J.-C.-G. ZENTHEN

Exemples de transformations de propositions géométriques

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 297-306

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__297_1>

EXEMPLES DE TRANSFORMATIONS DE PROPOSITIONS GÉOMÉTRIQUES;

PAR M. J.-C.-G. ZENTHEN (DE COPENHAGUE).

Dans la Géométrie analytique, on détermine les courbes planes au moyen d'équations entre deux quantités variables, x et y, et les propriétés analytiques des équations révèlent les propriétés géométriques des courbes. En représentant par x et y différentes grandeurs, variables avec le point déterminé par ces coordonnées (par exemple, ses distances à certaines droites ou à des points donnés, les rapports entre ces distances, etc.), on pourra, au moyen d'une même équation, représenter différentes courbes, et les propriétés de cette équation commune exprimeront des propriétés analogues de ces différentes courbes.

On a par là un moyen de transformer les propositions connues relatives à certaines courbes en d'autres qui se rapportent à des courbes moins examinées. L'emploi de ce moyen pour la *transformation homographique* et pour la *transformation par des polaires réciproques* est connu; mais comme en dehors de ces applications on ne s'en est pas beaucoup servi (*), je n'hésite pas à en ajouter une nouvelle.

Si x et y représentent les carrés des distances à deux points fixes F et F_1 du point qu'on veut déterminer par ces coordonnées, on peut leur donner les expressions

$$y = \eta^2 + (\xi + \alpha)^2, \quad x = \eta^2 + (\xi - \alpha)^2,$$

où ξ et η sont les coordonnées du point (x, y) prises dans un système orthogonal ayant pour axe des abscisses la droite FF_1 et pour origine le milieu du segment FF_1. Au moyen de ce système auxiliaire, on voit, tout aussi bien que par une discussion géométrique, d'abord qu'un couple de coordonnées détermine (outre deux points fixes imaginaires à l'infini) deux points qui peuvent coïncider ou devenir imaginaires, ensuite qu'une équation de la forme

$$ax + by = c, \tag{1}$$

(*) On trouve la plupart des autres applications connues dans le n° 258 de SALMON, *Higher plane curves*; Dublin, 1852.

qui pour un système ordinaire de coordonnées représente une droite, représente maintenant un cercle, dont le centre, toujours réel quand les constantes de l'équation sont réelles, est situé sur la droite indéfinie FF_1. Pour $a = 0$, $b = 0$ ou $c = 0$, on sait que la droite représentée par l'équation (1) dans le cas des coordonnées ordinaires est parallèle à l'un ou à l'autre des axes ou passe par l'origine; en employant nos nouvelles coordonnées, on trouve que le cercle représenté par l'équation (1) a l'un ou l'autre des points F et F_1 pour centre quand $a = 0$ ou $b = 0$, et qu'il divise harmoniquement le segment FF_1 quand $c = 0$. Les équations $y = 0$ et $x = 0$ représentent respectivement, suivant le système qu'on adopte, les axes de coordonnées ou les cercles qui se réduisent aux points F et F_1. Si dans deux équations de la forme (1) $\frac{a}{b}$ a la même valeur, les deux droites qu'elles représentent, dans le premier système, seront parallèles, et les cercles qu'elles représentent dans l'autre auront le même centre (seront aussi parallèles). Si les coordonnées sont prises dans un système orthogonal,

$$(2) \qquad \delta = \frac{ax_1 + by_1 - c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

exprime la distance du point (x_1, y_1) à la droite (1); si elles sont prises dans un système de coordonnées obliques, la même distance aura pour expression $m.\delta$, m variant seulement avec $\frac{a}{b}$, et si elles sont prises dans le système représenté par les équations (a),

$$\frac{ax_1 + by_1 - c}{a + b} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a + b}\,\delta = n\delta,$$

où n aussi dépend seulement de $\frac{a}{b}$, sera l'expression de la *puissance* (*) de chacun des points (x_1, y_1) relativement au cercle représenté par l'équation (1).

Au moyen de ces considérations, on peut trouver pour un système de cercles des propositions analogues à celles qui concernent un système de droites; mais nous avons pour but de transformer d'autres propositions.

Si x et y sont des coordonnées orthogonales ou obliques, l'éqnation

$$(3) \qquad x.y = d$$

représente une hyperbole équilatère ou ordinaire qui a les axes coordonnés pour asymptotes. Une droite quelconque parallèle à la droite

$$(4) \qquad ax + by = 0$$

rencontre l'hyperbole en deux points (réels ou imaginaires) qui sont, au signe près, à la même distance de la droite

$$(5) \qquad ax - by = 0.$$

Les droites (4) et (5), si l'hyperbole est équilatère, forment en sens opposé les mêmes angles avec les asymptotes, et en tout cas elles divisent harmoniquement les angles formés par les asymptotes. Une droite parallèle à la droite (4) menée par le point où la droite (5) rencontre la courbe sera une tangente.

