NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LEMONNIER

Considérations sur les équations du second degré à deux et trois variables

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 518-531

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__518_1>

CONSIDÉRATIONS SUR LES ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ A DEUX ET TROIS VARIABLES;

PAR M. H. LEMONNIER.

Je me propose, dans ce travail, de présenter quelques applications de formules qu'on trouve dans le *Traité des sections coniques* de Salmon, p. 142, § 161, et d'étendre les mêmes considérations aux surfaces du second degré.

PREMIÈRE PARTIE.

I. Si x et y sont les coordonnées d'un point sur un plan par rapport à des axes faisant entre eux l'angle θ, que X et Y en soient les coordonnées par rapport à des axes de même origine faisant l'angle θ', et qu'on ait

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = A'X^2 + B'XY + C'Y^2,$$

les deux formules dont nous développerons des conséquences sont les suivantes :

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{A+C-B\cos\theta}{\sin^2\theta} &= \frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'}, \\ \frac{B^2-4AC}{\sin^2\theta} &= \frac{B'^2-4A'C'}{\sin^2\theta'}. \end{aligned}\right.$$

Salmon en présente une démonstration très-simple, donnée par le professeur Boole dans le *Journal mathématique* de Cambridge. Il convient de la reproduire ici.

Soit posé

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = A'X^2 + B'XY + C'Y^2,$$

dans les conditions exprimées.

On sait que

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\theta'.$$

Donc on a identiquement

$$\begin{gathered} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \lambda(x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta) \\ = A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + \lambda(X^2 + Y^2 + 2XY\cos\theta') \end{gathered}$$

ou bien

$$\begin{gathered} (A + \lambda)x^2 + (B + 2\lambda\cos\theta)xy + (C + \lambda)y^2 \\ = (A' + \lambda)X^2 + (B' + 2\lambda\cos\theta')XY + (C' + \lambda)Y^2. \end{gathered}$$

Si l'on dispose de λ de façon que le premier membre soit le carré d'une fonction entière de x et de y,

$$mx + ny + p,$$

le second membre sera le carré d'une fonction entière de X et de Y, déduite de la précédente par la substitution des valeurs de x et de y en fonction de X et de Y.

Donc on aura pour λ les mêmes valeurs par la condition que le premier membre soit le carré d'une fonction entière de x et de y, et par la condition que le second soit le carré d'une fonction entière de X et de Y.

Donc les équations

$$\begin{gathered} (B + 2\lambda\cos\theta)^2 - 4(A + \lambda)(C + \lambda) = 0, \\ (B' + 2\lambda\cos\theta')^2 - 4(A' + \lambda)(C' + \lambda) = 0 \end{gathered}$$

ont les mêmes racines.

Ordonnées par rapport à λ, ces équations deviennent

$$\begin{gathered} 4\sin^2\theta.\lambda^2 + 4(A + C - B\cos\theta)\lambda + 4AC - B^2 = 0, \\ 4\sin^2\theta'.\lambda^2 + 4(A' + C' - B'\cos\theta')\lambda + 4A'C' - B'^2 = 0. \end{gathered}$$

Il en résulte

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta} = \dfrac{A' + C' - B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'}, \\[2ex] \dfrac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta} = \dfrac{B'^2 - 4A'C'}{\sin^2\theta'}. \end{cases}$$

Elles pourraient s'établir par d'autres considérations.

II. Les théorèmes d'Apollonius découlent immédiatement de ces formules.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes.

Soit

$$\frac{X^2}{a'^2} + \frac{Y^2}{b'^2} - 1 = 0$$

ce que devient l'équation en prenant pour nouveaux axes coordonnés des diamètres conjugués faisant entre eux un angle θ.

Nous aurons

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{\dfrac{1}{a'^2} + \dfrac{1}{b'^2}}{\sin^2\theta}$$

et

$$\frac{4}{a^2 b^2} = \frac{4}{a'^2 b'^2 \sin^2\theta}.$$

Donc

$$ab = a' b' \sin\theta$$

et par suite

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2.$$

Cela s'applique à l'hyperbole par le changement de b^2 en $-b^2$ et celui de b'^2 en $-b'^2$, si l'axe des x est dirigé suivant l'axe réel de la courbe et l'axe des X suivant le diamètre réel considéré.

