Nouvelles annales de mathématiques

Solution de questions proposées dans les Nouvelles annales

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 3 (1864), p. 168-175
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1864_2_3__168_1>

SOLUTION DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 419

(voir t. XVII, p. 32);

PAR M. J. DE VIRIEU.

La surface d'un triangle dont les côtés sont donnés en nombres entiers ne saurait être rationnelle si, les côtés *étant débarrassés du facteur commun 2, la somme des quotients est impaire.*

1. a, b, c étant des entiers absolus qui représentent les côtés d'un triangle, si l'on désigne son aire par s, on a

$$(4s)^2 = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = \mathrm{M}.$$

2. Si le périmètre est impair, ou les trois côtés sont impairs, ou l'un d'eux est impair et les autres pairs.

1er Cas : a, b, c *impairs.* — a^4, b^4, c^4, a^2b^2, b^2c^2, c^2a^2 étant les carrés de nombres impairs, chacun d'eux est de la forme $8\mu + 1$, et par suite M est de la forme $8\mu + 3$; M ne peut donc être un carré.

2e Cas : a, b *pairs*, c *impair.* — $a^4 + b^4 + c^4$ est de la forme $8\mu + 1$, $2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$ de la forme 8μ, et par suite M est de la forme $8\mu - 1$; donc M n'est pas un carré.

3. Donc les *côtés d'un triangle étant représentés par des nombres entiers, si le périmètre est impair, l'aire ne peut être un nombre rationnel.*

On en déduit que, l'aire d'un triangle dont les côtés sont des entiers ne peut être rationnelle, si le quotient de son périmètre par le plus grand commun diviseur entre les côtés est impair.

En effet, soit D ce plus grand commun diviseur, et posons

$$a = \mathrm{D}\alpha, \quad b = \mathrm{D}\beta, \quad c = \mathrm{D}\gamma,$$

d'où

$$\frac{a+b+c}{\mathrm{D}} = \alpha + \beta + \gamma,$$

le rapport entre les aires des triangles ayant pour côtés respectifs : a, b, c; α, β, γ; or l'aire du dernier est irrationnelle si son périmètre $\alpha + 6 + \gamma$ est impair; donc, etc.

En supposant $D = 2$, on tombe sur la proposition à démontrer.

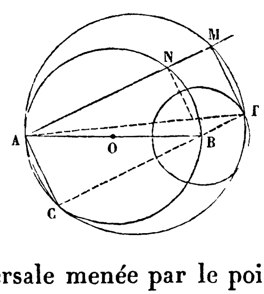
Question 665

(voir 2e série, t. II, p. 371),

PAR M. HAAG,
Élève de l'École Polytechnique.

Étant donnée une série de limaçons de Pascal, décrits avec la même circonférence et ayant même point double, par ce point on trace une transversale, et on fait passer une circonférence par le point double et par chaque point d'intersection, tangente à la courbe en ce point : toutes ces circonférences ont même axe radical, et lorsque la transversale tourne autour du point double, cet axe radical tourne autour de ce point et le second point commun à toutes les circonférences décrit un cercle. (CH. DELEWAQUE.)

Soit O le cercle qui sert à décrire la série de limaçons considérée, A leur point double commun, AB leur axe,



AN une transversale menée par le point double et coupant le cercle O en un second point N. J'appelle M le point où cette transversale rencontre l'un des limaçons de la série : la perpendiculaire élevée en ce point sur AM est tangente en T au cercle décrit de B comme centre avec NM pour rayon, et l'on sait que le cercle décrit sur AT comme diamètre est tangent en M au limaçon considéré. Il s'agit donc de prouver que tous les cercles obtenus de cette manière en faisant varier la longueur NM ont même axe radical. Or, si nous prolongeons TB jusqu'en son second point d'intersection C avec le cercle O, l'angle ACB étant droit, le cercle AT passera en C, et comme la position de ce point C dépend seulement de la direction de la transversale AN, et point de la longueur NM qui caractérise chaque limaçon, tous les cercles tels que le cercle décrit sur AT passent par les points fixes A et C, et ont par conséquent même axe radical. Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de remarquer que le point C décrit le cercle O lorsque la transversale AN tourne autour du point double.

