NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

Études sur les singularités des surfaces algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 5-21

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__5_0>

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

ÉTUDES
SUR LES SINGULARITÉS DES SURFACES ALGÉBRIQUES;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Plans tangents doubles et triples (*).

1. Un plan peut être assujetti à toucher une fois, deux fois ou trois fois une surface algébrique S^n du degré n, et, en outre, dans les deux premiers cas, à deux autres conditions ou à une seule, respectivement. Ces plans sont les *plans tangents simples*, les *plans tangents doubles* et les *plans tangents triples* de la surface.

2. On conclut de ce qui vient d'être dit, que les trois nombres ci-après sont finis et déterminés, savoir : 1° le nombre des plans tangents simples qui passent par une

(*) M. G. Salmon s'est occupe de cette question dans un Memoire tres-interessant, lu en 1855 devant l'Academie royale d'Irlande, et imprime dans le XXIII^e volume des *Transactions* de cette Societe (1857) sous le titre : *On the degree of the surface reciprocal to a given one.*

Mais, en ce qui concerne notamment les plans tangents triples, apres avoir indistinctement deduit la formule qui en exprime le nombre, comme une consequence de certaines relations existantes entre les autres droite donnée; 2° le nombre des plans tangents doubles qui passent par un point donné; 3° le nombre des plans tangents triples; et nous aurons à déterminer ces trois nombres, entre autres questions à résoudre.

3. Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que la surface donnée S^n n'a que les singularités qui lui sont propres, c'est-à-dire qu'elle est des plus générales dans son degré.

4. *Plans tangents simples.* — La théorie en est bien connue; il suffit donc de rappeler quelques-unes de leurs propriétés, qui seront utiles ci-après.

Un plan tangent quelconque coupe la surface suivant une courbe plane C^n qui a un point double au point de contact a. Les tangentes en a, aux deux branches de la C^n qui y passent, sont osculatrices de la surface et asymptotes de son *indicatrice* en ce point. Elles partagent la surface, autour du point a, en quatre régions opposées deux à deux par le sommet. La courbure de la surface, qui est nulle sur les tangentes dont il s'agit, change de signe quand on passe

---

singularités de la surface, le savant professeur s'exprime ainsi, p. 478 : « It would be desirable to test these results by obtaining the number » of triple tangent planes to a surface of the n^{th} degree by a different » process. I have endeavoured to determine this number by the same me- » thod by which we determined the nature of the curve of contact of » double tangent planes to the surface... I have not succeeded, however, » in deriving the theory of triple tangent planes in this way. »

Dans une *Note*, en date du 12 février 1857 qui termine son Mémoire, M. G. Salmon reproduit, sans démonstration, une formule alors récente, due au D[r] Schläfli, mais qui fait connaître seulement la somme de deux nombres, dont l'un est le sextuple de celui des plans tangents triples. Enfin, dans son Traité récent sur la Géométrie à trois dimensions, le savant auteur reproduit purement et simplement sa première solution.

On voit donc, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans d'autres détails, que la question n'est pas épuisée.

Golfe du Mexique, octobre 1862.

d'une région à la région voisine. Ainsi, quand ces tangentes sont imaginaires, la surface a une courbure de même signe dans tous les azimuts autour de sa normale en a. Quand elles sont réelles et distinctes, la courbure, nulle dans quatre azimuts particuliers, change de signe alternativement en passant de l'un à l'autre. Enfin, si elles sont coïncidentes, la courbure ne change pas de signe; mais il y a un azimut où elle est nulle. Le point a est alors un point de rebroussement sur la courbe C^n, et, comme la tangente at en ce point représente deux tangentes infiniment voisines, il s'ensuit que le plan tangent qui les contient toutes deux est tangent à S^n suivant deux de ses éléments consécutifs. C'est une sorte de plan tangent double, parfaitement analogue aux tangentes d'inflexion des courbes planes qui sont aussi des tangentes doubles d'une espèce particulière. On lui donne indistinctement le nom de *plan d'inflexion* ou de *plan stationnaire;* nous adopterons cette dernière expression.

