi' = \frac{a'}{a}(Bf + Bf')$$

ou

$$C\varphi + C\varphi' = \frac{2a'^2}{a};$$

donc le lieu des points C, qui n'est autre chose que l'enveloppe des cordes de contact des tangentes menées par tous les points de la première ellipse à la seconde, est une ellipse semblable aux deux premières. La surface cherchée et les deux surfaces proposées sont donc telles que, coupées par des plans quelconques passant au centre commun des deux dernières, elles donnent des ellipses semblables et semblablement placées. Elles sont donc elles-mêmes semblables et semblablement placées, et les axes de la surface cherchée sont

$$\frac{a'^2}{a}, \quad \frac{b'^2}{b} \quad \text{et} \quad \frac{c'^2}{c}.$$

Question 650 (*solution géométrique*)

(voir 2e série, t. II, p. 189 et 502);

PAR M. PAUL MANSION, DE MARCHIN.

On donne un point P *dans le plan d'une conique; on sait que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de* *ce point sur toutes les tangentes de la conique a un point double en* P. *Démontrer que les centres de courbure correspondant à ce point double sont à égale distance du diamètre qui contient le point* P. (MANNHEIM.)

Nous démontrerons d'abord ce théorème général : *Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point* P *extérieur à une courbe sur toutes les tangentes à cette courbe, a, en ce point, qui est un point multiple du lieu, ses centres de courbure au milieu des tangentes menées de ce point* P *à la courbe.*

Soient MA la tangente en un point M de la courbe donnée, PA la perpendiculaire abaissée du point P sur cette tangente. Soient Pm, Pm', Pm'', . . ., les tangentes menées de P à la courbe donnée. On peut considérer l'une de ces tangentes, Pm par exemple, comme celle des positions de AM qui la première passe par P. On sait que le cercle décrit sur PM comme diamètre est tangent au lieu du point A. D'ailleurs, ce cercle coupe le lieu au point P. Lorsque la position AM de la tangente se rapproche de Pm, le point de tangence A, et le point d'intersection P du lieu et du cercle, se rapprochent également, et lorsque enfin la tangente est devenue Pm, les points A et P se confondent. Il en résulte que le cercle décrit sur Pm est le cercle osculateur du lieu au point P. Le théorème énoncé est donc démontré.

On en déduit comme corollaire le théorème proposé : soient Pm, Pm' les deux tangentes menées du point P à la conique, n et n' leurs milieux. Ces deux points sont à égale distance du diamètre qui passe par P; en effet, nn' est parallèle à mm' qui est divisée en deux parties égales par le diamètre en question. Il en résulte le théorème.

Question 674 (*solution et généralisation*)

(voir 2e série, t. II, p. 479);

PAR M. ALEXANDRE BARRÈRE,
Élève du lycée de Lyon.

Il n'est point nécessaire, pour que la propriété annoncée ait lieu, que le triangle soit rectangle, et que le point γ soit le milieu du côté AB. On peut rectifier l'énoncé de la manière suivante :

Soient ABC *un triangle quelconque et* Cr *la perpendiculaire abaissée du sommet* C *sur le côté* AB. *Par les points* C, r, *et un point* γ *pris à volonté sur le côté* AB, *faisons passer une circonférence de cercle : soit* Cx *la tangente à cette courbe menée sur le point* C; *le produit des perpendiculaires abaissées d'un point* P *de cette circonférence sur les droites* Cγ, Cr *est égal au produit des perpendiculaires abaissées de ce même point sur le côté* BC *et sur la tangente* Cx.

La proposition ainsi énoncée n'est qu'un cas particulier d'un théorème bien connu sur le quadrilatère inscrit dans une conique, puisque la tangente peut être considérée comme le quatrième côté d'un quadrilatère inscrit dans le cercle, quadrilatère dont les autres côtés sont Cr, Cγ et $r\gamma$.

Note du Rédacteur. — L'observation de M. Barrère est fort juste, et la propriété en question n'appartient pas plus au cercle des neuf points et au triangle rectangle qu'à tout autre cercle qui passerait par le sommet C d'un triangle quelconque.

MM. A. du Mesnil, élève de Mathématiques spéciales au collége de Sorrèze (classe de M. Dumont); Dupain, professeur à Angoulême; Joseph Dupont, élève de troisième (lettres) au lycée Louis-le-Grand (classe de M. Burat); Auguste Grouard, élève de l'École Polytechnique; Morel, élève de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand; Mirza-Nizam et Mirza-Djehan, élèves de Mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis (classe de M. Amiot); Ernest Potier, élève du collége Chaptal; Beau, élève du lycée Saint-Louis, résolvent la même question par la consideration des triangles semblables. Sans étendre la question, presque tous remarquent qu'elle est un cas particulier d'un théorème plus général. P.