D'ailleurs, dans le cas de l'ellipse, pour que a'^2 et b'^2 soient réels, il faut avoir

$$\sin\theta > \frac{2ab}{a^2+b^2} \quad \text{ou} \quad \tang^2\theta > \frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)^2};$$

l'angle aigu de deux diamètres conjugués y varie donc depuis un angle droit jusqu'à un minimum.

III. *Équation qui donne les longueurs de deux diamètres conjugués faisant un angle θ'.*

Soit

$$(1) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole par rapport à des axes faisant un angle θ. On a ainsi

$$B^2 - 4AC \gtrless 0,$$

Si l'on transporte l'origine au centre, l'équation (1) deviendra

$$(2) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \frac{L}{B^2-4AC} = 0$$

L désignant l'expression

$$AE^2 - BDE + CD^2 + F(B - 4AC)$$
$$= \begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix} : (-2).$$

Qu'on passe de là à des axes coordonnés dirigés suivant deux diamètres conjugués faisant un angle θ', l'équation (2) devenant

$$A'X^2 + C'Y^2 + \frac{L}{B^2-4AC} = 0,$$

on aura

$$\frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{A'+C'}{\sin^2\theta'},$$

et

$$\frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta} = \frac{-4A'C'}{\sin^2\theta'}.$$

Si u et v sont les carrés des demi-diamètres, positifs ou négatifs suivant que ces diamètres sont réels ou imaginaires, u et v seront déterminés par les équations

$$A'u + \frac{L}{B^2 - 4AC} = 0, \quad C'v + \frac{L}{B^2 - 4AC} = 0,$$

d'où

$$A' + C' = -\frac{L}{B^2 - 4AC}\left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v}\right),$$

$$A'C' = \frac{L^2}{(B^2 - 4AC)^2}\,\frac{1}{uv}.$$

Donc

$$\frac{-4L^2}{(B^2 - 4AC)^2 \sin^2\theta'} \cdot \frac{1}{uv} = \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta},$$

$$\frac{-L}{(B^2 - 4AC)}\,\frac{u+v}{uv\sin^2\theta'} = \frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

d'où

$$uv = \frac{-4L^2\sin^2\theta}{(B^2 - 4AC)^3\sin^2\theta'},$$

$$u + v = \frac{A + C - B\cos\theta}{(B^2 - 4AC)^2} \cdot 4L.$$

Ces deux résultats impliquent les théorèmes d'Apollonius. Les quantités u et v seront les racines de l'équation

$$U^2 - 4L\frac{A + C - B\cos\theta}{(B^2 - 4AC)^2}U - \frac{4L^2\sin^2\theta}{(B^2 - 4AC)^3\sin^2\theta'} = 0.$$

L'équation conviendra aux longueurs des axes si $\theta' = \frac{\pi}{2}$. Elle devient alors

$$V^2 - 4L\frac{A + C - B\cos\theta}{(B^2 - 4AC)^2}V - \frac{4L^2\sin^2\theta}{(B^2 - 4AC)^3} = 0.$$

IV. Étant donnée l'équation d'une hyperbole

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

rapportée à des axes faisant un angle θ, former l'équation de la courbe par rapport aux asymptotes.

L'équation devenant par le transport de l'origine au centre

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + \frac{L}{B^2 - 4AC} = 0,$$

soit

$$B'XY + \frac{L}{B^2 - 4AC} = 0$$

ce qu'elle devient quand les asymptotes sont prises pour axes coordonnés.

Si θ' désigne l'angle que font les derniers axes, nous aurons

$$\frac{B'^2}{\sin^2\theta'} = \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta},$$

et

$$\frac{-B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'} = \frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

De là on tire

$$\frac{-\cos\theta'}{B'} = \frac{A + C - B\cos\theta}{B^2 - 4AC}$$

et

$$\frac{\cos^2\theta'}{\sin^2\theta'} = \frac{(A + C - B\cos\theta)^2}{(B^2 - 4AC)\sin^2\theta},$$

$$\tang^2\theta' = \frac{(B^2 - 4AC)\sin^2\theta}{(A + C - B\cos\theta)^2},$$

$$\sin^2\theta' = \frac{(B^2 - 4AC)\sin^2\theta}{(A + C - B\cos\theta)^2 + (B^2 - 4AC)\sin^2\theta}.$$

