NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. DARBOUX

Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 199-202

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__199_1>

THÉORÈMES SUR L'INTERSECTION D'UNE SPHÈRE ET D'UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. G. DARBOUX.

---

1. Si l'on coupe une surface quelconque du second degré par une sphère, la ligne d'intersection jouit des propriétés focales suivantes.

On peut trouver trois points sur la sphère tels, que si r, r', r'' désignent les distances d'un point quelconque de la courbe à ces trois points, on ait

$$ar + a'r' + a''r'' = 0,$$

a, a', a'' étant des constantes.

2. Ces points, que nous pouvons appeler des foyers de la courbe, se déterminent de la manière suivante :

On mène les quatre plans tangents communs à la sphère et à un des quatre cônes du second degré passant par la courbe d'intersection : on a quatre points de contact situés sur un petit cercle de la sphère. Trois quelconques de ces quatre points sont les points cherchés.

3. Puisque quatre cônes passent par la ligne d'intersection, on trouvera quatre groupes de foyers situés sur quatre petits cercles. Les plans de ces quatre petits cercles formeront un tétraèdre conjugué; par suite les cercles se couperont deux à deux à angle droit.

Les seize foyers ne peuvent être tous réels ; en effet, il y a toujours un des quatre cercles qui est imaginaire.

4. La projection stéréographique de la courbe d'intersection donne les ovales de Descartes. Il suffit de placer le point de vue en un quelconque des seize foyers. Il suit de là que les ovales de Descartes ont seize foyers disposés quatre à quatre sur trois cercles orthogonaux et sur une droite qui contient leurs centres, l'axe des ovales (*).

5. Les résultats précédents ont lieu quand on coupe par des sphères ou par des plans les surfaces réciproques des sur-

---

(*) Cette droite est la perspective du cercle qui passe par le point de vue : elle contient les trois points qu'on nomme plus particulièrement *foyers de la courbe.*

Si l'on transforme les ovales de Descartes par rayons vecteurs réciproques, en prenant le pôle en un quelconque des seize foyers réels ou imaginaires, on a encore des ovales de Descartes.

faces du second ordre, en particulier le tore et la cyclide.

6. Extension du théorème de M. Dandelin. Coupons une surface de révolution du second degré par une sphère. Menons une seconde sphère tangente à la première et tangente en même temps à la surface de révolution en tous les points d'un parallèle. Il y a quatre sphères satisfaisant à ces conditions. Les quatre points de contact situés sur la sphère sécante appartiennent à un grand cercle. Prenons arbitrairement deux de ces points : on aura pour tout point de la courbe d'intersection

$$r + kr' = a,$$

r, r' désignant les distances du point de la courbe aux deux points choisis. On a ainsi sur la sphère l'analogue des ovales de Descartes. Au reste, la projection stéréographique de la courbe sphérique donne les ovales dans le plan (*).

7. Les ovales de Descartes ont une infinité de foyers situés sur une courbe plane du troisième degré dont le plan passe par l'axe et est perpendiculaire au plan des ovales. On a, entre les distances d'un point des ovales à deux points quelconques de cette courbe, une relation de la forme

$$\mu r + \mu' r' = \text{const.}$$

L'équation de la courbe du troisième degré est

$$y^2 = \frac{x(c+x)\left[\dfrac{a^2-c^2}{c} - x(1-n^2)\right]}{c + x(1-n^2)}.$$

8. La surface engendrée par la révolution des ovales

(*) Si la sphère se réduit à un plan, on a $k = 1$, et $r + r' = a$. C'est le théorème de Dandelin étendu à une surface de révolution (*voir* SAUZE, *Nouvelles Annales*, t. XVII, p. 33). Pour une autre extension de ce théorème, *voir* CHASLES, *Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 167.

de Descartes autour de leur axe n'admet pour sections planes que des cercles et des ovales de Descartes.

9. Nous avons vu que la courbe d'intersection d'une surface du second degré et d'une sphère a seize foyers. Si par les quatre cercles orthogonaux qui contiennent ces seize foyers nous faisons passer quatre sphères orthogonales à la proposée et qui, par suite, seront orthogonales entre elles, sur chacune de ces sphères, il y aura une courbe qu'on pourra appeler focale; car trois points de cette courbe choisis arbitrairement seront trois foyers, c'est-à-dire qu'il y aura une relation linéaire et homogène entre les distances d'un point quelconque de la courbe à ces trois points. Cette courbe focale sera du quatrième degré, mais elle ne sera coupée qu'en quatre points par un petit cercle.

10. Menons une sphère quelconque qui coupe la sphère donnée suivant un petit cercle doublement tangent à la courbe d'intersection. La longueur de la tangente à cette sphère menée d'un point quelconque de la courbe s'exprimera par une équation de la forme

$$t = \mu r + \mu' r',$$

r, r' étant les distances du point à deux foyers situés sur la même courbe focale.