5. En chacun π des points de S^n où le plan tangent est stationnaire, l'indicatrice de la surface est une parabole; c'est ce qui a fait donner aux points π le nom de *points paraboliques,* et à la courbe gauche Π, qu'ils forment par leur succession, celui de *courbe parabolique de la surface.*

6. La courbe d'intersection de S^n par la surface $P^{(n-1)}$, première polaire d'un point P relative à cette surface, est la courbe du contour apparent de la surface, vue du point P. Cette courbe gauche est donc, en général, du degré $n(n-1)$; et tel est aussi le degré du cône circonscrit à S^n, qui a son sommet au point P.

7. Si le point P se meut sur une droite L, ses polaires premières forment un *faisceau* de surfaces du degré $(n-1)$. La courbe gauche $G^{\overline{n-1}^2}$, qui sert de *base* au

faisceau, est le lieu des points dont les plans polaires passent par la droite L ; c'est la *courbe polaire de* L relative à S^n. Cette courbe coupe S^n en $n(n-1)^2$ points. Tel est donc le nombre des plans tangents qu'on peut, en général, mener à une surface du degré n par une droite donnée; en d'autres termes, telle est la *classe* de la surface donnée, quand elle ne possède ni points multiples, ni courbes multiples, c'est-à-dire quand elle n'a que les singularités qui lui sont propres.

8. *Plans tangents doubles.* — Si la courbe C^n, suivant laquelle le plan tangent à S^n en un point a coupe cette surface, possède un second point double, le plan tangent est un *plan tangent double*. Il en existe plusieurs espèces qu'on peut désigner et caractériser ainsi qu'il suit, savoir :

1^re^ ESPÈCE. *Plans tangents stationnaires.* — Il en a été déjà question. La courbe C^n n'a qu'un point double; mais c'est un point de rebroussement de première espèce. Ces plans établissent en quelque sorte la transition entre les plans tangents simples et les plans tangents doubles.

2^e^ ESPÈCE. *Plans bitangents.* — Ils touchent la surface en deux points distincts, qui sont, sur la courbe C^n, des *nœuds* ou des *points isolés*.

3^e^ ESPÈCE. *Plans bitangents unistationnaires.* — Les deux points de contact sont distincts; l'un d'eux est situé sur la courbe parabolique Π. L'un des deux points doubles de la courbe C^n est un point de rebroussement de première espèce.

4^e^ ESPÈCE. *Plans tangents bistationnaires.* — Les deux points doubles de la courbe C^n sont réunis en un seul; en d'autres termes, deux branches de C^n se touchent au point de contact, suivant une droite qui a un contact du troisième ordre avec la surface. Le plan tangent est stationnaire en deux points consécutifs, situés nécessairement sur la courbe Π; il touche S^n suivant la tangente à cette courbe au point de contact, et c'est cette tangente particulière de la courbe Π qui a avec S^n un contact du troisième ordre.

Remarque. — Les plans tangents de la troisième et de la quatrième espèce établissent la transition entre les plans tangents doubles et les plans tangents triples.

5[e] ESPÈCE. *Plans bitangents bistationnaires.* — Les deux points de contact sont distincts, mais situés l'un et l'autre sur la courbe Π. La courbe C^n a deux points de rebroussement de première espèce. Ces plans sont une espèce de plans tangents quadruples.

Avant d'entrer dans les détails relatifs à ces diverses espèces de plans tangents, il convient de rappeler, à titre de *lemmes*, quelques propositions préliminaires que j'ai énoncées ailleurs (*).

9. *Lemmes.* — 1° Les surfaces polaires premières de tous les points de l'espace, relatives à une même surface S^n, forment un *système* d'ordre $(n-1)$; celles de tous les points d'un plan forment un *réseau*; celles de tous les points d'une droite forment un *faisceau*.

2° Quand deux surfaces d'un même système se touchent en un point, il y en a une infinité d'autres qui se touchent en ce point; l'une d'elles y possède un *nœud* ou *point conique*; et *le lieu des points de contact des surfaces du système est aussi le lieu de leurs points coniques*.

