Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 458-461

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__458_0>

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Transon à M. Gerono.

« Il me semble qu'on ignore ou tout au moins qu'on n'enseigne pas la signification géométrique que reçoit la fonction du second degré à deux variables lorsqu'on substitue à celles-ci les coordonnées d'un point quelconque du plan. Cette signification donne cependant lieu à un théorème que vous jugerez peut-être assez intéressant pour être proposé aux lecteurs des *Nouvelles Annales*. Voici ce qu'il en est.

» *Soit*

$$f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe du second degré. Si d'un point M, *dont les coordonnées sont* α, β, *on abaisse une perpendiculaire* MP *sur la polaire de ce point et qu'on la prolonge jusqu'en* A *où elle rencontre l'un des axes de la courbe, on trouve que* $f(\alpha, \beta)$ *est proportionnel au produit* MP.MA.

» *Nota.* M. Mannheim me fait remarquer que si A est au petit axe de la courbe, les points P, A, F et F′ sont sur un même cercle; de sorte que $f(\alpha, \beta)$ est une quantité proportionnelle à la puissance du point M relativement à ce cercle. »

Lettre de M. Vincent, Membre de l'Institut.

A Messieurs les Rédacteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques.*

« Messieurs,

» La Note sur le rapport de la circonférence au diamètre, par M. M., que l'on trouve à la page 310 du volume courant (1864), est certainement fort intéressante. Mais votre abonné aurait pu en lire l'équivalent à la page 146 du *Géomètre*, recueil publié en 1836 par M. Guillard. Ou du moins, si la Note du *Géomètre* n'est point l'équivalent de celle de votre abonné, on peut dire qu'elle en est l'analogue.

« La différence des méthodes, dit votre abonné, est » plus apparente que réelle ; » l'abonné a raison s'il veut simplement parler des résultats ; mais quant à la simplicité des calculs, la méthode des isopérimètres me semble toujours d'une supériorité incontestable. En effet, que peut-on imaginer de plus simple que cet élégant théorème de Schwab, auquel on ne saurait trop rappeler les auteurs d'Éléments ?

« Si l'on forme une suite de nombres dont les deux » premiers soient 0 et 1 (*zéro* et *un*) et dont les autres » soient alternativement moyens par différence et moyens » par quotient entre les deux qui précèdent immédiate- » ment, cette suite convergera sans cesse vers le rayon » d'une circonférence égale à 4. »

» Ce théorème est la traduction des formules

$$r' = \frac{R+r}{2}, \quad R' = \sqrt{Rr'},$$

dont une démonstration géométrique extrêmement simple a été donnée dans une Note posthume de feu Léger, chef d'institution à Montmorency, à la page 204 du tome V des *Nouvelles Annales*.

(5 août 1864.)

Les solutions des questions 684, 685, 688 nous ont été adressées par M. L. Cousin (de Catillon) ; mais elles nous sont parvenues trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro de juillet dernier, où les mêmes questions ont été résolues.

La proposition 684 est une conséquence toute simple d'un théorème qui n'est pas nouveau, car il est démontré dans l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hospital (seconde édition publiée en 1715). Voici en quoi consiste ce théorème :

Soient AC le rayon de courbure en un point A d'une parabole, et AB la projection de AC sur le rayon vecteur FA mené du foyer F au point A : la projection AB est double du rayon vecteur FA.

Il est clair, d'après cela, que les milieux des rayons de courbure aux extrémités A, A′ d'une corde focale quelconque AFA′ appartiennent à la perpendiculaire menée par le foyer à cette corde. Et on sait, d'ailleurs, que la perpendiculaire dont il s'agit rencontre la directrice de la parabole au pôle de la corde focale.

La relation

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{R'}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}$$

se déduit très-simplement aussi de la proposition due à de l'Hospital. En effet, le triangle rectangle ABC, précédemment défini, donne d'abord

$$AC = \frac{AB}{\cos BAC} \quad \text{ou} \quad R = \frac{2.AF}{\sin\frac{1}{2}\omega},$$

en nommant ω l'angle que le rayon vecteur AF forme avec l'axe de la parabole. Mais

$$AF = \frac{p}{1 - \cos\omega} = \frac{p}{2\sin^2\frac{1}{2}\omega};$$

donc

$$R = \frac{p}{\sin^3 \frac{1}{2}\omega}.$$

Les normales aux points A, A′ étant rectangulaires, on a

$$R' = \frac{p}{\cos^3 \frac{1}{2}\omega};$$

et de là

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{R'}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Des égalités

$$R = \frac{p}{\sin^3 \frac{1}{2}\omega}, \quad R' = \frac{p}{\cos^3 \frac{1}{2}\omega},$$

on tire

$$\left(\frac{R}{R'}\right) = \cot^3 \frac{1}{2}\omega,$$

relation indépendante du paramètre de la parabole considérée. G.