NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

POUDRA

Théorème de Desargues

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 202-217

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__202_1>

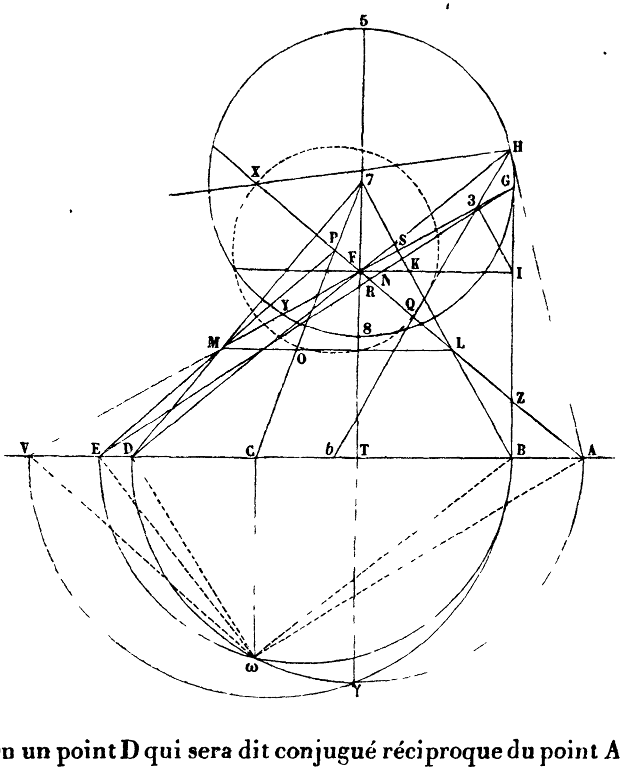
THÉORÈME DE DESARGUES (*);

PAR M. POUDRA.

Soit HG8Y5 une conique quelconque, et dans son plan une droite AV. Soit F le pôle de cette droite relative-

(*) *Voir* les *Œuvres*, p. 215, fig. 19, et les *Nouvelles Annales*, t. XX, p. 94 et 449.

ment à cette conique. La polaire d'un point quelconque A de cette droite AV sera la droite HFD passant par le point F et par les deux points de contact des tangentes menées du point A à la conique ; cette polaire rencontrera la droite AV



en un point D qui sera dit conjugué réciproque du point A, parce que la polaire FA de ce point D passe par le point A et réciproquement. A un autre point B de la droite AV correspondrait de même un point conjugué V, et ainsi de suite.

On peut donc concevoir sur la droite AV une série de couples de points conjugués, tels que A, D ; B, V ;..., relativement à la conique donnée. Ces points formeront une involution. Si l'on prenait un point à l'infini sur la droite AV, son conjugué serait déterminé par le diamètre 578T, qui est la polaire de ce point, et l'on sait que le point T ainsi déterminé est le centre de cette involution.

Considérons maintenant sur la droite AF une série de couples de points en involution et ainsi formée. Sur la droite AF prenons d'abord deux points X et Q conjugués harmoniques des points A et F, c'est-à-dire tels qu'on ait

$$\frac{QF}{QA} = \frac{XF}{XA}.$$

On sait que chaque segment d'une involution est divisé harmoniquement par les deux points moyens. Or, comme les points X et Q divisent harmoniquement le segment AF, nous pouvons considérer ces deux points X et Q comme les deux points moyens de l'involution; de sorte que le point P, milieu du segment XQ, sera le centre de cette involution, et l'on aura

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PX}^2 = \overline{PA}.\overline{PF}.$$

Donc si sur QX comme diamètre on décrit une circonférence, chaque point de la droite AF, tel que Z, aura pour point conjugué de l'involution un point tel que R, situé sur la polaire du point Z relativement à cette circonférence, de sorte que ces points, Z et R, seront bien conjugués harmoniques des points X, Q et formeront sur AF une involution dont le centre sera le point P.