Donc

$$B'^2 = \frac{(B^2 - 4AC)^2}{(A + C - B\cos\theta)^2 + (B^2 - 4AC)\sin^2\theta},$$

$$B' = \frac{B^2 - 4AC}{\pm\sqrt{(A + C - B\cos\theta)^2 + (B^2 - 4AC)\sin^2\theta}},$$

$$\cos\theta' = \frac{A + C - B\cos\theta}{\mp\sqrt{(A + C - B\cos\theta)^2 + (B^2 - 4AC)\sin^2\theta}}.$$

V. Soient

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

deux équations qui représentent soit la même ellipse, soit la même hyperbole, ou bien des ellipses ou des hyperboles de même grandeur mais différant par la situation, la première par rapport à des axes faisant un angle θ, la seconde par rapport à d'autres axes quelconques faisant un angle θ'.

L'équation dont les racines sont les carrés des demi-axes de la courbe est, dans le premier système,

$$(\alpha)\quad V^2 - 4L\frac{A + C - B\cos\theta}{(B^2 - 4AC)^2}V - \frac{4L^2\sin^2\theta'}{(B^2 - 4AC)^3} = 0,$$

et, dans le second système, c'est

$$(\alpha')\quad V^2 - 4L'\frac{A' + C' - B'\cos\theta'}{(B'^2 - 4A'C')^2}V - \frac{4L'^2\sin^2\theta'}{(B'^2 - 4A'C')^3} = 0,$$

L' étant une fonction analogue à L, savoir

$$L' = A'E'^2 - B'D'E' + C'D'^2 + F'(B'^2 - 4A'C').$$

Les deux courbes sont égales, si elles ont les mêmes axes. Les conditions d'égalité sont donc

$$L\frac{A+C-B\cos\theta}{(B^2-4AC)^2}=L'\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{(B'^2-4A'C')^2},$$

$$\frac{L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3}=\frac{L'^2\sin^2\theta'}{(B'^2-4A'C')^3},$$

ou, sous une autre forme,

$$\frac{B^2-4AC}{B'^2-4A'C'}=\frac{L^{\frac{2}{3}}\sin^{\frac{2}{3}}\theta}{L'^{\frac{2}{3}}\sin^{\frac{2}{3}}\theta'}=\frac{L^{\frac{1}{2}}(A+C-B\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}{L'^{\frac{1}{2}}(A'+C'-B'\cos\theta')^{\frac{1}{2}}}.$$

Il est à remarquer que si les deux équations se rapportent à la même origine ainsi qu'à la même courbe, et qu'on ait $F=F'$, on aura

$$\frac{A+C-B\cos\theta}{\sin^2\theta}=\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{\sin^2\theta'},$$

avec

$$\frac{B^2-4AC}{\sin^2\theta}=\frac{B'^2-4A'C'}{\sin^2\theta'};$$

par suite,

$$\frac{L}{\sin^2\theta}=\frac{L'}{\sin^2\theta'}\quad\text{ou}\quad\frac{L}{B^2-4AC}=\frac{L'}{B'^2-4A'C'}.$$

VI. Les deux équations

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$
$$A'X^2+B'XY+C'Y^2+D'X+E'Y+F'=0$$

représentent des hyperboles conjuguées, si, ayant

$$B^2-4AC>0,\quad B'^2-4A'C'>0,$$

les deux équations (α) et (α') ont leurs racines égales et de signes contraires, c'est-à-dire si l'on a

$$L\frac{A+C-B\cos\theta}{(B^2-4AC)^2}=-L'\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{(B'^2-4A'C')^2},$$

$$\frac{L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3}=\frac{L'^2\sin^2\theta'}{(B'^2-4A'C')^3}$$

ou bien

$$\frac{B^2 - 4AC}{B'^2 - 4A'C'} = \frac{L^{\frac{2}{3}} \sin^{\frac{2}{3}} \theta}{L'^{\frac{2}{3}} \sin^{\frac{2}{3}} \theta'} = \left[- \frac{L(A + C - B\cos\theta)}{L'(A' + C' - B'\cos\theta')} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

VII. Soient des paraboles égales données par les deux équations

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0.$$

En considérant la parabole comme la limite d'une ellipse ou d'une hyperbole, la dernière forme donnée aux équations de condition du § V conduit, à cause des égalités

$$B^2 - 4AC = 0, \quad B'^2 - 4A'C' = 0,$$

à la relation

$$\frac{L^{\frac{1}{3}} \sin^{\frac{4}{3}} \theta}{L'^{\frac{1}{3}} \sin^{\frac{4}{3}} \theta'} = \frac{A + C - B\cos\theta}{A' + C' - B'\cos\theta'}.$$

Cette condition peut se transformer.