3° *Quand un point* P *est tel, que ses polaires premières, relatives à quatre surfaces d'un* système *quel-*

(*) *Voir* ma précédente *Étude sur les singularités des surfaces algébriques* (*Journal de M. Liouville*, t. VII, 2[e] série, p. 409).

conque, choisies de telle sorte qu'elles n'appartiennent pas ensemble à un même réseau *du système, passent par un même point* Q, *les polaires du point* P, *relatives à toutes les autres surfaces du système, passent aussi par le point* Q.

On peut dire que *le point* Q *est un point dont les plans polaires, relatifs à quatre surfaces quelconques du système, passent par un même point.*

4° *Le lieu du point* Q *est aussi le lieu des points de contact des surfaces du système. C'est une surface* $Q^{4(n-2)}$ *du degré* $4(n-2)$, quand le système se compose de surfaces du degré $(n-1)$.

On peut, d'après le (2°), désigner cette surface sous le nom de *surface nodale* de la proposée S^n, ainsi que je l'ai fait dans l'article précité.

5° *La surface nodale* $Q^{4(n-2)}$ *passe par les points de contact des plans tangents stationnaires de* S^n *et par ses nœuds ou ses courbes multiples, quand elle en possède.* Cette dernière hypothèse étant écartée, il s'ensuit que la courbe gauche $\Pi^{4n(n-2)}$, intersection de S^n et de $Q^{4(n-2)}$, est la courbe parabolique Π définie précédemment (n° 5) (*).

10. Cela posé, l'ensemble des plans tangents stationnaires forme une surface développable circonscrite à S^n le long de la courbe Π, et à laquelle on peut mener $4n(n-1)(n-2)$ plans tangents par un point quelconque P, puisque tel est le nombre des points d'intersection de la courbe Π avec la courbe du contour apparent de la surface, vue du point P.

(*) La demonstration de ces lemmes eût été intéressante; mais elle m'aurait entraîné dans des details assez longs, et j'aurais couru le risque d'abuser de la gracieuse hospitalité que M. le Rédacteur a bien voulu accorder à cet article.

11. En général, la droite osculatrice suivant laquelle un plan stationnaire touche S^n, a une direction différente de celle de la tangente en ce point à la courbe Π; quand ces deux droites se confondent, le plan tangent devient bistationnaire, et correspond aux tangentes d'*ondulation* ou de *double inflexion* des courbes planes.

12. La considération des plans tangents stationnaires donne lieu à un théorème intéressant dont voici l'énoncé :

En chaque point de la courbe gauche G^{n^2}, *base d'un faisceau de surfaces* (S^n), *il passe en général quatre surfaces, dont chacune a un plan stationnaire en ce point.*

Le théorème (dû à M. Poncelet) relatif aux quatre cônes du second degré qui passent par la base d'un faisceau de surfaces du second ordre est, comme on voit, un cas particulier du précédent, qui n'est lui-même qu'un cas particulier d'un théorème plus général que je ferai connaître ailleurs.

13. *Plans bitangents* ou *plans tangents doubles* proprement dits (2^e^ espèce). — Cherchons combien il passe de ces plans par un point quelconque P; et, pour rendre cette recherche plus claire, supposons d'abord qu'il s'agisse de trouver combien il passe, par le point P, de plans tangents à S^n, qui soient en même temps tangents à une autre surface S^n égale à la première. Les plans tangents à ces deux surfaces, qui passent par le point P, forment deux cônes qui sont l'un et l'autre du degré $n(n-1)^2$ (n° 7). Donc, parmi ces plans, il y en a $n^2(n-1)^4$ qui touchent à la fois les deux surfaces.