Voici maintenant l'énoncé du théorème de Desargues :

Si par une des extrémités Z d'un segment ZR de l'involution située sur AF, on mène à la conique la tangente ZG et qu'on joigne le point de tangence G avec l'autre extrémité R du segment, les deux droites GZ, GR rencontreront la droite AV respectivement en deux points B et E. Si l'on prend, dans cette involution, un autre segment, on obtiendra par la même construction deux autres points analogues, et ainsi de suite; on voit donc qu'à chaque segment sur AF correspondra un segment sur AV : ainsi, lorsque le point Z sera en A, le point F étant le conjugué du point A, il en résultera que AD sera, sur AV, le segment correspondant à AF. Il s'agit de demontrer que les segments tels que BE, AD,..., ainsi déterminés, forment sur AV une seconde involution dont le centre C sera déterminé par la droite 7P qui joint le centre de la courbe au point P, milieu du segment XQ, et centre de l'involution située sur AF, comme on l'a vu plus haut.

Nous ferons d'abord remarquer que d'une extrémité Z d'un des segments on peut mener à la conique deux tangentes, et que par suite à un segment ZR il correspondra deux segments sur AV. On voit de même qu'à un segment tel que BE sur la droite AV correspondront deux segments sur AF.

On remarquera encore que les deux involutions situées sur AV auront en commun le segment AD qui ne correspondra sur AF qu'au seul segment AF.

La démonstration du théorème de Desargues repose sur quatre propositions préliminaires.

Première proposition. — Sur la droite AV considérons les deux segments AD, BV comme faisant partie de la première involution. Joignons le centre 7 de la conique aux points B et D et le point F aux points V et A; la droite 7B rencontre AF au point L, et la droite 7D rencontre VF au point M. Démontrer que la droite LM est toujours parallèle à la droite AV, quels que soient les deux segments AD, BV de l'involution.

Démonstration. — Le triangle VFT, coupé par la transversale 7MD, donne

$$\frac{7D}{7F} = \frac{DT}{DV} \cdot \frac{MV}{MF}.$$

De même, AFT, coupé par la transversale 7LB, donne

$$\frac{7T}{7F} = \frac{BT}{BA} \cdot \frac{LA}{LF}.$$

Donc on a

$$\frac{DT}{DV} \cdot \frac{MV}{MF} = \frac{BT}{BA} \cdot \frac{LA}{LF}.$$

Mais puisque le point T est le centre de l'involution des segments BV, AD, on a

$$TA.TD = TB.TV,$$

et comme

$$TA = TB + BA \quad \text{et} \quad TV = TD + DV,$$

on aura

$$(TB + BA)\,TD = TB\,(TD + DV)$$

ou

$$BA.TD = TB.DV$$

ou

$$\frac{DT}{DV} = \frac{BT}{BA};$$

on aura donc

$$\frac{MV}{MF} = \frac{LA}{LF},$$

c'est-à-dire que LM est parallèle à AV, ce qu'il fallait démontrer.

Deuxième proposition. — Par le pôle F menons la droite FNKI rencontrant en N la droite GE, en K la droite 7LB, en I la droite GZB. Par le point I traçons la droite I3 parallèle à 7LB et rencontrant en 3 la droite GFV. Démontrer qu'on a

$$EV . FK = FI . FN.$$

Démonstration. — D'abord, à cause des parallèles AV, FN, on a

$$\frac{GV}{GF} = \frac{EV}{FN}.$$

De même, à cause de I3 parallèle à SKB, on a

$$\frac{F3}{FS} = \frac{FI}{FK}.$$

Sur la droite GSPYMV les couples de points F, V ; G, Y forment une involution dont le centre est le point S où la droite 7B rencontre la polaire GV du point B; il en résulte

$$\frac{GF}{YF} = \frac{GV}{YV},$$

d'où

$$\frac{GF + YF}{YF} = \frac{GV + YV}{YV} \quad \text{ou} \quad 2 . \frac{SG}{YF} = 2 \frac{YV + SY}{YV} = 2 \frac{SY}{YV};$$

donc

$$\frac{SG}{YF} = \frac{SV}{YV} \quad \text{ou} \quad \frac{YF}{YV} = \frac{SG}{SV}.$$

