NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 42-45

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__42_0>

BIBLIOGRAPHIE.

Maximilien Marie. — *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.*

M. Marie a publié sous ce titre, de 1858 à 1863, dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, une série de Mémoires dont nous allons essayer de faire l'analyse.

Ces Mémoires n'ont pas précisément pour objet d'établir une *nouvelle théorie* des imaginaires, comme on pourrait le croire (l'auteur n'y émet aucune opinion sur la métaphysique de ces quantités), mais bien une *nouvelle méthode* pour l'étude des fonctions de variables imaginaires.

Tous nos lecteurs savent que l'on représente très-commodément une quantité de la forme $a + b\sqrt{-1}$, soit par une droite inclinée allant de l'origine des coordonnées au point dont les coordonnées sont a et b, ainsi que le faisaient MM. Faure, Mourey, Argant, etc.; soit, chose moins logique, par ce point même, comme Cauchy et ses disciples, et que, grâce à cette représentation, on démontre très-facilement et on ramène à des intuitions géométriques la plupart des théorèmes d'Algèbre sur les imaginaires, les propriétés des fonctions simplement et doublement périodiques, les intégrales par des chemins imaginaires, etc.

La méthode de M. Marie a également pour but de faciliter l'étude des propriétés des fonctions de variables imaginaires, en ramenant ces propriétés à des intuitions géométriques, mais elle diffère totalement par les moyens de celle de Cauchy.

Laquelle de ces deux méthodes faut-il préférer? Toutes les deux, à tour de rôle. Chacune a ses avantages particuliers, et celui qui dédaignerait l'une ou l'autre se priverait d'un instrument utile.

M. Marie a eu pour but principal de trouver une représentation géométrique complète de l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

La courbe définie par cette équation n'en représentant que les solutions réelles, ne fournit aucun secours pour l'étude des solutions imaginaires.

Pour remédier à cette insuffisance, concevons que l'on ait construit d'abord la courbe réelle dont l'équation est

$$f(x, y) = 0,$$

et que celle-ci n'ait pas de point correspondant à l'abscisse $x = a$, mais que l'équation soit vérifiée alors en faisant $y = a' + b'\sqrt{-1}$, et construisons le point dont l'abscisse est a et l'ordonnée $a' + b'$. Le lieu de tous ces points formera une courbe que M. Marie appelle une *conjuguée imaginaire* du lieu $f(x, y) = 0$. En changeant la direction des axes ou seulement celle de l'axe des y, on obtiendra une infinité de conjuguées. L'ensemble de toutes ces courbes donnera une représentation graphique complète de l'équation. Chaque conjuguée sera déterminée quand on connaîtra le coefficient angulaire de la direction qu'il faut donner à l'axe des y pour l'obtenir. Ce coefficient angulaire est nommé la *caractéristique* de la conjuguée.

M. Poncelet avait déjà considéré dès 1822 ces courbes conjuguées dans son excellent *Traité des propriétés projectives,* mais pour les sections coniques seulement. Il les nommait courbes supplémentaires. Elle lui ont été d'un grand secours, car il n'aurait pu sans elles donner à un système de Géométrie supérieure une extension correspondant à celle de la Géométrie analytique. Tous les éléments d'une courbe qui deviennent imaginaires, tels que tangentes, polaires, asymptotes, se retrouvent à l'état réel dans les courbes supplémentaires.

Les conjuguées peuvent être définies d'une manière plus algébrique, sans recourir à la transformation des coordonnées. Soit

$$x = a + b\sqrt{-1}, \quad y = a' + b'\sqrt{-1},$$

une solution imaginaire de l'équation; construisons le point

$$x_1 = a + b, \quad y_1 = a' + b'.$$

L'ensemble de tous les points ainsi obtenus pour lesquels le rapport $\frac{b'}{b}$ a une même valeur C constitue précisément la conjuguée de caractéristique C. C'est à cette seconde définition que s'en tient M. Marie; nous n'avons reproduit la première que parce qu'elle donne une idée plus claire de la génération de ces courbes.

Sans nous étendre sur l'étude géométrique des conjuguées, nous énoncerons seulement quelques remarques et théorèmes qui les concernent.

Une équation du premier degré à coefficients imaginaires représente une infinité de droites.

La tangente au point imaginaire x, y est donnée par la même équation que la tangente au lieu réel, pourvu que l'on prenne parmi l'infinité de droites représentées par l'équation de la tangente imaginaire celle dont la caractéristique est égale à la caractéristique du point.

De même, l'équation de l'asymptote représente le faisceau des asymptotes à toutes les conjuguées.

La courbe réelle est une enveloppe de ses conjuguées.

L'enveloppe totale des conjuguées se compose de toutes les solutions de l'équation pour lesquelles $\frac{dy}{dx}$ est réel.

Les conjuguées, au point où elles touchent la courbe réelle, ont la même courbure que celle-ci, mais dirigée en sens contraire.

Ce que nous venons de dire des équations à deux variables s'étend sans peine aux équations à trois variables. Chacune d'elles représente, outre la surface réelle, une infinité de surfaces imaginaires dont chacune est déterminée par *deux* caractéristiques. On peut utilement étendre le même langage aux hypersurfaces, c'est-à-dire aux équations à plus de trois variables.

N. LANDUR.

(*La suite prochainement.*)