Nouvelles annales de mathématiques

Questions

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 442-445

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__442_1>

QUESTIONS.

708. On sait que si d'un point quelconque, P, de la circonférence circonscrite à un triangle, ABC, on mène des perpendiculaires aux trois côtés du triangle, les pieds de ces perpendiculaires se trouvent sur une même droite. Démontrer que cette droite est également distante du point P et du point de rencontre des trois hauteurs du triangle ABC.

On demande une démonstration géométrique de ce théorème.

709. Trouver le lieu géométrique d'un point tel, que la somme des carrés des trois normales menées de ce point à une parabole donnée soit égale à un carré donné k^2.

710. Soient a, b, c les milieux des côtés d'un triangle ABC;

a_1, b_1, c_1 les pieds des hauteurs;

α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 les points d'intersection (bc_1, cb_1), (ca_1, ac_1), (ab_1, ba_1), (bc, b_1c_1), (ca, c_1a_1), (ab, a_1b_1);

M le centre du cercle circonscrit au triangle ABC;

H le point d'intersection des hauteurs;

O le centre du cercle des neuf points.

Cette notation admise, on aura les propriétés suivantes :

1° Les points α, β, γ sont sur la droite HM.

2° Les droites $A\alpha_1$, $B\beta_1$, $C\gamma_1$ sont parallèles entre elles, et perpendiculaires à la droite HM.

3° Les quatre points α, β_1, γ_1, A sont en ligne droite. Il en est de même des quatre points β, γ_1, α_1, B, et des quatre points γ, α_1, β_1, C.

4° α_1, β_1, γ_1 sont les sommets d'un triangle conjugué au cercle des neuf points (O).

5° Les droites $a\alpha_1$, $b\beta_1$, $c\gamma_1$ passent par un même point P, et pareillement les droites $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$, $c_1\gamma_1$ passent par un même point P_1.

6° Les deux points P, P_1 appartiennent à la circonférence des neuf points (O).

7° Les points d'intersection (AB, $\alpha_1\beta_1$), (BC, $\beta_1\gamma_1$), (CA, $\gamma_1\alpha_1$) sont sur une même droite qui passe par P, P_1.

La démonstration de ces différentes propriétés est proposée par M. Schrœter, professeur à l'Université de Breslau.

711. *Théorèmes à démontrer.* — I. En désignant par x_r, y_r, z_r les coordonnées d'un point a_r, on a, pour un point quelconque O,

$$\begin{vmatrix} \overline{Oa_1}^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \overline{Oa_2}^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \overline{Oa_3}^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ \overline{Oa_4}^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ \overline{Oa_5}^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix} = \text{constante}.$$

Lorsque les points a_r sont sur une sphère, on sait que ce déterminant est nul.

II. Les sommets d'un polygone étant aux points a, b,

c, d,..., menons par un point arbitraire o des parallèles aux côtés de l'angle a, et désignons par A la surface du parallélogramme ainsi construit. Soient B, C, D,..., les surfaces des parallélogrammes déterminés de la même manière aux sommets b, c, d,.... Démontrer que le point o est le centre de gravité des poids $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$,..., placés aux sommets a, b, c,....

Il y a un théorème correspondant dans l'espace.

III. Un polygone étant inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre cercle, démontrer que : 1° le centre des moyennes distances de ses sommets est situé sur la droite qui unit les centres des deux cercles; 2° la surface du polygone est égale à la somme des sinus de ses angles multipliée par la moitié de la puissance du centre du cercle inscrit, prise par rapport au cercle circonscrit.

IV. Une équation de la forme

$$x^m f(a) + x^{m-1} f(a+1) + x^{m-2} f(a+2) + \ldots = 0,$$

dans laquelle f désigne une fonction algébrique, a toujours des racines imaginaires. (H. FAURE.)

712. Une ellipse, E, étant donnée, décrire une autre ellipse, E′, homothétique à la première, et telle, que si d'un point A pris arbitrairement sur E on conduit à E′ deux tangentes AM, AN, rencontrant E en des points B, C, la droite BC qui unit ces deux points d'intersection soit aussi tangente à l'ellipse E′.

Cette condition étant supposée remplie, démontrer que l'aire du triangle ABC est une quantité invariable, et qu'il en est de même de la somme des distances des trois sommets A, B, C de ce triangle à l'un des foyers de l'ellipse E donnée.

713. On donne dans l'espace deux droites indéfinies L, L′, non situées dans *un même* plan, et un point O : décrire de ce point comme centre une sphère qui coupe les droites L, L′ en des points A, B, A′, B′, tels, que le tétraèdre ABA′B′, qui a ces points d'intersection pour sommets, soit équivalent à un cube donné c^3.

714. Résoudre en nombres entiers et positifs l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = x_1 . x_2 . x_3 . x_4 . x_5.$$

Nombre des solutions entières et positives.

715. Le lieu des foyers des paraboles normales à une droite donnée, et qui la coupent en deux points fixes, est une cissoïde.

716. Quatre cercles OA′C′B′, OAB′C, OBCA′, OAC′B passent par un même point O. Prouver que les points de concours des cordes OA′, BC; OB′, AC; OC′, AB sont en ligne droite; ou encore OA, B′C; OB, A′C; OC′, A′B′; etc.

717. Construire une hyperbole équilatère, connaissant le centre, une tangente et un point.

Ces trois dernières questions sont proposées par M. Mention.