Si l'on amène la deuxième surface à coïncider avec la première, le nombre précédent devra être diminué de celui des plans tangents qui, passant par P, touchent cette surface en un point de la courbe G^{n^2}, suivant laquelle les deux surfaces se coupent un instant avant que la coïncidence soit établie. Car les plans tangents aux deux surfaces en chacun de ces points, plans qui étaient distincts avant la coïncidence, se confondent après en un seul, qui figure comme plan double parmi ceux qui sont compris dans le nombre $n^2(n-1)^4$, quoiqu'il ne soit plus alors qu'un simple plan tangent de la surface proposée. Or le nombre de ces plans est égal à celui des points d'intersection de la courbe G^{n^2} avec celle du contour apparent $G^{n(n-1)}$, donc à $n^2(n-1)$.

Actuellement, le nombre restant contient ensemble le triple du nombre réel des plans stationnaires et le double du nombre des plans bitangents; je veux dire que ces plans sont, par la nature même de la démonstration, comptés, les uns trois fois et les autres deux fois, dans la formule. Ainsi

$$2x + 3y = n^2(n-1)^4 - n^2(n-1).$$

Mais il a été prouvé plus haut (n° 10) que

$$y = 4n(n-1)(n-2).$$

Donc

$$x = \frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12).$$

14. Les $n(n-1)(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12)$ points de contact de ces plans bitangents sont situés sur une surface du degré $(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12)$. Car si l'on fait mouvoir le point P sur une droite, les courbes de contour apparent, qui correspondent à ses positions successives, forment, sur la surface S^n, un faisceau de courbes $G^{n(n-1)}$. Or chacune des courbes ayant

$$n(n-1)(n-2)(n^3 - n^2 + n - 12)$$

points communs avec la surface cherchée, laquelle ne passe pas généralement par les points qui forment la base du faisceau (puisque ce faisceau est quelconque, comme la droite L elle-même), il s'ensuit que la surface est du degré $(n-2)(n^3-n^2+n-12)$. Elle coupe S^n suivant une courbe gauche que nous appellerons Δ, dont le degré est $n(n-2)(n^3-n^2+n-12)$, et qui est le lieu des points de contact des plans bitangents. Les plans bitangents, circonscrits à S^n le long de la courbe Δ, enveloppent une surface développable de la classe

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12);$$

cette remarque nous sera utile plus tard.

15. Les plans tangents des troisième, quatrième et cinquième espèces, énumérées ci-dessus (8), sont nécessairement compris parmi ceux dont les points de contact se trouvent aux intersections des courbes Π et Δ. Ainsi leur nombre total est exprimé par la formule

$$N = 4n(n-2)^2(n^3-n^2+n-12),$$

et ils y sont compris dans les proportions suivantes, savoir :

Les plans bitangents unistationnaires, chacun une seule fois; nous en désignerons le nombre par x.

Les plans tangents bistationnaires, chacun deux fois. Car si a, b, c, d sont quatre points consécutifs d'une même droite, le long de laquelle le plan touche la surface, on peut le regarder comme tangent suivant $(abc)(cd)$, ou bien suivant $(ab)(bcd)$; nous désignerons par y le nombre de ces plans.

Les plans bitangents bistationnaires, chacun six fois. Car si les deux groupes de trois points consécutifs qui déterminent le double contact sont désignés par a, b, c;

d, e, f, on peut regarder chacun des plans dont il s'agit comme étant bitangent stationnaire de six manières distinctes, savoir :

$$(abc)(de);\quad (abc)(ef);\quad (abc)(fd);$$
$$(ab)(def);\quad (bc)(def);\quad (ca)(def).$$