Mais

$$\overline{SG}^2 = SF . SV, \quad \text{d'où} \quad \frac{SG}{SV} = \frac{SF}{SG};$$

donc

$$\frac{YF}{YV} = \frac{SF}{SG}.$$

Mais

$$\frac{GF}{YF} = \frac{GV}{YV} \quad \text{ou} \quad \frac{YF}{YV} = \frac{GF}{GV};$$

donc

$$\frac{SF}{SG} = \frac{GF}{GV}, \quad \text{ou} \quad \frac{GV}{GF} = \frac{SG}{SF} = \frac{GS}{SF}.$$

Desargues donne immédiatement ce dernier résultat comme une des propriétés de l'involution.

A cause de FI parallèle à VA, on a

$$\frac{GB}{GI} = \frac{GV}{GF},$$

et, à cause de SB parallèle à I3,

$$\frac{GB}{GI} = \frac{GS}{G3} = \frac{GV}{GF}:$$

donc

$$\frac{GS}{SF} = \frac{GS}{G3},$$

d'où résulte que

$$G3 = SF \quad \text{et, par suite,} \quad GS = F3.$$

Ainsi on a

$$\frac{EV}{FN} = \frac{GV}{GF} = \frac{SG}{SF} = \frac{F3}{FS} = \frac{FI}{FK},$$

d'où

$$EV.FK = FN.FI,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Troisième proposition. — Les trois points P, M, E sont en ligne droite.

Démonstration. — Comme conséquence de l'involution qui existe sur AF on a

$$\frac{PA}{PF} = \frac{AZ}{FZ} \cdot \frac{AR}{FR};$$

mais les deux triangles semblables ARE, FRN donnent

$$\frac{AR}{FR} = \frac{AE}{FN};$$

les triangles AZB, FZI donnent pareillement

$$\frac{AZ}{FZ} = \frac{AB}{FI}.$$

Donc on a

$$\frac{PA}{PF} = \frac{AZ}{FR} \cdot \frac{AR}{FR} = \frac{AE}{FN} \cdot \frac{AB}{FI};$$

mais par la deuxième proposition

$$FN.FI = EV.FK,$$

donc

$$\frac{PA}{PF} = \frac{AE.AB}{EV.FK};$$

mais à cause des triangles semblables ALB, FLK et AFV, FLM on a

$$\frac{AB}{FK} = \frac{LA}{LF} = \frac{MV}{MF},$$

donc

$$\frac{PA}{PF} = \frac{AE}{EV} \cdot \frac{MV}{MF}:$$

c'est la propriété du triangle AFV coupé par la transversale EMP aux points E, P, M, qui sont ainsi en ligne droite.

Quatrième proposition. — Démontrer qu'on a

$$CA.CD = CB.CE = \ldots,$$

et qu'ainsi ces segments forment sur AV une involution dont le point C est le centre.

Démonstration. — De ce que ML est parallèle à AV, les trois droites 7MD, 7OC, 7LB donnent

$$\frac{OL}{OM} = \frac{CB}{CD},$$

et les trois droites PME, POC, PLA, dont le sommet P est sur la même droite γPC, donnent aussi

$$\frac{OL}{OM} = \frac{CA}{CE};$$

donc

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CA}{CE},$$

d'où

$$CA.CD = CB.CE = \ldots .$$

Telle est donc la démonstration de ce théorème important de Desargues, théorème qui, je crois, a échappé jusqu'ici aux géomètres. En voici maintenant les conséquences.

