

H. LEMONNIER

De l'homothétie dans les coniques

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 3
(1864), p. 461-465

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__461_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1864, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DE L'HOMOTHÉTIE DANS LES CONIQUES;

PAR M. H. LEMONNIER,
Professeur au lycée Saint-Louis.

Soit

$$f(xy) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

l'équation d'une première conique, et soit

$$\varphi(x'y') = A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

celle d'une seconde conique semblable et homothétique à la première.

Désignons par α , β les coordonnées du point qui dans le système de la seconde conique est homologue à l'origine.

Nous aurons

$$x' - \alpha = \frac{x}{k}, \quad y' - \beta = \frac{y}{k},$$

k étant le rapport de similitude de la première conique à la seconde. Il en résulte

$$\begin{aligned} A' \left(\frac{x}{k} + \alpha \right)^2 + B' \left(\frac{x}{k} + \alpha \right) \left(\frac{y}{k} + \beta \right) + C' \left(\frac{y}{k} + \beta \right)^2 \\ + D' \left(\frac{x}{k} + \alpha \right) + E' \left(\frac{y}{k} + \beta \right) + F' = 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} A'x^2 + B'xy + C'y^2 + k(2A'\alpha + B'\beta + D')x \\ + k(B'\alpha + 2C'\beta + E')y \\ + k^2(A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F') = 0. \end{aligned}$$

De là les relations

$$\begin{aligned} \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = \frac{k(2A'\alpha + B'\beta + D')}{D} = \frac{k(B'\alpha + 2C'\beta + E')}{E} \\ = \frac{k^2(A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F')}{F}. \end{aligned}$$

On a ainsi les deux conditions

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C},$$

puis trois équations pour déterminer α , β et k .

L'élimination de k donne

$$\begin{aligned} \frac{2A'\alpha + B'\beta + D'}{D} = \frac{B'\alpha + 2C'\beta + E'}{E}, \\ \frac{A'(2A'\alpha + B'\beta + D')^2}{A'D^2} = \frac{A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F'}{F}. \end{aligned}$$

Si les deux courbes ont un centre, il doit résulter de là deux systèmes de valeurs pour α et β , déterminant deux points symétriques l'un de l'autre à l'égard du centre de la seconde conique, et deux valeurs de k correspondantes, égales et de signes contraires. Mais pour des paraboles, il n'en doit résulter qu'un seul système de valeurs de α , β et k .

C'est chose aisée à établir par l'analyse suivante.

Premier cas.— Soient a et b les coordonnées du centre de la seconde conique, de sorte que

$$2A'a + B'b + D' = 0,$$

$$B'a + 2C'b + E' = 0.$$

Posons

$$\alpha = a + \alpha',$$

$$\beta = b + \beta'.$$

Il s'ensuit

$$2A'\alpha + B'\beta + D' = 2A'\alpha' + B'\beta',$$

$$B'\alpha + 2C'\beta + E' = B'\alpha' + 2C'\beta',$$

et

$$\begin{aligned} & A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F' \\ &= A'\alpha'^2 + B'\alpha'\beta' + C'\beta'^2 + \frac{D'a + E'b}{2} + F', \end{aligned}$$

ce qui transforme les deux équations précédentes en

$$\frac{2A'\alpha' + B'\beta'}{D} = \frac{B'\alpha' + 2C'\beta'}{E},$$

$$\frac{A}{A'} \frac{(2A'\alpha' + B'\beta')^2}{D^2} = \frac{A'\alpha'^2 + B'\alpha'\beta' + C'\beta'^2 + \frac{D'a + E'b}{2} + F'}{F}$$

avec

$$k = D \frac{A'}{A} \frac{1}{2A'\alpha' + B'\beta'}.$$

On voit que ces équations déterminent deux couples de valeurs, pour α' et β' , égales et de signes contraires, ainsi que des valeurs de k égales aussi et de signes contraires.

Deuxième cas. — Soit

$$B^2 - 4AC = 0$$

avec

$$B'^2 - 4A'C' = 0.$$

L'équation

$$\frac{A}{A'} \frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2}{D^2} = \frac{A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + C'\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F'}{F}$$

peut se changer en

$$\begin{aligned} & \frac{A}{A'} \frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2}{D^2} \\ &= \frac{A'\alpha^2 + B'\alpha\beta + \frac{B'^2}{4A'}\beta^2 + D'\alpha + E'\beta + F'}{F}, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2}{D^2} \\ &= \frac{(2A'\alpha + B'\beta + D')^2 - 2(B'D' - 2A'E')\beta - (D'^2 - 4A'F')}{4AF} \\ &= \frac{2(B'D' - 2A'E')\beta + D'^2 - 4A'F'}{D^2 - 4AF}. \end{aligned}$$

On trouvera d'une façon semblable

$$\frac{(B'\alpha + 2C'\beta + E')^2}{E^2} = \frac{2(B'E' - 2C'D')\alpha + E'^2 - 4C'F'}{E^2 - 4CF}.$$

En conséquence, α et β sont données par les équations

$$\begin{aligned} \frac{2A'\alpha + B'\beta + D'}{D} &= \frac{B'\alpha + 2C'\beta + E'}{E}, \\ \frac{2(B'D' - 2A'E')\beta + D'^2 - 4A'F'}{D^2 - 4AF} \\ &= \frac{2(B'E' - 2C'D')\alpha + E'^2 - 4C'F'}{E^2 - 4CF}, \end{aligned}$$

toutes deux du premier degré.

Il s'ensuit bien pour α , β , k un seul système de valeurs.