On aura donc, en appelant z le nombre de ces plans,

$$N = x + 2y + 6z = 4n(n-2)^2(n^3 - n^2 + n - 12).$$

Les plans, dont le nombre est désigné par y, touchent S^n le long d'une droite qui a un contact du troisième ordre avec la surface. Or, M. G. Salmon a démontré, dans le tome IV du *Journal mathématique de Cambridge*, que les points de S^n, où une droite a un tel contact avec la surface, sont situés sur une surface du degré $11n - 24$. Cette surface coupe S^n suivant une courbe gauche Γ, du degré $n(11n - 24)$, qui a par conséquent

$$4n(n-2)(11n-24)$$

points communs avec la courbe Π. Mais il est aisé de voir que ces courbes se touchent partout où elles se rencontrent, et qu'il faut ne prendre, pour y, que la moitié du nombre précédent. Car le plan bistationnaire ne peut toucher S^n suivant deux droites coïncidentes ayant un contact du troisième ordre avec la surface, que si cette droite (double) est une tangente de la courbe Π. Les deux points infiniment voisins de cette courbe jouissent donc alors de la propriété que, par chacun d'eux, il passe une droite biosculatrice de la surface, c'est-à-dire qu'ils appartiennent aussi à la courbe Γ. On a donc

$$2y = 4n(n-2)(11n-24),$$

d'où

$$x + 6z = N - 2y = 4n(n-2)(n-3)(n^3 + 3n - 16),$$

et, comme S^n ne possède qu'accidentellement des plans tangents de l'espèce z, on peut écrire, en général,

$$x = 4n(n-2)(n-3)(n^3+3n-16).$$

16. *Plans tangents triples.* — Si la courbe C^n, suivant laquelle le plan tangent en a coupe S^n, possède deux autres points doubles d, b, le plan touche la surface en ces trois points; c'est un *plan tangent triple*. Nous en connaissons déjà trois espèces, classées parmi les plans tangents doubles. Il en existe deux autres, qui se divisent chacune en plusieurs variétés, savoir :

1re *espèce.* — Les plans tangents triples proprement dits, ou *plans tritangents,* dont les trois points de contact sont distincts;

2e *espèce.* — Les plans ayant un triple contact avec S^n en un même point.

17. La première espèce comprend quatre variétés, qui sont :

1° Les plans *tritangents ordinaires*, dont les trois points de contact (qui appartiennent à la courbe Δ et qui en sont des points doubles) sont, sur la courbe plane C^n, des nœuds ou des points isolés;

2° Les plans *tritangents unistationnaires,* dont l'un des trois points de contact, situé à la fois sur les courbes Π et Δ, est un point de rebroussement de la courbe C^n;

3° Les plans *tritangents bistationnaires,* dont deux points de contact sont des points de rebroussement sur la courbe C^n;

4° Enfin, les plans *tritangents tristationnaires,* dont les trois points de contact sont des points de rebroussement sur la courbe C^n.

18. Le plan tangent appartient à la deuxième espèce, quand les trois points doubles de la courbe C^n se réunis-

sent en un seul, pour former un point triple. Ce point triple étant susceptible d'appartenir à plusieurs variétés, il en est de même du plan tangent; mais comme cette singularité n'appartient pas à une S^n quelconque, il est inutile d'insister sur ce sujet. Quand un plan tangent appartient à la deuxième espèce, une tangente quelconque de S^n, menée par le point de contact, est osculatrice de la surface en ce point; et elle est biosculatrice dans trois directions (celles des tangentes aux trois branches de C^n), dont une est toujours réelle. Un tel point de contact est donc tel, que le plan tangent est stationnaire dans toutes les directions autour de lui, et ce point de contact est un véritable *ombilic* d'une espèce particulière. La surface est, en ce point singulier, osculée par un plan, ou, si l'on veut, par un cône d'une ouverture égale à 180 degrés.

19. *Plans tritangents.* — Si l'on se représente l'ensemble des plans bitangents qui sont circonscrits à S^n le long de la courbe Δ, ceux d'entre eux qui touchent S^n en un troisième point sont les plans tangents triples dont il s'agit de trouver le nombre. Adoptant un mode de solution analogue à celui du n° 13, cherchons d'abord combien il y a de ces plans qui touchent une seconde surface égale à S^n. Or les plans bitangents de S^n forment une surface développable dont la classe est marquée par le nombre

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12),$$

c'est-à-dire à laquelle on peut mener ce nombre de plans tangents par un point quelconque (n° 14).