La réciproque de cette proposition serait celle-ci :

Étant donnée une conique HG8Y5 et une droite AV dans son plan, on détermine d'abord sur cette droite les couples de points A, D; B, V;..., conjugués relativement à la conique et formant sur AV une involution dont le centre est le point T. Étant donnée ensuite sur cette même droite AV une autre involution quelconque dont le centre serait un point tel que C, on demande de trouver : 1° le segment commun à ces deux involutions; 2° les couples de points, sur AF polaire d'une des extrémités de ce segment commun, formánt sur cette droite une involution; 3° de déterminer le centre P de cette involution et les deux points moyens X et Q qui, dans l'exemple, sont réels, mais qui peuvent être imaginaires.

Pour déterminer le segment commun AD aux deux involutions, il suffit de remarquer que toutes les demi-circonférences décrites sur les segments d'une même involution, comme diamètres, passent par un même point. Ainsi les demi-circonférences décrites sur AD, BV,... comme diamètres passent par le même point γ. De même, celles qu'on décrit sur AD, BE,..., de la seconde involution passent par le même point ω. Donc la demi-circonférence qui passera par les deux points γ et ω déterminera le segment commun AD.

AF sera la polaire de l'extrémité D de ce segment et DF celle de l'autre extrémité A.

Pour avoir sur AF les couples de points tels que Z, R qui forment sur cette droite une involution, on voit qu'il suffit, par une des extrémités B d'un des segments de la seconde involution, de mener à la conique une tangente BG qui rencontrera la polaire AF au point Z, puis de joindre le point de tangence G à l'autre extrémité E du segment, et cette droite GE rencontrera AF au point R conjugué de Z. Et ainsi pour les autres.

En joignant le centre γ de la courbe au point C centre de la seconde involution, cette droite γC rencontrera AF au point P centre de l'involution sur AF.

Les deux points moyens X et Q se détermineront par la propriété

$$\overline{PX}^2 = \overline{PQ}^2 = PF.PA = PR.PZ = \ldots.$$

Ici se trouve une observation importante : c'est que si le point P se trouve du même côté de chaque segment RZ, AF,..., les deux points moyens de l'involution sont, comme on le sait, tous les deux réels; mais si, au contraire, il était engagé entre les extrémités d'un des segments, auquel cas il le serait pour tous, alors, dans ce cas, les deux points moyens seraient imaginaires; c'est ce qui arrive en effet pour le point d'intersection de la droite γC avec DF qui se trouve entre les extrémités du segment DF. Ainsi, il y aurait aussi sur DF, comme sur AF, une involution, mais sur DF les deux points doubles sont imaginaires; et il est facile de voir que, quelle que soit la position du point C, il y aura toujours une des deux, et une seulement, pour laquelle les deux points doubles seront réels.

Une autre observation à faire, c'est que la droite AV peut avoir, par rapport à la conique, trois positions distinctes : 1° être extérieure à la courbe, comme dans la figure; 2° couper la courbe, et 3° lui être tangente. Nous venons de voir que, lorsque cette droite est extérieure, il y a deux points X et Q réels, et deux points imaginaires. Si la droite AV coupait la courbe et devenait dans la figure la droite VF, auquel cas VF deviendrait VA, le point F devenant le point A et réciproquement, alors l'involution sur VA, qui est donnée, deviendrait une involution sur VF, de manière que le centre C d'involution deviendrait un point de cette droite, et alors la droite qui joint ce point au centre de la courbe déterminerait de même sur AF le point P qui serait de même le centre d'une involution dont les points moyens X et Q seraient réels, tandis que cette même droite rencontrerait AV, dans l'ancien point C compris entre les extrémités d'un segment, et, par conséquent, les points doubles de l'involution située sur AV seraient imaginaires.

Enfin, si la droite AV était tangente à la courbe au point T, alors les points F, 8, A se trouveraient réunis en T, point qui serait une des extrémités commune à tous les segments de la première involution AD, BV,...; par conséquent, le segment AD commun aux deux involutions aurait ce point T pour une de ses extrémités, et alors la polaire AF de son autre extrémité D serait une droite passant aussi par ce point T, et le point T serait le point double Q de l'involution déterminée sur cette polaire; le centre de l'involution serait toujours le point P déterminé par l'intersection de cette polaire et de la droite γC qui joint le centre γ de la courbe avec le centre C de la seconde involution située sur AV; de sorte que le second point double X serait de l'autre côté de P relativement à Q et à une distance $PQ = PT$.