Note. — La même question a été résolue par MM. Hans, élève du lycée Saint-Louis; Mirza-Nizam, élève externe à l'École Polytechnique; Paul Mansion; Debatisse, élève du lycée Charlemagne; M. Laquière, lieutenant d'artillerie.

Même question (solution analytique) ;

PAR M. ABRAHAM SCHNÉE,
Élève du lycée Charlemagne.

Une série de limaçons de Pascal, décrits avec la même circonférence et ayant même point double, est représentée (BRIOT et BOUQUET, p. 25) par l'équation

$$\rho = b\cos\omega + a, \tag{1}$$

où a est un paramètre variable.

Soit

$$\omega = \alpha = \text{constante}$$

l'équation d'une transversale tracée par le point double.

Un cercle passant par ce point a pour équation

$$(2) \qquad \rho = 2d\cos(\omega - k),$$

en désignant par d et k les coordonnées polaires du centre. Mais ce cercle doit aussi passer par le point d'intersection de la courbe (1) avec la transversale, d'où la condition

$$b\cos\alpha + a = 2d\cos(\alpha - k).$$

En substituant, l'équation (2) devient donc

$$(3) \qquad \rho = \frac{b\cos\alpha + a}{\cos(\alpha - k)}\cos(\omega - k).$$

M. Rouché démontre (*voir* Comberousse, *Géométrie analytique*, p. 265) que l'équation de la tangente à la courbe $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$ au point dont la coordonnée angulaire est α, est

$$\frac{1}{\rho} = f(\alpha)\cos(\omega - \alpha) + f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha).$$

La tangente au point de rencontre de la transversale avec l'équation (1) a donc pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\omega - \alpha)}{b\cos\alpha + a} + \frac{b\sin\alpha\sin(\omega - \alpha)}{(b\cos\alpha + a)^2};$$

de même la tangente au point de rencontre de la transversale avec la courbe (3) a pour équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos(\omega - \alpha)}{b\cos\alpha + a} + \frac{\tang(\alpha - k)\sin(\omega - \alpha)}{b\cos\alpha + a}.$$

Puisque le limaçon et le cercle sont tangents au point de rencontre avec la transversale, les deux équations ci-dessus doivent être identiques, ce qui donne

$$\tang(\alpha - k) = \frac{b\sin\alpha}{b\cos\alpha + a},$$

d'où l'on tire

$$\text{tang}\, k = \frac{a \sin \alpha}{a \cos \alpha + b}.$$

Mais l'équation (3) peut s'écrire

$$\rho = (b \cos \alpha + a) \frac{\cos \omega + \text{tang}\, k \sin \omega}{\cos \alpha + \text{tang}\, k \sin \alpha},$$

et, en remplaçant tang k par sa valeur,

$$\rho = b \cos \omega + a \cos(\omega - \alpha).$$

Si l'on y considère a comme variable, et qu'on cherche alors l'intersection de tous ces cercles avec une perpendiculaire à la transversale menée par le point double, on trouve toujours le même second point

$$\omega = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \rho = -b \sin \alpha;$$

donc toutes ces circonférences ont même axe radical, et cet axe est perpendiculaire à la transversale.

La dernière équation, lorsqu'on y considère α comme variable, est d'ailleurs celle d'un cercle qui a son centre sur une perpendiculaire à l'axe polaire menée par le point double, à une distance $\frac{b}{2}$ au-dessous de cet axe.

Question 605

(voir 2e série, t. II, p. 29);

PAR M. JOHN GRIFFITHS.

Lorsqu'un triangle ABC *est à la fois inscrit dans une courbe du troisième degré et circonscrit à cette même courbe, le produit des rayons de courbure aux points* A, B, C *est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle* ABC. (MANNHEIM.)

