NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. MENTION

Sur un théorème de M. Faure

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 535-536

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__535_1>

SUR UN THÉORÈME DE M. FAURE;

PAR M. J. MENTION.

Avant de déduire ce théorème d'une remarque très-simple, j'apporterai à un énoncé trop général une restriction qui ne change rien aux conséquences que j'en ai tirées dans diverses circonstances. Si l'on admet *le cercle conjugué imaginaire* par rapport à un triangle acutangle, on peut dire que les quatre cercles conjugués relatifs aux triangles d'un quadrilatère ont toujours le même axe radical. Mais pour le *cercle des hauteurs,* ou le cercle qui a son centre au point de rencontre des hauteurs et un rayon moyen proportionnel entre les segments dans lesquels chaque hauteur est divisée, c'est différent.

Il n'est pas toujours exact de dire que les quatre cercles de hauteurs d'un quadrilatère aient pour axe radical la ligne des milieux de ses diagonales. Tous les points de rencontre des hauteurs ont, effectivement, la même puissance en valeur absolue par rapport aux cercles décrits sur les diagonales comme diamètres : mais il arrivera souvent que deux de ces puissances seront négatives. La médiane sera alors l'axe radical de deux seulement des cercles de hauteurs et aussi du cercle circonscrit au triangle diagonal.

THÉORÈME. — *La puissance du centre d'une conique, par rapport au cercle circonscrit à un triangle conjugué,* *est égale à la somme algébrique des carrés de ses demi-axes* (*Nouvelles Annales*, t. XXI, p. 16).

Démonstration. — La puissance du centre, par rapport au cercle des hauteurs d'un triangle circonscrit à une conique, est égale à la somme algébrique des carrés des demi-axes (*). Or, un triangle conjugué est toujours le triangle diagonal d'un quadrilatère circonscrit, pour lequel deux au moins de quatre cercles des hauteurs ont le même axe radical avec celui qui est circonscrit au triangle diagonal....

Parabole. — Le centre du cercle circonscrit à un triangle conjugué est un point de la directrice. Cela se voit comme plus haut, ou autrement, puisque ce centre est le point de rencontre des hauteurs du triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du premier; et le nouveau triangle est circonscrit à la parabole.