NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. DE JONQUIÈRES

Du contact des courbes planes, et en particulier des contacts multiples des sections coniques avec une même courbe d'ordre quelconque

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 218-222

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__218_0>

DU CONTACT DES COURBES PLANES,

et en particulier des contacts multiples des sections coniques avec une même courbe d'ordre quelconque ;

PAR M. E. DE JONQUIÈRES.

Parmi les questions relatives au contact des courbes planes, les premières qui se présentent, dès qu'on sort des contacts simples, sont les suivantes :

Étant donné un *réseau* de courbes du degré m, assujetties à $\frac{m(m+3)}{2} - 2$ (*) conditions communes, combien d'entre elles :

1° Touchent deux courbes données?

2° Touchent en deux points une courbe donnée?

3° Ont avec une courbe donnée un contact du second ordre?

Ces questions, sauf le cas où $m = 2$ (**), n'ont pas été, je crois, encore résolues d'une manière générale, même dans le cas le plus simple où les courbes données sont des lignes droites, et où les conditions qui déterminent le réseau sont des points communs à toutes les courbes qui le composent.

Toutefois, il est un cas particulier où les géomètres ont

(*) On sait qu'une courbe du degré m est déterminée par $\frac{m(m+3)}{2}$ conditions.

(**) La théorie des sections coniques est en effet beaucoup plus avancée, grâce aux remarquables travaux publiés récemment par M. Chasles dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séances des 1er et 15 février et 7 mars 1864).

réussi à surmonter les difficultés du problème : c'est celui où les courbes du réseau sont les *polaires premières* de tous les points du plan relatives à une seule et même courbe fixe tracée dans le plan, qui serait ici, par conséquent, du degré $(m+1)$ (*).

Avant d'aborder les contacts multiples des sections coniques, je vais traiter un autre cas particulier des questions ci-dessus énoncées, qui ne me paraît pas avoir encore été examiné. Je veux parler de celui où les courbes du réseau d'ordre m, indépendantes d'ailleurs de toute subordination de polarité, ont en commun un point multiple d'ordre $(m-1)$, et, en outre, $2(m-1)$ autres points simples, ce qui équivaut à $\frac{m(m+3)}{2} - 2$ points communs. Ce sera un pas de plus fait vers la solution, encore désirée, du cas plus général où les courbes du réseau ont en commun $\frac{m(m+3)}{2} - 2$ points simples.

La solution que je présente dérive immédiatement de l'emploi de la méthode de transformation des figures, qui a fait le sujet d'un Mémoire récemment inséré par moi dans les *Nouvelles Annales* (**). Dans ce mode de transformation, à toute droite de l'une quelconque des deux figures, il correspond, dans l'autre, une courbe d'ordre m, douée, en un point fixe, d'un point multiple d'ordre $(m-1)$ et passant par $2(m-1)$ autres points invariables; et, à une courbe d'ordre n, il correspond, dans l'autre figure, une courbe d'ordre mn douée de $2(m-1)$ points multiples d'ordre n, ainsi que d'un point multiple d'ordre $n(m-1)$, lesquels équivalent ensemble, comme

(*) CHASLES, Cours de la Sorbonne, 1857. — CREMONA, *Introduzione ad una teoria delle curve piane*, p. 79; 1862.

(**) Livraison de mars 1864, p. 97.

on sait, à

$$2(m-1).\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(m-1)[n(m-1)-1]}{2}$$
$$=\frac{n(m-1)(mn+n-3)}{2}$$

points doubles.

D'après cela, les trois questions proposées plus haut (si l'on désigne, pour abréger, par r et r' les degrés des transformées des courbes données C^n, $C^{n'}$, et par D et D' les nombres respectifs de leurs points doubles) se réduisent aux suivantes, savoir :

1° Quel est le nombre N des tangentes communes aux deux courbes transformées C^r, $C^{r'}$?

2° Quel est le nombre T des tangentes doubles de C^r?

3° Quel est le nombre I des tangentes d'inflexion de C^r?

Or, on sait, par la théorie des courbes, qu'il existe, entre les nombres r, r', D, D' et ceux qu'on cherche, les relations

$$N=[r(r-1)-2D][r'(r'-1)-2D'],$$
$$T=\frac{1}{2}r(r-2)(r^2-9)-2D(r^2-r-6)+2D(D-1),$$
$$I=3r(r-2)-6D.$$

Si l'on y substitue à r, r', D, D', les valeurs données dans le Mémoire cité, savoir :

$$r=mn,\quad r'=mn',\quad D=\frac{n(m-1)(mn+n-3)}{2},$$
$$D'=\frac{n'(m-1)(mn'+n'-3)}{2},$$

on trouve, après quelques réductions très-simples, les trois formules

1° $\qquad nn'(n+2m-3)(n'+2m-3),$

2° $$\frac{1}{2}n^2\overline{(n+2m-3)}^2 - n(5n+6m-15),$$

3° $$3n(n+m-3),$$

qui répondent, respectivement, aux trois questions proposées.

Si l'on y fait $m = 2$, elles conviennent à des coniques passant par trois points donnés. Les deux dernières deviennent, dans cette hypothèse,

$$\frac{n(n-1)}{2}(n^2+3n-6), \quad 3n(n-1),$$

et ont été déjà données par quelques géomètres, qui les ont démontrées d'une manière différente.

Avant d'obtenir ces deux formules, relatives à un réseau de sections coniques qui passent par trois points fixes, au moyen de la méthode de transformation dont je viens de donner une application plus générale, j'y avais été moi-même conduit il y a longtemps par une autre voie, moins rigoureuse à la vérité, mais qui a l'avantage d'ouvrir un accès vers les questions d'un ordre plus élevé, où il s'agit des contacts multiples des sections coniques avec une seule et même courbe donnée. Je me bornerai à énoncer ici les formules principales auxquelles on parvient ainsi. Elles sont exactes, je crois; mais on pourra, si l'on veut, n'y voir qu'une première indication propre à guider dans des recherches définitives sur ce sujet très-ardu.

Formules exprimant le nombre des coniques qui satisfont à cinq conditions dénommées.

I. Passer par deux points et toucher une courbe C^n en trois points distincts :

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}(n^3+6n^2-19n-12).$$

II. Passer par un point et toucher une courbe en quatre points distincts :

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(n^4+10n^3-37n^2-118n+282).$$

III. Toucher une courbe en cinq points distincts :

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}$$
$$\times(n^5+15n^4-55n^3-495n^2+1584n-35).$$

Par exemple, il y a 1135 coniques qui touchent en cinq points une courbe du cinquième ordre.