Soient $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, les équations des côtés a, b, c du triangle ABC; ρ_a, ρ_b, ρ_c, les rayons de courbure de la courbe proposée, aux points A, B, C respectivement, R le rayon du cercle circonscrit au triangle. Alors, l'équation d'une courbe du troisième degré, passant par les sommets de ce triangle et touchant ses côtés, sera

$$(1)\quad \lambda\beta^2\gamma + \mu\gamma^2\alpha + \nu\alpha^2\beta = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad (2)\quad \lambda\beta\gamma^2 + \mu\gamma\alpha^2 + \nu\alpha\beta^2 = 0,$$

λ, μ, ν étant des constantes indéterminées.

Cela posé, il reste à trouver la valeur du rayon de courbure (ρ) de la courbe $F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, en un point quelconque (α, β, γ). Elle est

$$\rho = \frac{\left[\sum \left(\frac{dF}{d\alpha}\right)^2 - 2\sum \frac{dF}{d\beta}\frac{dF}{d\gamma}\cos A\right]^{\frac{3}{2}}}{\sum \frac{d^2F}{d\alpha^2}\left(\frac{dF}{d\gamma}\sin B - \frac{dF}{d\beta}\sin C\right)^2 + 2\sum \frac{d^2F}{d\beta\, d\gamma}\left(\frac{dF}{d\alpha}\sin C - \frac{dF}{d\gamma}\sin A\right)\left(\frac{dF}{d\beta}\sin A - \frac{dF}{d\alpha}\sin B\right)},$$

d'où, en prenant l'équation (1), on trouve facilement

$$\rho_a = \frac{1}{2}\,\frac{\nu}{\mu}\,\frac{b\sin C}{\sin^2 A}, \qquad \rho_b = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{\nu}\,\frac{c\sin A}{\sin B}, \qquad \rho_c = \frac{1}{2}\,\frac{\mu}{\lambda}\,\frac{a\sin B}{\sin^2 C}.$$

ou

$$\rho_a = \frac{\nu}{\mu}\,\frac{bc}{a^2}R, \qquad \rho_b = \frac{\lambda}{\nu}\,\frac{ca}{b^2}R, \qquad \rho_c = \frac{\mu}{\lambda}\,\frac{ab}{c^2}R,$$

Leur produit est donc égal à R^3.

C. Q. F. D.

Question 664

(voir 2e série, t. II, p. 371);

PAR M. JOSSELIN,
Lieutenant d'artillerie.

Dans tout triangle inscrit dans une conique, et dont deux côtés sont tangents à une seconde conique, le troisième enveloppe une conique passant par les points d'intersection des deux premières. (CH. DELEVAQUE.)

Soient $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ les équations des trois côtés d'un triangle inscrit dans une conique; A, B, C étant des fonctions du premier degré en x et y.

L'équation d'une conique passant par les trois sommets du triangle est de la forme

$$AB + \lambda_1 AC + \lambda_2 BC = 0. \tag{1}$$

L'équation d'une conique tangente aux deux côtés A et B est de la forme

$$AB + \lambda U^2 = 0, \tag{2}$$

$U = 0$ représentant la corde de contact.

Retranchons l'équation (2) de (1), nous aurons

$$\lambda_1 AC + \lambda_2 BC - \lambda U^2 = 0. \tag{3}$$

Cette équation représente une conique passant par les points d'intersection des deux premières. Et l'on voit, d'après la forme de l'équation (3), que la droite $C = 0$ est tangente à cette dernière conique, car l'équation (3) est satisfaite par $C = 0$, et $U^2 = 0$.

Le théorème est donc démontré.

Note. — Le même théorème a été démontré par M. E. Vieillard, élève à l'institution Favard; MM. Léon Dyrion, Lacauchie, élèves du lycée de Strasbourg. M. de Marsilly observe que le théorème est de M. Poncelet (voir *Propriétés projectives*, p. 327).