Nous aurons ici

$$L = AE^2 - BDE + CD^2 = AE^2 - BDE + \frac{B^2D^2}{4A} = \frac{(BD - 2AE)^2}{4A},$$

en supposant

$$A \gtrless 0.$$

De même,

$$L' = \frac{(B'D' - 2A'E')^2}{4A'} \quad \text{si} \quad A' \gtrless 0;$$

On aurait aussi

$$L = \frac{(BE - 2CD)^2}{4C} \quad \text{et} \quad L' = \frac{(B'E' - 2C'D')^2}{4C'}.$$

La condition d'égalité devient donc

$$\frac{(BD - 2AE)^{\frac{2}{3}}}{A^{\frac{1}{3}}} \sin^{\frac{4}{3}}\theta : \frac{(B'D' - 2A'E')^{\frac{2}{3}}}{A'^{\frac{1}{3}}} \sin^{\frac{4}{3}}\theta'$$

$$= \frac{A + C - B\cos\theta}{A' + C' - B'\cos\theta'},$$

ou bien

$$\frac{(BE - 2CD)^{\frac{2}{3}}}{C^{\frac{1}{3}}} \sin^{\frac{4}{3}}\theta : \frac{(B'E' - 2C'D')^{\frac{2}{3}}}{C'^{\frac{1}{3}}} \sin^{\frac{4}{3}}\theta'$$

$$= \frac{A + C - B\cos\theta}{A' + C' - B'\cos\theta'}.$$

De là se déduit le paramètre d'une parabole donnée par l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

relativement à un diamètre faisant l'angle θ' avec les cordes qui lui sont conjuguées.

Soit

$$Y^2 - 2p'X = 0$$

la seconde équation de la parabole.

Nous aurons

$$\frac{(BE - 2CD)^{\frac{2}{3}}}{C^{\frac{1}{3}}} \sin^{\frac{4}{3}}\theta : (4p')^{\frac{2}{3}} \sin^{\frac{4}{3}}\theta' = \frac{A + C - B\cos\theta}{1},$$

d'où

$$(4p')^{\frac{2}{3}} = \frac{(BE - 2CD)^{\frac{2}{3}}}{C^{\frac{1}{3}}(A + C - B\cos\theta)} \, \frac{\sin^{\frac{4}{3}}\theta}{\sin^{\frac{4}{3}}\theta'};$$

donc

$$p' = \frac{BE - 2CD}{4\left[C^{\frac{1}{3}}(A + C - B\cos\theta)\right]^{\frac{3}{2}}} \, \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta'}.$$

Si l'on désigne par $2p_{\theta'}$ et par $2p_{\theta''}$ les paramètres relatifs à des diamètres inclinés des angles θ' et θ'' sur leurs cordes, on aura donc

$$p_{\theta'} \sin^2\theta' = p_{\theta''} \sin^2\theta'' = p_{\frac{\pi}{2}} = \frac{(\mathrm{BE} - 2\,\mathrm{CD}) \sin^2\theta}{4\left[\mathrm{C}^{\frac{1}{3}}(\mathrm{A} + \mathrm{C} - \mathrm{B}\cos\theta)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(\mathrm{BD} - 2\,\mathrm{AE}) \sin^2\theta}{4\left[\mathrm{A}^{\frac{1}{3}}(\mathrm{A} + \mathrm{C} - \mathrm{B}\cos\theta)\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Que l'équation d'une parabole soit

$$(\theta) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0,$$

on aura donc

$$p_{\theta'} \sin^2\theta' = \frac{2\sin^2\theta}{ab\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2\cos\theta}{ab}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$\left(\frac{2}{p_{\theta'}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\right)^{\frac{4}{3}} a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2\cos\theta}{ab}\right)$$

$$= \left(\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\right)^{\frac{4}{3}} \left(\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{2\cos\theta}{a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}\right),$$

ce qui donne, pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta' = \frac{\pi}{2}$,

$$\left(\frac{2}{p_{\frac{\pi}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}}.$$

Ce dernier résultat a été obtenu plus longuement par Salmon (p. 179, § 213).