Applications.

Etant donné un cône ayant pour base la conique donnée; étant donnée la direction d'un plan sécant, on demande de trouver, sur la base du cône, le point qui deviendra le centre de la section; les droites qui deviendront des diamètres conjugués; celles qui deviendront les axes; les droites qui deviendront les tangentes et les normales à la courbe; enfin les points qui deviendront les foyers.

Par le sommet ω de ce cône, on mène un plan parallèle au plan sécant : il coupera le plan de la base suivant une droite AV, laquelle, relativement à la base du cône, peut avoir trois positions : être extérieure à la courbe, la couper en deux points, ou être tangente.

Rabattons, sur le plan de la base, le plan mené par le sommet en le faisant tourner autour de AV comme charnière; le sommet du cône se rabattra en un point quelconque ω de ce plan.

Sur cette droite AV on commence par déterminer la série de couples de points A, D; B, V;..., conjugués relativement à la base. En décrivant sur chacun des segments AD, BV,..., comme diamètres des demi-circonférences, elles se couperont toutes en un point γ, et la perpendiculaire γT à AV déterminera le centre T de l'involution formée par ces segments.

Du point ω, qui représente le sommet du cône, on abaisse sur AV la perpendiculaire ωC et on regarde ce point C comme le centre d'une autre involution située sur AV, et dont les points conjugués A, D; B, E;....

soient tels, que l'on ait

$$\overline{\omega C}^2 = CA.CD = CB.CE = \ldots.$$

Puisque la longueur $C\omega$ est connue, on pourra donc avoir autant qu'on voudra de couples de points de cette involution ; toute demi-circonférence dont le centre sera sur la droite AV et qui passera par le point ω déterminera, par ses intersections avec la droite AV, deux de ces points.

Connaissant les deux points ω et γ, celle de ces circonférences qui passera en même temps par ω et γ donnera les deux extrémités A et D du segment commun aux deux involutions.

La polaire de l'extrémité D de ce segment sera la droite AF, celle de l'autre extrémité A sera DF. Ces deux droites se coupent en F qui est le pôle de la droite AV relativement à la conique. Par ce point F passeront toutes les cordes de contact des deux tangentes menées à la conique, d'un même point quelconque de la droite AV, et de plus chacune de ces cordes passant par F et prolongée jusqu'à la droite AV sera divisée harmoniquement par ses deux points d'intersection avec la conique.

On joint le centre γ de la courbe au centre C de la deuxième involution située sur AV ; cette droite rencontrera la droite AF, ou DF, en un point P tel, que les points A et F ou D et F soient du même côté du point P. Dans la figure, c'est sur la droite AF que se trouve ce point.

Sur la droite AF on détermine les points conjugués tels que Z, R d'une involution dont le point P est le pôle. Pour cela, par une des extrémités B d'un des segments BE de l'involution située sur AV et dont C est le centre, on mène la tangente BG rencontrant AF en Z, puis on joint le point de tangence G avec l'autre extrémité E de ce segment; la droite GE rencontrera AF au point R conjugué de Z, et ainsi de suite pour les autres segments de cette involution.

Connaissant sur AF les segments qui forment une involution dont P est le centre, il sera facile de déterminer les points doubles X et Q de cette involution ; il suffit de prendre X et Q tels que

