WILLIAM ROBERTS

Théorème de géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 311-313
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__311_1>

THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. WILLIAM ROBERTS.

Étant donnée une série d'ellipsoïdes homofocaux, soit un point pris arbitrairement sur l'un des axes, et considérons ce point comme le sommet des cônes circonscrits aux ellipsoïdes du système homofocal. Le lieu des courbes de contact sera une surface déterminée, et en faisant varier la position du sommet sur le même axe, on aura une série de surfaces renfermant un paramètre arbitraire. Pareillement, deux autres systèmes, dont chacun contient une constante arbitraire, s'obtiennent de la même manière, en prenant des points sur les deux autres axes pour sommets de cônes circonscrits.

Cela posé, je dis que :

1° *Les courbes dans lesquelles ces trois familles de surfaces se coupent deux à deux sont des cercles dont les plans sont perpendiculaires aux plans principaux.*

2° *Les surfaces qui appartiennent respectivement à ces trois systèmes se coupent mutuellement deux à deux à angle droit, et par conséquent, en vertu du théorème de Dupin, leurs lignes de courbure sont les cercles qui résultent de leurs intersections.*

Afin de démontrer la première partie de notre théorème, soit O le centre, et soient A, B deux points pris respectivement sur les axes des x et des y, et faisons $OA = \alpha$ et $OB = \beta$. A chaque valeur de α (et de même de β), il répondra une surface particulière appartenant à l'une des familles dont il s'agit, et il est évident que l'intersection de la surface (α) avec la surface (β) sera le lieu des points (M) dont un quelconque est situé sur l'un des ellipsoïdes homofocaux et jouit de la propriété que le plan tangent qui y touche l'ellipsoïde coupe les axes des x et des y respectivement aux deux points donnés A et B. D'après un théorème de M. Chasles, la normale menée à l'ellipsoïde homofocal au point M perce le plan des xy dans un point P qui est le pôle de la droite AB par rapport à la conique focale située dans ce plan. Par conséquent, le point P est donné. Abaissons donc de P une perpendiculaire PQ sur AB, et le lieu de M, ou la courbe d'intersection de (α) avec (β), sera un cercle décrit avec PQ comme diamètre dans un plan perpendiculaire à AOB, ce qu'il fallait démontrer.

Pour établir la seconde partie du théorème, soient A_1, B_1 les points de rencontre de la droite AB avec les deux plans menés par le point M, respectivement parallèles aux plans yz et xz. Soit aussi M_1 le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur le plan xy ou AOB, et faisons passer par la droite MM_1 un plan perpendiculaire au plan tangent à l'ellipsoïde homofocal en M. Dans le plan qu'on détermine ainsi, menons une droite MN faisant avec le plan tangent A_1MB_1 un angle égal à celui fait par MM_1 avec le même plan. On s'apercevra facilement, par la géométrie élémentaire, que la droite MN sera la tangente en M au cercle provenant de l'intersection mutuelle des surfaces (α) et (β). Il est évident aussi que les droites MA_1, MB_1 sont les tangentes respectives aux sections elliptiques des surfaces (α) et (β) passant par M. Par conséquent, les plans NMA_1, NMB_1 touchent respectivement les deux surfaces (α) et (β) au point M, et l'angle fait par ces deux plans entre eux est évidemment égal à celui que fait le plan MM_1A_1 avec MM_1B_1, c'est-à-dire à un angle droit. Il résulte de là que les deux surfaces (α) et (β) s'entrecoupent orthogonalement, comme nous l'avions énoncé.