Donc il y en a

$$\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n^3-n^2+n-12)\times n(n-1)^2$$

qui touchent cette seconde surface. Mais chacun d'eux se trouvera répété trois fois, après que la coïncidence des surfaces aura été établie ; on aura donc d'abord

$$3t'' = \frac{1}{2} n(n-2)(n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 19n^4 + 40n^3 - 37n^2 + 12n).$$

Il faut déduire de ce nombre celui des points de rencontre de la courbe Δ avec la courbe G^{n^2} suivant laquelle les deux surfaces se coupaient, alors qu'on les supposait distinctes, savoir: $n^2(n-2)\ (n^3 - n^2 + n - 12)$, et il vient

$$3t' = \frac{1}{2} n(n-2)(n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 21n^4 + 42n^3 - 39n^2 + 36n).$$

Il faut ensuite en retrancher le nombre des plans bitangents unistationnaires, qui forment une espèce à part, et dont les points de contact se trouvent aux points de rencontre des courbes Δ et Π; et, comme chacun de ces plans en représente trois superposés, le nombre à soustraire est

$$\frac{1}{2} n(n-2)(24n^4 - 72n^3 + 72n^2 - 336n + 576).$$

Enfin, en chacun des points de rencontre (qui sont, comme on l'a dit, des points de tangence) de la courbe parabolique Π avec la courbe Γ, lieu des points de contact des droites biosculatrices, le plan tangent est un plan tangent bistationnaire, espèce ci-après examinée, et étrangère à celle qui nous occupe ici. Chacun de ces plans est d'ailleurs compris deux fois dans la formule générale, parce qu'il y a deux manières d'assembler quatre points consécutifs a, b, c, d, de manière à en former deux groupes, composés, l'un de trois, et l'autre de deux points consécutifs, savoir : $(abc)\ (cd)$ et $(ab)\ (bcd)$. Le deuxième nombre à soustraire est donc

$$2.4\, n(n-2)(11n-24),$$

et il vient enfin, pour le nombre cherché t,

$$t = \frac{1}{6} n(n-2)$$
$$\times (n^7 - 4n^6 + 7n^5 - 45n^4 + 114n^3 - 111n^2 + 548n - 960);$$

formule dans laquelle il est aisé de vérifier que le second membre est toujours un nombre entier, comme cela doit être par la nature même de la question.

20. On trouve ainsi qu'*une surface du troisième ordre possède, en général,* 135 *plans tangents triples,* dont chacun par conséquent coupe la surface suivant trois droites; ce qui s'accorde avec cet autre théorème, savoir : qu'*il existe sur la surface* 27 *droites, par chacune desquelles on peut mener cinq plans tangents triples* (*).

Dans le cas d'une surface du quatrième ordre, on a $t = 3200$. *Il y a donc* 3200 *plans distincts, dont chacun coupe la surface suivant une* C^4 *douée de trois points doubles.*

21. Quant aux plans tangents triples, dont les trois points de contact coïncident, les seuls dont une surface soit douée, en général, sont les plans tangents bistationnaires, dont le nombre t' est donné par la formule

$$t' = 2n(n-2)(11n-24).$$

Par exemple, *il y a* 54 *plans différents, dont chacun coupe une surface du troisième ordre suivant une conique et une droite tangentes entre elles;* en d'autres termes, si, autour de chacune des 27 droites de la surface, on fait tourner un plan, il y aura deux positions du plan pour chacune desquelles la conique, suivant laquelle le plan

(*) Ces deux beaux theorèmes, dont j'ai eu occasion de donner une demonstration dans les *Nouvelles Annales,* sont dus à M. Cayley (*voir* t. XVIII, p. 129).

coupe S^3, touchera la droite; résultat d'ailleurs facile à prévoir : car si on fait tourner un plan autour d'une des 27 droites de la surface, les coniques suivant lesquelles il coupe S^3 marquent sur la droite deux séries de points en involution, et chacun des deux points doubles de cette involution est le point de contact d'une conique qui, conjointement avec la droite, satisfait à la question.