$$\overline{PX}^2 = PQ^2 = PR.PZ = PF.PA = \ldots.$$

Toutes ces constructions achevées, observons que le plan mené par le sommet étant parallèle au plan sécant, il en résulte que toute droite joignant le sommet ω du cône avec un des points quelconques de la trace AV de ce plan sera parallèle au plan sécant, c'est-à-dire ne le rencontrera qu'à l'infini, et qu'ainsi la droite indéfinie AV donnera dans le plan sécant naissance à une droite à l'infini. Par suite, tout faisceau de droites du plan de la base du cône, qui a son sommet en un point tel que A de la droite AV, donnera dans le plan sécant naissance à un faisceau de droites parallèles entre elles et de plus parallèles à la droite ωA qui joint le sommet du cône à ce point A. De même, le faisceau de droites dont D serait le sommet donnera naissance à un faisceau de droites parallèles à ωD, et l'angle formé par les directions de ces deux faisceaux de droites parallèles sera égal à celui des deux droites ωA, ωD qui joignent le sommet du cône aux deux sommets A et D des faisceaux primitifs. Si l'angle de ces deux droites est droit, l'angle de ces deux directions sera donc aussi droit.

D'après cela, il est évident :

1° Que la droite qui joint le sommet ω du cône avec le point F percera le plan sécant au centre de la courbe;

2° Que deux droites telles que BF, VF, qui joignent le point F à deux points B et V conjugués dans l'involution dont T est le centre, donneront deux diamètres conjugués dont l'angle sera égal à l'angle $V\omega B$;

3° Que les deux droites FA, FD, qui joignent le point F aux deux extrémités A et D du segment commun aux deux involutions, donneront les axes de la courbe;

4° Que les droites telles que GB, GE, dont l'une est la tangente à la base au point G et l'autre est la droite qui joint le point G au point E conjugué de B dans l'involution dont le centre est C, donneront naissance à deux droites dont la première sera une tangente à la courbe de section au point correspondant à G; de plus, que cette tangente sera parallèle à la droite ωB, la seconde sera une droite parallèle à ωE : or, comme les deux points B, E de la seconde involution sont les extrémités de demi-circonférences passant par ω, il s'ensuit que ces deux droites ωB, ωE sont toujours rectangulaires; il en résulte que si la droite GB reste une tangente à la courbe, la droite correspondante à GE sera la normale.

5° Enfin les droites qui joignent le sommet ω du cône aux points X et Q perceront le plan en des points qui seront les foyers de la section.

En effet, les points X et Q divisent harmoniquement les segments tels que AF, ZR, ... Donc, si on joint le point tel que H de la courbe aux points X, Q, F, A, ces quatre droites formeront un faisceau harmonique qui donnera naissance dans la section à un autre faisceau harmonique; les droites HF, HA auront pour correspondantes des droites qui seront parallèles aux droites ωD, ωA qui sont rectangulaires, donc elles seront aussi rectangulaires. Mais dans un faisceau harmonique, si deux des droites conjuguées du faisceau sont rectangulaires, les deux autres doivent être les bissectrices des deux premières. De même, si, en un autre point quelconque G de la base, on mène la tangente GZB, puis qu'on joigne ce point G aux quatre points

X, Q, B, E, on obtiendra un faisceau harmonique auquel correspondra dans la section un autre faisceau harmonique; les deux droites correspondantes à GB et à GE seront l'une la tangente et l'autre la normale, et par suite celles qui correspondent à GX et à GQ seront les deux bissectrices de l'angle de cette tangente et de cette normale, et cela ayant lieu pour tous les points de la courbe, il en résulte que les points correspondants à X et à Q sont les foyers de la courbe.

Si la droite AV est extérieure à la base, on obtient pour la section une ellipse. Si elle coupe la base, on aura une hyperbole, puisque les deux points où cette droite coupe la courbe passent à l'infini; les tangentes en ces deux points de la base deviendront les asymptotes de la section. Les foyers seront toujours les points correspondants aux points X et Q, et seront situés dans la partie concave de la courbe. Si la droite AV était tangente à la base en T, ce point T passant à l'infini avec le point double Q, on obtiendrait une parabole dont l'un des foyers serait à l'infini.

Outre les foyers réels sur l'un des axes de la section, il y en a deux imaginaires sur l'autre axe.

Enfin, en prenant pour base du cône un cercle, on voit que par cette admirable proposition de Desargues, on peut déduire les propriétés des sections coniques des propriétés connues du cercle qui forme la base du cône.