Nouvelles annales de mathématiques

S. Realis

Sur la décomposition des fractions rationnelles

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 438-442

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__438_1>

SUR LA DÉCOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES;

PAR M. S. REALIS.

Toute fonction rationnelle et fractionnaire d'une variable x peut être considérée comme résultant de l'addition d'un polynôme entier par rapport à la variable (qui peut être nul) et d'une fraction dont le numérateur est de degré moindre que le dénominateur. Le but de cette Note est de simplifier en quelques points la théorie ordinaire de la décomposition de cette fraction en fractions simples.

Je me rapporte aux notations et aux résultats des leçons VI[e] et VII[e] de l'*Algèbre supérieure* de M. Serret (2[e] édition), et je considère la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{f(x)}$, que je suppose réduite à sa plus simple expression, et dont le dénominateur (de degré plus élevé que le numérateur) est le produit des facteurs $(x-a)^\alpha$, $(x-b)^\beta, \ldots$ $(x-c)^\gamma$ correspondants aux racines distinctes de l'équation $f(x)=0$.

La décomposition doit donner, par identité et d'une seule manière, un résultat de la forme

$$\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = {} & \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-2}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} \\ & + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \frac{B_2}{(x-b)^{\beta-2}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{C}{(x-c)^\gamma} + \frac{C_1}{(x-c)^{\gamma-1}} + \frac{C_2}{(x-c)^{\gamma-2}} + \ldots + \frac{C_{\gamma-1}}{x-c},\end{aligned}$$

les A, B,..., C étant des quantités finies, indépendantes de x.

Cherchons à déterminer les numérateurs A, $A_1, \ldots$, $A_{\alpha-1}$ de la partie de la valeur de $\frac{F(x)}{f(x)}$ qui est relative à la racine a. A cet effet, multiplions l'égalité ci-dessus par $(x-a)^\alpha$, et désignons, pour abréger, par $\theta(x)$ l'ensemble des parties de $\frac{F(x)}{f(x)}$ relatives à toutes les autres racines de $f(x) = 0$, et par $\varphi(x)$ la fraction $\frac{(x-a)^\alpha F(x)}{f(x)}$. On aura, par identité,

$$\varphi(x) = A + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \ldots$$
$$+ A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1} + (x-a)^\alpha \theta(x).$$

Il suffit de l'inspection de cette formule pour voir immédiatement qu'en y faisant, ainsi que dans ses dérivées successives jusqu'à celle de l'ordre $\alpha - 1$ inclusivement, $x = a$, on aura

$$\varphi(a) = A, \quad \frac{\varphi'(a)}{1} = A_1, \quad \frac{\varphi''(a)}{1.2} = A_2, \ldots,$$

$$\frac{\varphi'''(x)}{1.2.3} = A_3, \ldots, \quad \frac{\varphi^{\alpha-1}(a)}{1.2.3\ldots(\alpha-1)} = A_{\alpha-1}.$$

On obtiendra de même les valeurs des autres constantes B, $B_1, \ldots$, C, $C_1, \ldots$, ci-dessus. Cette manière de parvenir à l'expression algébrique des numérateurs des diverses fractions partielles qui composent la fraction rationnelle proposée, est, ce me semble, plus expéditive et plus simple que celle qu'on trouve exposée dans l'*Algèbre supérieure* (p. 84 à 86) et dans les autres ouvrages didactiques.

Ces expressions des numérateurs des fractions partielles peuvent s'appliquer aux racines imaginaires de $f(x) = 0$ aussi bien qu'aux racines réelles, mais la complication des réductions entre les termes homologues relatifs aux racines imaginaires conjuguées rend préférable en général, pour ces racines, la décomposition directe en fractions partielles ayant pour dénominateurs les facteurs réels du second degré de $f(x)$, et pour numérateurs des fonctions linéaires de la variable.

Soit

$$X = (x - h)^2 + k^2$$

un de ces facteurs, n son degré de multiplicité dans $f(x)$, et désignons maintenant par $\varphi(x)$ la fraction $\dfrac{X^n F(x)}{f(x)}$, et par $\theta(x)$ l'ensemble des fractions partielles qui répondent à tous les facteurs de $f(x)$ autres que $(x - h)^2 + h^2$. On doit parvenir à un résultat de la forme

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Px + Q}{X^n} + \frac{P_1 x + Q_1}{X^{n-1}} + \ldots + \frac{P_{n-1} x + Q_{n-1}}{X} + \theta(x),$$

les P, Q étant des constantes qu'il s'agit de déterminer. On aura donc

$$\begin{aligned}\varphi(x) = Px + Q + (P_1 x + Q_1) X + (P_2 x + Q_2) X^2 + \ldots \\ + (P_{n-1} x + Q_{n-1}) X^{n-1} + X^n \theta(x).\end{aligned}$$

Faisant, dans cette équation identique, $x = h + k\sqrt{-1}$, et désignant par $M + N\sqrt{-1}$ ce que devient $\varphi(x)$ dans cette hypothèse, on obtient l'équation

$$M + N\sqrt{-1} = P(h + k\sqrt{-1}) + Q,$$

qui se décompose dans les deux suivantes :

$$M = Ph + Q, \quad N = Pk.$$

On tire de celles-ci, pour P et Q, les valeurs réelles et finies

$$P = \frac{N}{k}, \quad Q = \frac{Mk - Nh}{k}.$$

Prenant ensuite les dérivées successives de l'équation identique ci-dessus, jusqu'à l'ordre $n - 1$ inclusivement, et faisant partout $x = h + k\sqrt{-1}$, il s'introduira, à chaque différentiation, deux nouveaux coefficients inconnus, et chacune des équations ainsi obtenues se partagera en deux autres servant à déterminer ces coefficients.

Ce procédé, quoique plus simple que ceux qu'on trouve indiqués dans les Traités d'Analyse, ne laisse pas toutefois que de présenter des complications de calcul dans la réduction des imaginaires. Je crois utile de remarquer que l'on évitera entièrement ces complications, quel que soit d'ailleurs le procédé qu'on emploie pour la décomposition, en réduisant d'abord le facteur X à la forme $y^2 + k^2$, c'est-à-dire en posant $x - h = y$. La racine imaginaire se trouvera par là exprimée par $y = k\sqrt{-1}$, et l'on aura à opérer sur une fraction rationnelle de la forme $\frac{\Pi(y)}{(y^2 + k^2)^n \varpi(y)}$, qui se prête facilement au calcul des fractions partielles

$$\frac{Py + Q}{(y^2 + k^2)^n}, \quad \frac{P_1 y + Q_1}{(y^2 + k^2)^{n-1}}, \quad \frac{P_{n-1} y + Q_{n-1}}{y^2 + k^2}.$$

Ce calcul achevé, on remettra partout $x - h$ à la place de y, et l'on obtiendra les fractions partielles relatives au facteur X.

Lorsque le but de la décomposition, ainsi que cela arrive souvent, est l'intégration de la formule différentielle $\frac{F(x)\,dx}{f(x)}$, il y a d'autant plus avantage à se servir de la simplification indiquée, que, quand même on aurait déterminé directement les fractions partielles en x, il y aurait toujours lieu d'employer ensuite les transformées en y pour obtenir les différentes intégrales. Autant vaut-il, par conséquent, avoir recours tout d'abord à cette transformation, qui facilite à la fois les procédés et de la décomposition et de l'intégration, et ne revenir aux expressions en x qu'après les intégrations effectuées.