22. Il nous reste à faire connaître quelques propriétés intéressantes qui caractérisent, à d'autres points de vue, les principales espèces de plans tangents d'une surface S^n, et qui sont relatives aux surfaces polaires et nodales de cette surface.

Nous avons vu (n° 9, 4°) que le lieu des points de contact des surfaces polaires premières de S^n est une surface $Q_0^{4(n-2)}$, qui est en même temps le lieu de leurs points coniques.

On sait que chaque point Q de cette surface a, pour surface $\overline{n-2}^{\text{ième}}$ polaire, un cône du second degré, dont le sommet P a pour polaire première celle des polaires qui a un point conique au point Q (*). Les points P et Q sont ainsi correspondants ou réciproques l'un de l'autre. Le lieu du point P est une surface $P_0^{4(n-2)^3}$, du degré $4(n-2)^3$. On peut appeler les surfaces P_0, Q_0, *surfaces nodales conjuguées* de la proposée S^n, en adoptant l'expression consacrée par M. Steiner dans la théorie des courbes planes, pour une circonstance analogue à celle dont il est ici question.

23. Cela posé, le plan T, tangent à la surface P_0 au

(*) *Voir* l'*Étude* déjà citée sur les points doubles des surfaces algébriques (*Journal de M. Liouville*, t. VII, 2e série). Je donnerai dans une autre occasion la démonstration de ce théorème et de quelques autres que, faute d'espace, je n'ai pu qu'énoncer.

point P, réciproque d'un point de Q, contient tous les points de l'espace dont les surfaces polaires passent au point Q, et particulièremeut une droite, passant par P, dont les points sout les pôles des polaires qui se touchent au point Q. Le plan T n'est donc autre chose que le plan polaire du point Q, et l'on peut dire que *la surface nodale* P_0 *est enveloppée par les plans polaires des points de l'autre nodale* Q_0. Quand le point Q est sur S^n, le plan M, tangent à S^n, est stationnaire le long de deux droites infiniment voisines, disons le long de la droite double osculatrice de S^n en ce point. Ce plan touche la surface P_0 au point P; donc *la surface développable, formée par tous les plans stationnaires de* S^n, *et circonscrite à* S^n, *le long de la courbe parabolique* Π, *est aussi circonscrite* (*mais par un contact simple*) *à la surface nodale* P_0.

Si $n=3$, les surfaces nodales Q_0 et P_0 se confondent en une seule Q^4, du quatrième ordre, lieu des sommets des cônes polaires. Donc

La surface nodale d'une surface du troisième ordre S^3 *passe par les points de contact des plans stationnaires de cette surface, et leur est tangente en un autre point;* théorème analogue à celui qui a lieu pour les courbes planes du troisième ordre.

Dans le cas de n quelconque, le cône du second degré, $\overline{n-2}^{\,ième}$ polaire du point Q, et dont le sommet est au point P, a avec S^n, au point a, un contact stationnaire le long de la droite double qui est osculatrice de S^n.

24. Si le plan M est un plan tangent bistationnaire de S^n, les polaires qui se touchent en Q ont un contact stationnaire en ce point, et le plan M touche la surface nodale P_0 au point P, par un contact stationnaire. La droite PQ est en outre tangente en Q à la courbe parabolique Π (15), donc à l'autre surface nodale Q_0.

25. Enfin, si le plan M est un plan tangent de la deuxième espèce (18), il est stationnaire dans toutes les directions (19); il y a donc une infinité de faisceaux de polaires, respectivement tangentes entre elles au point Q, qui forment un réseau dont la surface commune est celle qui est douée du point conique. Leurs pôles sont distribués respectivement sur toutes les droites menées par le point Q dans le plan M; et, comme elles doivent toutes toucher la surface nodale P_0 au point P (23), il s'ensuit nécessairement que les points P et Q coïncident. On voit encore que le cône, $\overline{n-2}^{\,\text{ième}}$ polaire du point Q, devant avoir un contact stationnaire avec chacune de ces droites, se réduit à deux plans coïncidents, confondus avec le plan tangent M.