VIII. *A quelles conditions les équations*

$$(\theta)\qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$(\theta')\qquad A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donnent-elles des ellipses ou des hyperboles semblables?

Considérons les équations correspondantes relatives aux axes

$$V^2 - \frac{4L}{(B^2-4AC)^2}(A+C-B\cos\theta)V - \frac{4L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3} = 0,$$

$$V'^2 - \frac{4L'}{(B'^2-4A'C')^2}(A'+C'-B'\cos\theta')V' - \frac{4L'^2\sin^2\theta'}{(B'^2-4A'C')^3} = 0.$$

Les racines de la première étant u et v, celles de la seconde u' et v', les deux courbes sont semblables, si l'on a

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = K,$$

le rapport de similitude $\sqrt{K}$ pouvant être réel ou imaginaire.

De là,

$$u' = uK,\quad v' = vK,$$

c'est-à-dire pour la seconde équation

$$V' = VK,$$

d'où

$$K^2V^2 - \frac{4L'}{(B'^2-4A'C')^2}(A'+C'-B'\cos\theta')KV - \frac{4L'^2\sin^2\theta'}{(B'^2-4A'C')^3} = 0,$$

ou bien

$$V^2 - \frac{4L'}{(B'^2-4A'C')^2}\frac{(A'+C'-B'\cos\theta')}{K}.V - \frac{4L'^2\sin^2\theta'}{K^2(B'^2-4A'C')^3} = 0.$$

En conséquence, on a pour équations de condition

$$\frac{L(A+C-B\cos\theta)}{(B^2-4AC)^2}=\frac{L'(A'+C'-B'\cos\theta')}{(B'^2-4A'C')^2.K}$$

et

$$\frac{L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3}=\frac{L'^2\sin^2\theta'}{K^2(B'^2-4A'C')^3};$$

d'où

$$K=\frac{L'}{L}\left(\frac{B^2-4AC}{B'^2-4A'C'}\right)^2\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{A+C-B\cos\theta}$$

et

$$K^2=\left(\frac{L'}{L}\right)^2\left(\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\right)^2\left(\frac{B^2-4AC}{B'^2-4A'C'}\right)^3.$$

Donc on a

$$\left(\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{A+C-B\cos\theta}\right)^2=\frac{B'^2-4A'C'}{B^2-4AC}\left(\frac{\sin\theta'}{\sin\theta}\right)^2.$$

Pour que le rapport de similitude soit réel, il faut d'ailleurs que l'on ait

$$\frac{L'}{L}\,\frac{A'+C'-B'\cos\theta'}{A+C-B\cos\theta}>0.$$

IX. Si l'équation

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

rapportée à des axes coordonnés faisant l'angle θ, représente une ellipse dont a et b seront les demi-axes, l'aire de l'ellipse sera

$$\pi ab=\pi\sqrt{\frac{-4L^2\sin^2\theta}{(B^2-4AC)^3}}=\frac{2\pi L\sin\theta}{(4AC-B^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Signalons encore pour une ellipse ou une hyperbole rapportée en coordonnées rectangulaires à deux systèmes d'axes dont l'origine commune est sur le centre, ayant ainsi les équations

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0,$$
$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + F = 0,$$

les deux relations

$$A + C = A' + C',$$
$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'.$$

La première revient, si r et r' sont deux rayons à angle droit, R et R' deux autres rayons analogues, à la formule

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2}.$$

J'ai fait voir d'ailleurs, par un article inséré déjà dans les *Annales*, comment deux formules signalées par M. l'abbé Aoust et par M. Faure se rattachent à nos deux formules du n° I. On en déduit, dans le cas de trois rayons rectangulaires,

$$\frac{3}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$$

et

$$\frac{9}{16}\left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{10}{3a^2b^2}\right) = \frac{1}{r^2r_1^2} + \frac{1}{r_1^2r_2^2} + \frac{1}{r_2^2r^2}.$$

(*Fin de la première partie.*)