Si x et y sont des coordonnées du nouveau système, l'équation (3) représente une *cassinienne* ou une *ellipse*

(*) On appelle *puissance* d'un point relativement à un cercle, la valeur constante du produit des deux segments que détermine ce cercle sur une droite passant constamment par le point, ces segments étant comptés depuis le point fixe jusqu'à ceux où la droite rencontre le cercle. La puissance ainsi définie sera positive ou négative, suivant que le point sera extérieur ou intérieur au cercle.

de Cassini, c'est-à-dire *le lieu des points dont les distances à deux points fixes donnent un produit constant*. Les équations (4) et (5) représentent maintenant deux cercles (dont l'un est imaginaire) qui divisent harmoniquement le segment FF_1 et dont les deux centres A et B, tous deux réels, divisent aussi harmoniquement le même segment. Un cercle quelconque qui a son centre au point A [centre du cercle (4)] rencontrera la courbe en quatre points formant deux couples de points qui respectivement ont les mêmes coordonnées et sont situés symétriquement par rapport à la droite FF_1. L'un des couples ou tous les deux peuvent être imaginaires. On voit que la puissance d'un point de l'un de ces couples relativement au cercle (5) est au signe près la même que celle d'un point de l'autre. Si l'un des couples est sur le cercle (5), l'autre y sera également, et par conséquent le cercle qui a son centre en A et passe par un des points de rencontre de la courbe avec le cercle (5), passant aussi par l'autre point du même couple, est, en ces deux points, tangent à la courbe. Par conséquent :

Deux points A *et* B *divisant harmoniquement le segment* FF_1 *formé par les deux foyers d'une cassinienne, si l'on décrit un cercle* (B) *qui a son centre au point* B *et qui divise aussi harmoniquement le segment* FF_1, *tout cercle qui aura son centre au point* A *rencontrera en général la courbe en quatre points dont les puissances relativement au cercle* (B) *ne diffèrent que par le signe.*

Et lorsqu'on fera passer ce cercle par un des deux couples de points P *et* P', *symétriquement situés par rapport à la droite* FF_1 *auxquels le cercle* (B) *rencontre la courbe, il sera tangent à la courbe en ce couple de points.*

Si le point B est pris sur le prolongement de FF_1, le cercle (B) sera réel, et l'un des couples de points où il rencontre la cassinienne pourra être réel.

Les foyers F et F_1 et le point P de la courbe étant donnés, on pourra, par des constructions bien simples, déterminer le point B et ensuite le point A, et la droite AP sera la normale de la courbe au point P. Nous pourrons ainsi, *quand les deux foyers et un point d'une cassinienne seront donnés, construire la tangente et la normale en ce point de la courbe.*

Si le point P est situé sur la droite FF_1, le point A sera le centre du cercle qui au point P a un contact du troisième ordre avec la courbe.

Si les points F, F_1 *et* A *sont donnés en ligne droite, on pourra construire le cercle* (B) *qui est le lieu des pieds des normales menées par le point* A *à toutes les cassiniennes ayant* F *et* F_1 *pour foyers.*

Dans les *Nouvelles Annales* (1861, p. 70), le théorème 26 énonce qu'*un système de cassiniennes ordinaires de mêmes foyers est coupé orthogonalement par un système d'hyperboles équilatères passant par les foyers et dont les centres coïncident avec celui des cassiniennes.* Cela se prouve très-facilement au moyen de notre théorème. En effet, faisons passer une hyperbole remplissant les conditions indiquées par un point arbitraire P d'une quelconque d'entre nos cassiniennes homofocales; menons par le point P la corde conjuguée du diamètre FF_1, et supposons qu'elle rencontre FF_1 en B'. On aura la relation

$$\overline{B'P}^2 = \overline{B'F}.\overline{B'F_1}.$$

Mais on a aussi

$$\overline{BP}^2 = \overline{BF}.\overline{BF_1},$$

et cette relation ne détermine sur FF_1 qu'un seul point B (le point de rencontre avec la droite qui au point P est tangente au cercle passant par P, F et F_1). Donc les points B et B′ coïncident. Le point A, qui est le conjugué harmonique de B relativement au segment FF_1, aura par conséquent PB pour polaire relativement à l'hyperbole; d'où il suit que la droite PA, qui est normale à la cassinienne au point P, est tangente à l'hyperbole au même point. Donc, etc.

La première partie de notre théorème sert *à trouver, au moyen de la règle et du compas, les foyers d'une cassinienne déjà décrite et dont on connaît l'axe.*

Les hyperboles qui ont les mêmes asymptotes sont semblables et semblablement placées, ayant leur centre de figure pour centre de similitude. On détermine des points correspondants par les droites dont les équations ont la forme (5). A ces hyperboles correspondent, comme nous l'avons montré, un système de cassiniennes homofocales, et les équations de la forme (5) représentent, au même temps, des cercles ayant leurs centres sur la droite FF_1 et divisant harmoniquement le segment FF_1. Prenons deux de ces cassiniennes que nous désignerons par (C) et (c), et deux de ces cercles (A) et (A_1); supposons que P et P′ forment le couple d'intersection de (C) et (A) dont les coordonnées x et y sont positives et qui seul peut être réel; appelons P_1 et P'_1 les points analogues pour (C) et (A_1), p et p' pour (c) et (A), p_1 et p'_1 pour (c) et (A_1).

D'une transformation de théorèmes connus relatifs à des figures semblables et semblablement placées on conclut : 1° que

$$\frac{FP}{Fp} = \frac{FP_1}{Fp_1} = \frac{F_1P}{F_1p} = \frac{F_1P_1}{F_1p_1},$$

et 2° que le cercle passant par les points P, P′, P_1 et P'_1

et celui qui passe par les points p, p', p_1 et p'_1 ont le même centre.

Au moyen de notre système de coordonnées, on peut encore trouver beaucoup d'autres propriétés des cassiniennes. Il sera aussi utile, pour trouver des propriétés d'autres courbes, par exemple celles des *ovales de Descartes* ou des *courbes aplanétiques* qui auront l'équation

$$a.x^{\frac{1}{2}} + b.y^{\frac{1}{2}} = c,$$

équation qui pour des coordonnées ordinaires représente une parabole tangente aux deux axes.

J'ai inséré la plus grande partie de ce que je viens d'exposer dans le *Journal de Mathématiques de Copenhague*, comme faisant suite à un essai d'une théorie générale et géométrique de cette espèce de transformations.

Nous ajouterons encore, sans démonstration, une manière de faire, au moyen de projections, la transformation d'une figure dont les points sont déterminés par des coordonnées ordinaires, orthogonales ou obliques, x et y, en une autre dont les points correspondants sont déterminés, dans le nouveau système que nous avons employé, par des coordonnées X et Y, liées à x et y par les équations

$$X = \lambda.x, \quad Y = \mu.y,$$

λ et μ étant des quantités constantes. La manière est la suivante :

On projette centralement la figure donnée sur une sphère touchant, aux points S *et* S_1, *les deux plans qui projettent les axes coordonnés, et au point* T *le plan mené par le centre de projection parallèlement au plan de la figure. Avec le point* T *comme centre, on pro-*

jette stéréographiquement la figure formée par la première projection, et l'on a la figure cherchée; les projections des points S *et* S_1 *sont les points fixes du système des coordonnées.*

On trouve comme corollaires les propositions suivantes :

1° *Lorsque deux plans tangents à un cône du second degré ainsi que le plan des génératrices de contact touchent une sphère, les deux premiers aux points* S *et* S_1, *le dernier au point* T, *si, en prenant* T *comme centre, on projette stéréographiquement la courbe d'intersection des deux surfaces, la projection sera une cassinienne ayant pour foyers les projections de* S *et de* S_1. *Réciproquement, la courbe sphérique dont la projection stéréographique est une cassinienne se trouve sur un cône du second degré situé de la manière que nous venons d'indiquer.*

2° *Les quatre plans tangents communs à un cône du second degré et à une sphère étant réels et ayant pour points de contact avec la sphère* Q, R, S et T, *si, prenant le point* T *comme centre, on projette stéréographiquement la courbe d'intersection des deux surfaces, la projection sera une ligne aplanétique dont les foyers sont les projections des points* Q, R et S. *Réciproquement, la courbe sphérique dont la projection stéréographique est une ligne aplanétique se trouve sur un cône du second degré situé de la manière que nous venons d'indiquer.*

Nous voyons donc qu'une ligne aplanétique a trois foyers, ce qu'on peut aussi prouver sans employer des considérations stéréométriques. Si, par une extension de la définition de ces courbes, on adopte aussi des lignes aplanétiques dont deux foyers sont imaginaires, il suffit que l'un des couples de plans tangents communs au cône et à la sphère soit réel.

M. Quetelet, dans le tome V des *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles,* a démontré que la courbe sphérique qui donne pour projection stéréographique une ligne aplanétique dans une *certaine position particulière* par rapport à la sphère, est située sur un cône du second degré. Néanmoins, on ne trouverait pas le cône dont ce savant fait usage comme un cas particulier de ceux que nous venons d'indiquer. Mais on doit se souvenir qu'une courbe sphérique située sur un cône du second degré est aussi sur trois autres. M. Quetelet prend pour base de son cône un cercle dont le centre est le point de l'œil ou le centre de projection, dont le plan est tangent à la sphère et dont le rayon est égal à celui de la sphère; notre cône devient dans ce cas un cylindre hyperbolique.